

Διακύμανση

Ο υπολογισμός της διακύμανσης γίνεται ως εξής:

Σε μη ταξινομημένα δεδομένα

- Υπολογίζω τη μέση τιμή του δείγματος χρησιμοποιώντας το γνωστό τύπο,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (1)$$

και στη συνέχεια υπολογίζω τη διακύμανση κάνοντας χρήση του επόμενου τύπου.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (2)$$

Διακύμανση

Σε ταξινομημένα δεδομένα

- Υπολογίζω τη μέση τιμή του δείγματος χρησιμοποιώντας το γνωστό τύπο,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i v_i}{\sum_{i=1}^k v_i} \quad (3)$$

και στη συνέχεια υπολογίζω τη διακύμανση κάνοντας χρήση του επόμενου τύπου.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k v_i (X_i - \bar{x})^2}{v} \quad (4)$$

όπου

- k : ο αριθμός των τάξεων
- X_i : Η κεντρική τιμή της i τάξης
- v_i : Απόλυτη Συχνότητα της i τάξης

Άσκηση 1

Δίνονται οι επόμενες τιμές.

-3, -1, 0, 5, 14.

Να βρεθεί η διακύμανση των δεδομένων.

Πρόκειται για μη ταξινομημένα δεδομένα. Άρα θα υπολογίσω τη μέση τιμή των δεδομένων κάνοντας χρήση του τύπου (1).

Έχω διαδοχικά:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = 3. \quad (\text{Οι υπολογισμοί αφήνονται για εξάσκηση.})$$

Αφού έχω υπολογίσει τη μέση τιμή, χρησιμοποιώ τον τύπο (2)

και υπολογίζω τη διακύμανση των δεδομένων, ως εξής

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{[(-3-3)^2 + (-1-3)^2 + (0-3)^2 + (5-3)^2 + (14-3)^2]}{5-1} =$$

$$\frac{[(-6)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (2)^2 + (11)^2]}{4} =$$

$$\frac{[36+16+9+4+121]}{4} = 46.5$$

Άσκηση 2

Δίνεται ο επόμενος πίνακας συχνοτήτων του απαιτούμενου χρόνου (σε λεπτά) 300 συναντήσεων ενός επιχειρηματία με τους πελάτες του. Να βρεθεί η διακύμανση των δεδομένων.

Χρόνος	Συχνότητα	
[5,15)	40	
[15,25)	60	
[25,35)	80	
[35,45)	70	
[45,55)	50	
Σύνολο	300	

Πίνακας 1: Πίνακας Συχνοτήτων για τη μεταβλητή του χρόνου

Συνέχεια Άσκησης 2

Χρόνος	Συχνότητα	Κεντρική Τιμή Τάξης
[5,15)	40	10
[15,25)	60	20
[25,35)	80	30
[35,45)	70	40
[45,55)	50	50
Σύνολο	300	

Πίνακας 2: Πίνακας Συχνοτήτων για τη μεταβλητή του χρόνου

Συνέχεια Άσκησης 2

Υπολογίζω τη μέση τιμή των δεδομένων του πίνακα, για τη μεταβλητή του χρόνου, κάνοντας χρήση του τύπου (3)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i v_i}{\sum_{i=1}^k v_i} = 31. \text{ (Οι υπολογισμοί αφήνονται για εξέταση.)}$$

Στη συνέχεια, με χρήση του τύπου (4), υπολογίζω τη διακύμανση.

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^k v_i (X_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k v_i} = \\ &= \frac{(40(10-31)^2) + (60(20-31)^2) + (80(30-31)^2) + (70(40-31)^2) + (50(50-31)^2)}{300} = \\ &= \frac{(40(-21)^2) + (60(-11)^2) + (80(-1)^2) + (70(9)^2) + (50(19)^2)}{300} = \\ &= \frac{(40 \cdot 441) + (60 \cdot 121) + (80 \cdot 1) + (70 \cdot 81) + (50 \cdot 361)}{300} = \\ &= \frac{17640 + 7260 + 80 + 5670 + 18050}{300} = \frac{48700}{300} = 162,33 \end{aligned}$$

Τυπική Απόκλιση

Ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης γίνεται ως εξής:

Τυπική Απόκλιση

- Υπολογίζω τη διακύμανση του δείγματος (s^2) χρησιμοποιώντας τον τύπο (2) ή τον τύπο (4).

Στη συνέχεια, ανεξάρτητα εάν τα δεδομένα του δείγματος είναι ταξινομημένα ή μη ταξινομημένα, χρησιμοποιώ τον επόμενο τύπο για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης.

$$s = \sqrt{s^2} \quad (5)$$

Για παράδειγμα, στην Άσκηση 2, η τυπική απόκλιση υπολογίζεται ως εξής:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{162,33} = 12,74$$

Αρχικές Ροπές

Ο υπολογισμός της αρχικής ροπής r -τάξης, γίνεται ως εξής:

Αρχική ροπή r -τάξης

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^k v_i (X_i)^r}{\sum_{i=1}^k v_i} \quad (6)$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστούν οι αρχικές ροπές 1ης, 2ης, 3ης και 4ης τάξης στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων.

X_i	v_i	$v_i X_i$	$v_i X_i^2$	$v_i X_i^3$	$v_i X_i^4$
2	10				
4	40				
5	30				
6	20				
Σύνολο	$v = 100$				

Πίνακας 3: Πίνακας Συχνοτήτων για την εύρεση των αρχικών ροπών.

Συνέχεια Άσκησης 3

X_i	v_i	$v_i X_i$	$v_i X_i^2$	$v_i X_i^3$	$v_i X_i^4$
2	10	20	40	80	160
4	40	160	640	2560	10240
5	30	150	750	3750	18750
6	20	120	720	4320	25920
Σύνολο	100	450	2150	10710	55070

Πίνακας 4: Πίνακας Συχνοτήτων για την εύρεση των αρχικών ροπών.

$$\text{Άρα, } m_1 = \frac{\sum_{i=1}^k v_i X_i}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{450}{100} = 4,5 = \bar{X}$$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^k v_i (X_i)^2}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{2150}{100} = 21,5.$$

Ο υπολογισμός του m_3 και m_4 αφήνεται για εξάσκηση.

Κεντρικές Ροπές

Ο υπολογισμός της κεντρικής ροπής r -τάξης, γίνεται ως εξής:

Κεντρική ροπή r -τάξης

$$\mu_r = \frac{\sum_{i=1}^k v_i (X_i - \bar{x})^r}{\sum_{i=1}^k v_i} \quad (7)$$

Άσκηση 4

Στα δεδομένα του προηγούμενου πίνακα, να υπολογιστούν οι κεντρικές ροπές 1ης, 2ης, 3ης και 4ης τάξης.

X_i	v_i	$v_i(X_i - \bar{x})$	$v_i(X_i - \bar{x})^2$	$v_i(X_i - \bar{x})^3$	$v_i(X_i - \bar{x})^4$
2	10	-25	62.5	-156.25	39.06
4	40	-20	10	-5	0.0625
5	30	15	7.5	3.75	0.0625
6	20	30	45	67.5	5.0625
Σύνολο	100	0	125	-90	44.25

Πίνακας 5: Πίνακας Συχνοτήτων για την εύρεση των κεντρικών ροπών.

$$\text{Άρα, } \mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^k v_i(X_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{0}{100} = 0 \text{ (ΠΑΝΤΑ } \mu_1 = 0)$$

$$\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^k v_i(X_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{125}{100} = 1,25.$$

Ο υπολογισμός του μ_3 και μ_4 αφήνεται για εξάσκηση.

Συντελεστής Ασυμμετρίας Pearson

Συντελεστής Ασυμμετρίας Pearson

Δίνεται από τον τύπο

$$s_k = \frac{\bar{x} - T}{s} \quad (8)$$

- αρνητική ασυμμετρία εάν $s_k < 0$
- συμμετρία εάν $s_k = 0$
- θετική ασυμμετρία εάν $s_k > 0$

Συντελεστής Ασυμμετρίας Fisher

Συντελεστής Ασυμμετρίας Fisher

Δίνεται από τον τύπο

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} \quad (9)$$

- αρνητική ασυμμετρία εάν $\gamma_1 < 0$
- συμμετρία εάν $\gamma_1 = 0$
- θετική ασυμμετρία εάν $\gamma_1 > 0$

Συντελεστής Ασυμμετρίας Yule

Συντελεστής Ασυμμετρίας Yule

Δίνεται από τον τύπο

$$s = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{Q_3 - Q_1} \quad (10)$$

- αρνητική ασυμμετρία εάν $s < 0$
- συμμετρία εάν $s = 0$
- θετική ασυμμετρία εάν $s > 0$

Άσκηση 5

Από ένα σύνολο δεδομένων, έχουν προκύψει τα εξής μέτρα:

- $\bar{x} = 39,5$, $M = 40$, $T = 42,5$
- $s^2 = \mu_2 = 151,25$, $s = \sqrt{\mu_2} = 12,3$, $\mu_3 = -69.75$
- $Q_1 = 30$, $Q_3 = 48.3$

Να βρεθεί η μορφή της ασυμμετρίας (αν υπάρχει).

Συνέχεια Άσκησης 5

Για να εξετάσω το είδος της ασυμμετρίας, θα υπολογίσω τους συντελεστές ασυμμετρίας.

Ο συντελεστής ασυμμετρίας του Pearson είναι

$$s_k = \frac{\bar{x} - T}{s} = \frac{39,5 - 42,5}{12,3} = -0,24.$$

Οι υπόλοιποι συντελεστές αφήνονται για εξάσκηση.