

Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 1 - Μέτρα Θέσης (Διάμεσος, Τεταρτημόρια, Επικρατούσα Τιμή)

A. Λαδάς (a_ladas@upatras.gr)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

16/11/2020

Διάμεσος

Σημαντικό πρώτο βήμα στη διαδικασία υπολογισμού της διαμέσου είναι η αύξουσα διάταξη των παρατηρήσεων.

Περιπτώσεις

- Σε περιττό αριθμό μη ταξινομημένων δεδομένων:

$$\delta_{\theta} = \frac{n+1}{2} \quad (1)$$

- Σε άρτιο αριθμό μη ταξινομημένων δεδομένων:

$$\delta_{\theta} = \frac{n+1}{2} \quad (2)$$

$$\delta = \frac{x_{\frac{n+1}{2}} + x_{\frac{n-1}{2}}}{2} \quad (3)$$

Άσκηση 1

Δίνονται οι επόμενες τιμές.

-3, -1, 0, 5, 17, 20, 151.

Να βρεθεί η διάμεσος των δεδομένων.

Παρατηρώ ότι το πλήθος των δεδομένων είναι $n = 7$ (περιττός αριθμός) και τα δεδομένα είναι ήδη διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά.

Άρα χρησιμοποιώ τον τύπο (1) για τον υπολογισμό της διαμέσου.

$\delta_{\theta} = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$, οπότε η τέταρτη παρατήρηση είναι η διάμεσος των δεδομένων. Δηλαδή, $\delta = 5$.

Άσκηση 2

Δίνονται οι επόμενες τιμές.

-3, 0, 5, 17, 20, 151.

Να βρεθεί η διάμεσος των δεδομένων.

Παρατηρώ ότι το πλήθος των δεδομένων είναι $n = 6$ (άρτιος αριθμός) και τα δεδομένα είναι ήδη διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά.

Άρα χρησιμοποιώ τους τύπους (2 και 3) για τον υπολογισμό της διαμέσου.

$\delta_{\theta} = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$, οπότε η διάμεσος βρίσκεται ανάμεσα στην τρίτη και τέταρτη παρατήρηση.

Δηλαδή, $\delta = \frac{x_{\frac{7+1}{2}} + x_{\frac{7-1}{2}}}{2} = \frac{x_4 + x_3}{2} = \frac{17+5}{2} = \frac{22}{2} = 11$.

Διάμεσος σε Ομαδοποιημένα δεδομένα

Διάμεσος σε Ομαδοποιημένα δεδομένα

$$M = e_{i-1} + \frac{(e_i - e_{i-1})}{f_i} \left(\frac{n}{2} - \Phi_{i-1} \right) \quad (4)$$

- e_{i-1} : Κάτω όριο τάξης που περιέχει τη διάμεσο
- e_i : Πάνω όριο τάξης που περιέχει τη διάμεσο
- f_i : Απόλυτη συχνότητα τάξης που περιέχει τη διάμεσο
- n : Πλήθος παρατηρήσεων
- Φ_{i-1} : Αθροιστική συχνότητα προηγούμενης τάξης από αυτή που περιέχει τη διάμεσο.

Άσκηση 3

Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων παρουσιάζονται τα bonus των 140 εργαζομένων μιας επιχείρησης, σε €. Ποια η διάμεση τιμή των bonus.

bonus $[e_{i-1}, e_i)$	f_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[120, 160)	26	0.186	26	0.186
[160, 200)	33	0.236	59	0.422
[200, 240)	59	0.422	118	0.842
[240, 280)	17	0.123	135	0.965
[280, 320)	5	0.035	140	1
Σύνολο	$n = 140$	1		

Πίνακας 1: Πίνακας Συχνοτήτων για το ύψος των bonus 140 εργαζομένων μιας επιχείρησης.

Συνέχεια Άσκησης 3

Πρέπει να εντοπίσουμε την τάξη που περιέχει τη διάμεσο.

Υπολογίζουμε $\frac{n}{2} = \frac{140}{2} = 70$.

Άρα, η διάμεσος βρίσκεται στην τάξη [200, 240).

Κάνοντας χρήση του τύπου (4),

$$\begin{aligned} M &= e_{i-1} + \frac{(e_i - e_{i-1})}{f_i} \left(\frac{n}{2} - \Phi_{i-1} \right) \\ &= 200 + \frac{(240 - 200)}{59} \left(\frac{140}{2} - 59 \right) \\ &= 207,457. \end{aligned}$$

Το 50% των εργαζομένων έλαβαν bonus $> 207,457\text{€}$, και οι υπόλοιποι έλαβαν bonus $< 207,457\text{€}$

Τεταρτημόρια σε Ομαδοποιημένα δεδομένα

Τεταρτημόρια σε Ομαδοποιημένα δεδομένα

$$Q_1 = e_{i-1} + \frac{(e_i - e_{i-1})}{f_i} \left(\frac{n}{4} - \Phi_{i-1} \right) \quad (5)$$

$$Q_3 = e_{i-1} + \frac{(e_i - e_{i-1})}{f_i} \left(\frac{3n}{4} - \Phi_{i-1} \right) \quad (6)$$

- e_{i-1} : Κάτω όριο τάξης που περιέχει το τεταρτημόριο
- e_i : Πάνω όριο τάξης που περιέχει το τεταρτημόριο
- f_i : Απόλυτη συχνότητα τάξης που περιέχει το τεταρτημόριο
- n : Πλήθος παρατηρήσεων
- Φ_{i-1} : Αθροιστική συχνότητα προηγούμενης τάξης από αυτή που περιέχει το τεταρτημόριο.

Άσκηση 4

Στον ίδιο πίνακα συχνοτήτων, να υπολογιστεί το πρώτο τεταρτημόριο (Q_1) και το τρίτο τεταρτημόριο (Q_3) (αφήνεται για εξάσκηση).

Πρέπει να εντοπίσουμε την τάξη που περιέχει το πρώτο τεταρτημόριο. Υπολογίζουμε $\frac{n}{4} = \frac{140}{4} = 35$.

Άρα, το πρώτο τεταρτημόριο βρίσκεται στην τάξη [160, 200). Κάνοντας χρήση του τύπου (5),

$$\begin{aligned} Q_1 &= e_{i-1} + \frac{(e_i - e_{i-1})}{f_i} \left(\frac{n}{4} - \Phi_{i-1} \right) \\ &= 160 + \frac{(200 - 160)}{33} \left(\frac{140}{4} - 26 \right) \\ &= 170,9. \end{aligned}$$

Το 25% των εργαζομένων έλαβαν bonus $< 170,9\text{€}$, και το υπόλοιπο 75% έλαβαν bonus $> 170,9\text{€}$.

Επικρατούσα Τιμή σε Ομαδοποιημένα δεδομένα

Επικρατούσα Τιμή σε Ομαδοποιημένα δεδομένα

$$T = e_{i-1} + (e_i - e_{i-1}) \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \quad (7)$$

- e_{i-1} : Κάτω όριο τάξης που περιέχει την επικρατούσα τιμή
- e_i : Πάνω όριο τάξης που περιέχει την επικρατούσα τιμή
- Δ_1 : Συχνότητα τάξης που περιέχει την επικρατούσα τιμή μείον συχνότητα προηγούμενης τάξης.
- Δ_2 : Συχνότητα τάξης που περιέχει την επικρατούσα τιμή μείον συχνότητα επόμενης τάξης.

Άσκηση 5

Στον ίδιο πίνακα συχνοτήτων, να υπολογιστεί η επικρατούσα τιμή.

Πρέπει να εντοπίσουμε την τάξη που περιέχει την επικρατούσα τιμή. Βρίσκεται στην τάξη $[200, 240)$.

Κάνοντας χρήση του τύπου (7), έχουμε

$$T = e_{i-1} + (e_i - e_{i-1}) \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

$$\Upsilon\text{πολογίζουμε } \Delta_1 = f_{[200,240)} - f_{[160,200)} = 59 - 33 = 26.$$

$$\Delta_2 = f_{[200,240)} - f_{[240,280)} = 59 - 17 = 42.$$

$$T = 200 + (240 - 200) \frac{26}{26+42} = 215,29$$

Άρα, το bonus με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι τα 215,29 €.