Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 1 - Κατανομές Πιθανότητας

Α. Λαδάς (*a_ladas@upatras.gr*)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

21/12/2020

Διωνυμική Κατανομή

Ας θεωρήσουμε την τ.μ. X ως εξής:
X:(Ο αριθμός των επιτυχιών από ένα πείραμα n επαναλήψεων, με p πιθανότητα επιτυχίας, με επανατοποθέτηση)

Τότε, η τ.μ. X ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους n και p. Γράφουμε: X $\sim$ B(n,p)

- Συνάρτηση Πιθανότητας : $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
- Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής: $P(X \leq x) = \sum_x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
- Αναμενόμενη Τιμή: $E(X) = np$
- Διακύμανση: $Var(X) = np(1-p)$

Υπενθύμιση: $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

Άσκηση 1

Το 20% των καρφιών που παράγει ένα μηχάνημα είναι ελαττωματικά. Αν επιλέξω τυχαία 4 καρφιά (με επανατοποθέτηση), ποια είναι η πιθανότητα:

1. (Ακριβώς) ένα καρφί να είναι ελαττωματικό;
2. Να μη βρω κανένα καρφί ελαττωματικό;
3. Το πολύ 2 καρφιά να είναι ελαττωματικά;
4. Πόσα ελαττωματικά καρφιά αναμένεται να βρω;
5. Με ποια διακυμανση;

Συνέχεια Άσκησης 1

Θα θεωρήσω την τ.μ. X: (O αριθμός των ελαττωματικών καρφιών από ένα πείραμα 4 επαναλήψεων, με $p = 20\%$ πιθανότητα επιτυχίας, με επανατοποθέτηση)

Τότε, η τ.μ. X ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $n = 4$ και $p = 20\%$. $X \sim B(4,20\%)$

1. $P(X = 1) = \binom{4}{1}0.2^1(1-0.2)^{4-1} = (\frac{4!}{1!(4-1)!})0.2(0.8)^3 = 4 * 0.2 * 0.512 = 0.4096 = 40.96\%$
2. $P(X = 0)$ **(Αφήνεται για εξάσκηση.)**

Συνέχεια Άσκησης 1

3. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{4}{x} 0.2^x (1 - 0.2)^{4-x} = \binom{4}{0} 0.2^0 (1-0.2)^{4-0} + \binom{4}{1} 0.2^1 (1-0.2)^{4-1} + \binom{4}{2} 0.2^2 (1-0.2)^{4-2} = 0.9728 = 97.28\%$
4. **(Αφήνεται για εξάσκηση.)**
5. **(Αφήνεται για εξάσκηση.)**

Κατανομή Poisson

Ας θεωρήσουμε την τ.μ. X ως εξής:
X:(Ο αριθμός των γεγονότων στη μονάδα του χρόνου/μήκους/σελίδων/..., με παράμετρο λ)

Τότε, η τ.μ. X ακολουθεί την Κατανομή Poisson, με παράμετρο λ. Γράφουμε: X $\sim$ P(λ)

- Συνάρτηση Πιθανότητας : $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής: $P(X \leq x) = \sum_x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$
- Αναμενόμενη Τιμή: $E(X) = \lambda$
- Διακύμανση: $Var(X) = \lambda$

Άσκηση 2

Ο αριθμός των πλοίων που φτάνουν σε μια απομακρυσμένη περιοχή κατά τη διάρκεια μιας ημέρας ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό άφιξης τα 2 πλοία ανά ημέρα.
Να υπολογιστούν οι εξής πιθανότητες:

1. Μια συγκεκριμένη ημέρα, να μη φτάσει κανένα πλοίο.
2. Μια συγκεκριμένη ημέρα, να φτάσουν τουλάχιστον 3 πλοία
3. Να φτάσουν το πολύ 6 πλοία στη διάρκεια μιας εβδομάδας.
4. Να μη φτάσει κανένα πλοίο στην περιοχή κατά τη διάρκεια 3 ημερών μιας εβδομάδας

Συνέχεια Άσκησης 2

Θα θεωρήσω την τ.μ. X:(O αριθμός των πλοίων που φτάνουν στην περιοχή, ανά ημέρα, με $\lambda = 2$ πλοία/ημέρα)

Τότε, η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson, με παράμετρο λ $= 2$. X $\sim$ P(2)

1. $P(X = 0) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} = 0,1353$
2. $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) =$
   $1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$
   $1 - (\frac{e^{-2}2^0}{0!}) - (\frac{e^{-2}2^1}{1!}) - (\frac{e^{-2}2^2}{2!}) = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} - 2e^{-2} =$
   $1 - 5e^{-2} = 1 - 5 * 0.1353 = 1 - 0.6765 = 0.3235$

Συνέχεια Άσκησης 2

3. Έστω Y:(Ο αριθμός των πλοίων που φτάνουν στην περιοχή, ανά εβδομάδα (7 ημέρες), με $\lambda = 14$ πλοία/εβδομάδα)
Τότε, η τ.μ. Y ακολουθεί την κατανομή Poisson, με παράμετρο $\lambda = 14$. $Y \sim \mathrm{P}(14)$
$P(Y \leq 6) = P(Y = 0) + ... + P(Y = 6) =$
$\frac{e^{-14}14^0}{0!} + ... + \frac{e^{-14}14^6}{6!} = 0.0139$

Συνέχεια Άσκησης 2

4. Έστω Z:(Ο αριθμός των ημερών της εδομάδας, ανάμεσα από 7 ημέρες, που δεν φτάνει κανένα πλοίο στην περιοχή, με πιθανότητα $P(X = 0) = 0.1353$, με επανατοποθέτηση) Τότε, η τ.μ. Z ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $n = 7$ και $p = 0.1353$. $\mathrm{Z} \sim \mathrm{B}(7{,}0.1353)$
Ψάχνω την πιθανότητα:
$P(Z = 3) = \binom{7}{3} 0.1353^3 (1 - 0.1353)^{7-3} = 0.047$