①

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ

ΑΠΛΟΣ: ΕΣΤΩ n ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΜΕ ΘΕΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ $X_1, \dots, X_n$. Ο ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΥΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ ΜΕ G ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΩΣ

$$G = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}$$

↳ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ.

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ $X_1 = 2,\ X_2 = 3,\ X_3 = 8,\ X_4 = 9,\ X_5 = 18$

$$G = \sqrt[5]{2 \times 3 \times 8 \times 9 \times 18} = 6$$

(ΟΠΩΣ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΑΠΟ ΑΥΤΟ ΠΟΥ ΘΑ ΜΑΣ ΕΔΙΝΕ $\bar{X} = 8$)

ΣΕ ΚΑΠΟΙΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ (ΕΙΔΙΚΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΠΟΛΛΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ), ΔΗΛΑΔΗ $\log G = \frac{1}{n} \sum \log(X_i)$. ΒΛΕΠΟΥΜΕ ΟΤΙ ΕΧΟΥΜΕ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΜΕΣΟ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ. ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $\log G$ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ G ΠΑΙΡΝΟΝΤΑΣ ΤΟΝ ΑΝΤΙΛΟΓΑΡΙΘΜΟ. ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΡ., ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ ΤΗΝ ΒΑΣΗ e, ΤΟΤΕ

$$\ln G = \frac{1}{5}(\ln X_1 + \ln X_2 + \dots + \ln X_5)$$
$$= \frac{1}{5}(\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln 18)$$

ΚΑΙ $G = e^{\frac{1}{5}(\ln 2 + \dots + \ln 18)} = 6$

②

ΣΤΑΘΜΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ:

ΕΣΤΩ ΟΙ ΤΙΜΕΣ $X_1, ..., X_n$ ΟΠΩΣ ΚΑΙ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ, ΚΑΙ ΕΣΤΩ ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΑΘΜΙΣΗΣ (ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΝ ΣΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΑΥΤΕΣ) $\frac{w_1}{n}, \frac{w_2}{n}, ..., \frac{w_n}{n}$, ΚΑΙ $n = \sum_{i=1}^{n} w_i$.

G ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΩΣ

$$G = \sqrt[n]{X_1^{w_1} \cdot X_2^{w_2} \cdot ... \cdot X_n^{w_n}} = X_1^{\frac{w_1}{n}} \cdot X_2^{\frac{w_2}{n}} ... X_n^{\frac{w_n}{n}}.$$

ΚΑΙ ΕΔΩ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΟΥΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ($\log G = \frac{1}{n}(w_1 \log X_1 + ... + w_n \log X_n)$)

ΚΑΙ G ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΝΤΙΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

ΓΙΑΤΙ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ G;

G ΕΙΝΑΙ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΕΡΟΣ ΤΟΥ $\bar{X}$ ΓΙΑ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΜΕΣΩΝ ΠΟΣΟΣΤΩΝ Ή ΛΟΓΩΝ. (ΠΑΡ. ΧΡΗΣΗΣ: ΑΡΙΘΜΟΔΕΙΚΤΕΣ)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ G: ΕΣΤΩ X ΚΑΙ Y ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΜΕ ~~Θ~~ΘΕΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΕΣΤΩ $Z = XY$ ΚΑΙ $W = \frac{X}{Y}$

ΤΟΤΕ $G(Z) = G(X) \cdot G(Y)$

$$G(W) = \frac{G(X)}{G(Y)}$$

(3)

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ ΟΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΑΥΞΗΣΕΙΣ ΗΜΕΡΟΜΙΣΘΙΩΝ ΣΕ 3 ΣΥΝΕΧΟΜΕΝΕΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥΣ:

Α' ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΥΞΗΣΗ 10%
Β' ——— ——— 20%
Γ' ——— ——— 30%

ΠΟΙΑ Η ΜΕΣΗ ΑΥΞΗΣΗ ΣΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΩΝ 3 ΠΕΡΙΟΔΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΑ;
ΕΔΩ ΕΧΟΥΜΕ ΜΕΣΗ ΑΥΞΗΣΗ ΠΟΣΟΣΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ G (ΚΑΙ ΟΧΙ $\bar{X}$). ΕΣΤΩ $X_1 = 0.1$, $X_2 = 0.2$, $X_3 = 0.3$
ΤΟΤΕ $G = \sqrt[3]{(0.1)(0.2)(0.3)} = 0.18$ (ΔΗΛΑΔΗ 18%)
(ΚΑΙ ΟΧΙ 20% ΠΟΥ ΘΑ ΜΑΣ ΕΔΙΝΕ $\bar{X}$)

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ ΤΟ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΚΑΤΑ ΚΕΦΑΛΗΝ ΕΙΣΟΔΗΜΑ ΧΩΡΑΣ. ΖΗΤΕΙΤΑΙ ΤΟ ΜΕΣΟ ΕΤΗΣΙΟ ΠΟΣΟΣΤΟ ΑΥΞΗΣΗΣ ΤΟΥ.

ΕΤΟΣ:	1975	76	77	78	79	80	81	82	83	84
ΕΙΣΟΔ.:	920	980	1020	1025	1040	1100	1110	1230	1380	1620
ΑΥΞΗΣΗ:		0.065	0.041	0.005	-	-	-	-		0.174

ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΩΣ: $0.065 = \frac{980 - 920}{920}$

$0.041 = \frac{1020 - 980}{980}$

ΚΛΠ ...

(4)

ΤΟ ΜΕΣΟ ΕΤΗΣΙΟ ΠΟΣΟΣΤΟ ΑΥΞΗΣΗΣ ΕΙΝΑΙ

$$G = \sqrt[9]{(0.065)(0.041)\cdots(0.174)} = 0.04 = 4\%.$$

ΜΕΣΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

ΣΥΝΗΘΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΟΤΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΥΞΟΜΕΙΩΣΕΙΣ.

ΕΣΤΩ Η ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΗ ΣΕΙΡΑ $K_1, K_2, \ldots, K_n$
(ΠΑΡ: ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ Ή ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ) ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ ΤΟ ΕΤΟΣ, ΕΞΑΜΗΝΟ, ΤΟ ΤΡΙΜΗΝΟ, ΟΙ ΜΗΝΑΣ:

ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ K_1.

ΤΕΛΟΣ 2ης ΠΕΡΙΟΔΟΥ: $K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1(1+i)$
ΟΠΟΥ i = ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΣΤΑΘΕΡΟ

ΤΕΛΟΣ 3ης ΠΕΡΙΟΔΟΥ: $K_3 = K_2 + K_2 i$
$= K_2(1+i)$
$= K_1(1+i)^2$
$\vdots$

ΚΛΠ...

ΤΕΛΟΣ nης ΠΕΡΙΟΔΟΥ: $K_n = K_1(1+i)^{n-1}$

Ο ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ ΤΩΝ $\frac{K_2}{K_1}, \frac{K_3}{K_2}, \ldots, \frac{K_n}{K_{n-1}}$

ΕΙΝΑΙ $G = \sqrt[n-1]{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{K_3}{K_2} \cdots \frac{K_n}{K_{n-1}}} = \sqrt[n-1]{\frac{K_n}{K_1}}$
$= \sqrt[n-1]{(1+i)^{n-1}} = 1+i$

$$\boxed{i = \text{ΜΕΣΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ} = G-1}$$

(5) ΠΑΡ

ΓΙΑΤΙ ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΟΣ ΕΔΩ Ο ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ (ΚΑΙ ΟΧΙ $\bar{X}$);

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΠΕΝΔΥΟΥΜΕ ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΓΙΑ ΑΓΟΡΑ ΟΜΟΛΟΓΩΝ) ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΑ ΕΤΗ.

ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΓΙΑ ΠΑΡ. ΤΑ ΔΥΟ ΠΡΩΤΑ ΕΤΗ. ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ 1ου ΕΤΟΥΣ ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΜΑΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΩΝ 1000 € ΜΕΙΩΘΗΚΕ ΣΤΑ 750 € ΕΝΩ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ 2ου ΕΤΟΥΣ ΑΥΞΗΘΗΚΕ ΣΤΑ 1000 € (ΣΥΝΕΠΩΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ 2ου ΕΤΟΥΣ ΕΧΟΥΜΕ ΟΛΟ ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΜΑΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟ).

ΣΤΟ 1ο ΕΤΟΣ: ΑΠΟΔΟΣΗ -25% ΔΙΟΤΙ ΕΧΟΥΜΕ $\frac{750-1000}{1000}$

ΣΤΟ 2ο ΕΤΟΣ: ΑΠΟΔΟΣΗ 33% ΔΙΟΤΙ ΕΧΟΥΜΕ $\frac{1000-750}{750}$

Ο ΑΡΙΘ. ΜΕΣΟΣ ΤΩΝ 2 ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΘΑ ΗΤΑΝ $\frac{-0.25+0.33}{2} = 0.04 = 4\% \Rightarrow$ ΛΑΘΟΣ

ΘΑ ΕΠΡΕΠΕ ΝΑ ΗΤΑΝ 0%.

ΑΝΤΙΘΕΤΑ $G = \sqrt[2]{\frac{750}{1000} \cdot \frac{1000}{750}} = 1$

$\Rightarrow i = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ ΜΕΣΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ $= 0\%$.

⑥

ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ

ΑΠΛΟΣ: ΕΣΤΩ n ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ $X_1, \ldots, X_n$. Ο ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ ΕΙΝΑΙ: $H = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{X_1} + \cdots + \frac{1}{X_n}\right)}$

$$\Leftrightarrow H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$$

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ $X_1 = 4$, $X_2 = 7$, $X_3 = 2$, $X_4 = 5$, $X_5 = 12$

$$\Leftrightarrow H = \frac{5}{\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12}} = 4.25$$

ΣΤΑΘΜΙΚΟΣ: ΕΣΤΩ $X_1, \ldots, X_k$ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ $n_1, \ldots, n_k$.

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{n_1}{X_1} + \cdots + \frac{n_k}{X_k}\right)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{X_i}},$$

ΚΑΙ $n = n_1 + \cdots + n_k$.

ΠΑΡ (ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ): ΕΣΤΩ ΟΤΙ Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΠΟΛΕΩΝ Α ΚΑΙ Β ΕΙΝΑΙ 400 ΧΛΜ. ΕΝΑ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ ΠΗΓΑΙΝΕΙ ΑΠΟ Α ΠΡΟΣ Β ΜΕ ΜΕΣΗ ΩΡΙΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ 50 ΧΛΜ/ΩΡΑ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΙ (ΑΠΟ Β ΠΡΟΣ Α) ΜΕ ΜΕΣΗ ΩΡΙΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ 80 ΧΛΜ/ΩΡΑ. ΠΟΙΑ Η ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΜΕΣΗ ΩΡΙΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ;

⑦

ΣΤΟ ΠΑΡ. ΑΥΤΟ ΑΝ ΕΦΑΡΜΟΖΑΜΕ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΜΕΣΟ ΘΑ ΒΡΙΣΚΑΜΕ $\frac{50+80}{2} = 65$ ΧΛΜ/ΩΡΑ ΜΕΣΗ ΩΡΙΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ → ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΟ ΑΥΤΟ ΔΙΟΤΙ ΑΠΟ Α ΠΡΟΣ Β ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ

$\frac{400}{50} = 8$ ΩΡΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟ Β ΠΡΟΣ Α ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ

$\frac{400}{80} = 5$ ΩΡΕΣ → ΣΥΝΟΛΟ $8+5=13$ ΩΡΕΣ ΓΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ $400+400=800$ ΧΛΜ., ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ Η ΜΕΣΗ ΩΡΙΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΕΙΝΑΙ

$\frac{800}{13} = 61.5$ ΧΛΜ/ΩΡΑ

ΑΠΛΟΣ ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ: ΕΔΩ $n=2$, $X_1=50$, $X_n=80$ $\Rightarrow$ $H = \frac{2}{\frac{1}{50}+\frac{1}{80}} = 61.5$

ΣΤΑΘΜΙΚΟΣ ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ:

$n =$ ΑΡΙΘ. ΧΛΜ. $= 800$, $n_1 = 400$, $n_2 = 400$

$X_1 = 50$, $X_2 = 80$

ΚΑΙ $H = \frac{800}{\frac{400}{50}+\frac{400}{80}} = 61.5$ → ΙΔΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΜΕ ΑΠΛΟ ΔΙΟΤΙ ΙΔΙΑ ΧΛΜ. ΑΠΟ Α ΠΡΟΣ Β ΚΑΙ ΑΠΟ Β ΠΡΟΣ Α

* ΑΝ ΟΜΩΣ ΟΙ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ ΟΧΙ ΙΔΙΕΣ ΤΟΤΕ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΟΝ ΣΤΑΘΜΙΚΟ

⑧

ΠΑΡ (ΓΙΑ ΣΠΙΤΙ)

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ 2 ΠΟΛΕΩΝ ΕΙΝΑΙ 600 ΧΛΜ. ΕΝΑ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ ΔΙΑΝΥΕΙ ΤΑ ΠΡΩΤΑ 100 ΧΛΜ. ΜΕ 25 ΧΛΜ/ΩΡΑ, ΤΑ ΕΠΟΜΕΝΑ 200 ΜΕ 50 ΧΛΜ./ΩΡΑ ΚΑΙ ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΜΕ 75 ΧΛΜ/ΩΡΑ. ΠΟΙΑ Η ΜΕΣΗ ΩΡΙΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΓΙΑ ΟΛΗ ΤΗΝ ΑΠΟΣΤΑΣΗ; (ΑΠ. 50)

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: ΧΡΗΣΗ ΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ

ΠΟΙΟ ΘΑ ΗΤΑΝ ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΑΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΣΑΤΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΜΕΣΟ; (ΑΠ. 58.3)

(ΦΥΣΙΚΑ Η ΧΡΗΣΗ ΑΡΙΘ. ΜΕΣΟΥ ΕΙΝΑΙ ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΗ)

Ο ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ ΕΧΕΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ. ΕΙΝΑΙ ΟΜΩΣ Ο ΠΙΟ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΜΙΑΣ ΑΛΛΗΣ.

(ΕΔΩ Η ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΑΣΗ ΕΙΝΑΙ Η ΜΕΣΗ ΩΡΙΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ, ΚΑΙ Η ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ Η ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ).