



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΈΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ (Μέρος 3^ο)

Εξαρτημένα δείγματα / Ζευγαρωτές παρατηρήσεις (1)

- Έστω η τ.μ. X και η τ.μ. Y που αντιστοιχούν σε δύο πληθυσμούς μετρήσεων
- Έστω ότι έχουμε δύο δείγματα X_1, X_2, \dots, X_n και Y_1, Y_2, \dots, Y_n
- Θεωρούμε τα ζεύγη $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ τα οποία είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο ενώ τα X_i και Y_i ενός του ίδιου ζεύγους δεν είναι ανεξάρτητα (δεν μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα)
- Για κάθε ζεύγος σχηματίζουμε τη διαφορά $D_i = X_i - Y_i$ και πλέον μπορούμε να εργαστούμε με ένα δείγμα, αυτό των διαφορών D_1, D_2, \dots, D_n το οποίο θεωρούμε ότι προέρχεται από ένα θεωρητικό πληθυσμό (τον πληθυσμό των διαφορών) με μέση τιμή $\mu_D = \mu_A - \mu_B$, όπου μ_A η μέση τιμή της X και μ_B η μέση τιμή της Y

Εξαρτημένα δείγματα / Ζευγαρωτές παρατηρήσεις (2)

- ▶ Έτσι, ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης $H_0: \mu_D = 0$ είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο μηδενικής υπόθεσης $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$
- ▶ Γενικότερα ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης $H_0: \mu_D = \delta$ είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο μηδενικής υπόθεσης $H_0: \mu_A - \mu_B = \delta$
- ▶ Αν η διακύμανση του πληθυσμού των διαφορών, σ_D^2 , είναι άγνωστη (που είναι το πιο συνηθισμένο) ως στατιστική συνάρτηση ελέγχου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την
$$T = \frac{(\bar{D} - \delta)\sqrt{n}}{S_D}$$
 όπου \bar{D} και S_D^2 οι τ.μ. που αντιστοιχούν στο μέσο και στη διακύμανση του δείγματος των διαφορών αντίστοιχα

Εξαρτημένα δείγματα / Ζευγαρωτές παρατηρήσεις (3)

- Αν επομένως το δείγμα των διαφορών προέρχεται από κανονικό πληθυσμό ισχύουν τα εξής:

$$H_0: \mu_D = \delta$$

Περιοχή απόρριψης της H_0

$H_1: \mu_D \neq \delta$	$H_1: \mu_D > \delta$	$H_1: \mu_D < \delta_0$
$ T = \frac{ \bar{d} - \delta }{s_d/\sqrt{n}} \geq t_{n-1, \alpha/2}$	$T = \frac{\bar{d} - \delta}{s_d/\sqrt{n}} \geq t_{n-1, \alpha}$	$T = \frac{\bar{d} - \delta}{s_d/\sqrt{n}} \leq -t_{n-1, \alpha}$

Με \bar{d} και s_d^2 συμβολίζεται, αντίστοιχα, η τιμή της τ.μ. \bar{D} και η τιμή της τ.μ. S_D^2 για τη συγκεκριμένη πραγματοποίηση του δείγματος των διαφορών

Παράδειγμα 5 (1)

- Ένας ερευνητής θέλει να συγκρίνει τις αποδόσεις (ανά στρέμμα) δύο ποικιλιών σταριού στον κάμπο της Θεσσαλίας
- Για το σκοπό αυτό σχεδίασε ένα πείραμα ως εξής:
- Επέλεξε 10 αγρούς σε δέκα διαφορετικές τοποθεσίες του Θεσσαλικού κάμπου και κάθε αγρό τον χώρισε σε δύο αγροτεμάχια ίδιου σχήματος και ίδιου εμβαδού
- Στο ένα αγροτεμάχιο κάθε αγρού καλλιέργησε στάρι της μιας ποικιλίας, έστω A, και στο άλλο αγροτεμάχιο καλλιέργησε στάρι της άλλης ποικιλίας, έστω B
- Σε ποιο από τα δύο αγροτεμάχια καλλιέργησε την ποικιλία A και σε ποιο την ποικιλία B το αποφάσισε με τυχαίο τρόπο (π.χ. με τη ρίψη ενός νομίσματος)

Παράδειγμα 5 (2)

- Επίσης φρόντισε στα δύο αγροτεμάχια κάθε αγρού να υπάρχουν ίδιες καλλιεργητικές συνθήκες και ίδιες συνθήκες συγκομιδής (γονιμότητα εδάφους, υγρασία, προσανατολισμός, χρόνος σποράς, καλλιεργητική μέθοδος, λίπανση, ημέρα θερισμού, κλπ.)
- Στον παρακάτω Πίνακα φαίνεται η απόδοση των δύο ποικιλιών σε καθέναν από τους 10 πειραματικούς αγρούς

Αγρός (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Απόδοση ποικιλίας A (Kg / στρέμμα) (x_i)	500	650	490	570	555	545	535	635	625	540
Απόδοση ποικιλίας B (Kg / στρέμμα) (y_i)	455	620	455	610	505	495	515	600	600	510

- Τα ευρήματα στα δύο δείγματα μαρτυρούν άραγε ότι οι μέσες αποδόσεις των δύο ποικιλιών στον κάμπο της Θεσσαλίας διαφέρουν; ($\alpha = 5\%$)

v	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Παράδειγμα 6 (1)

- Μια ερευνητική ομάδα σχεδίασε ένα πείραμα για να ελέγξει αν η ασπιρίνη επηρεάζει-μεταβάλλει την τιμή ενός αιματολογικού δείκτη (prothrombin time) ο οποίος σχετίζεται με την πήκτικότητα του αίματος και τη δημιουργία θρόμβων (η τιμή του δείκτη μετριέται σε δευτερόλεπτα)
- Για το σκοπό αυτό, επέλεξε ένα τυχαίο δείγμα 12 ατόμων και για κάθε άτομο μέτρησε την τιμή του δείκτη πριν και τρεις ώρες μετά τη λήψη δύο δισκίων ασπιρίνης (650 mg)
- Οι σχετικές μετρήσεις φαίνονται στον επόμενο Πίνακα

Παράδειγμα 6 (2)

Άτομο (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Prothrombin time (sec) (x_i)	12,3	12	12	13	13	12,5	11,3	11,8	11,5	11	11	11,3
Preothrombin time (sec) (y_i)	12	12,3	12,5	12	13	12,5	10,3	11,3	11,5	11,5	11	11,5

- Σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$, υποστηρίζουν τα πειραματικά δεδομένα ότι η μέση τιμή του δείκτη πριν και μετά τη λήψη των δισκίων ασπιρίνης διαφέρουν;

v	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576