Στατιστική Επιχειρήσεων Ι

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Συνεχής τ.μ. (1)

- Μια τ.μ. *X* λέγεται συνεχής αν υπάρχει μια μη αρνητική πραγματική συνάρτηση $f : \mathfrak{R} \rightarrow [0, +\infty)$ τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο *A* των πραγματικών να ισχύει

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

για κάθε *A* (μετρήσιμο) υποσύνολο των πραγματικών αριθμών

Συνεχής τ.μ. (2)

- Η συνάρτηση *f* ονομάζεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (ή απλά συνάρτηση πυκνότητας) της *X*

Ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας συνεχούς τ.μ.

1. $f(x) \geq 0, \text{για κάθε } x \in (-\infty, +\infty)$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Παράδειγμα 1ο (1)

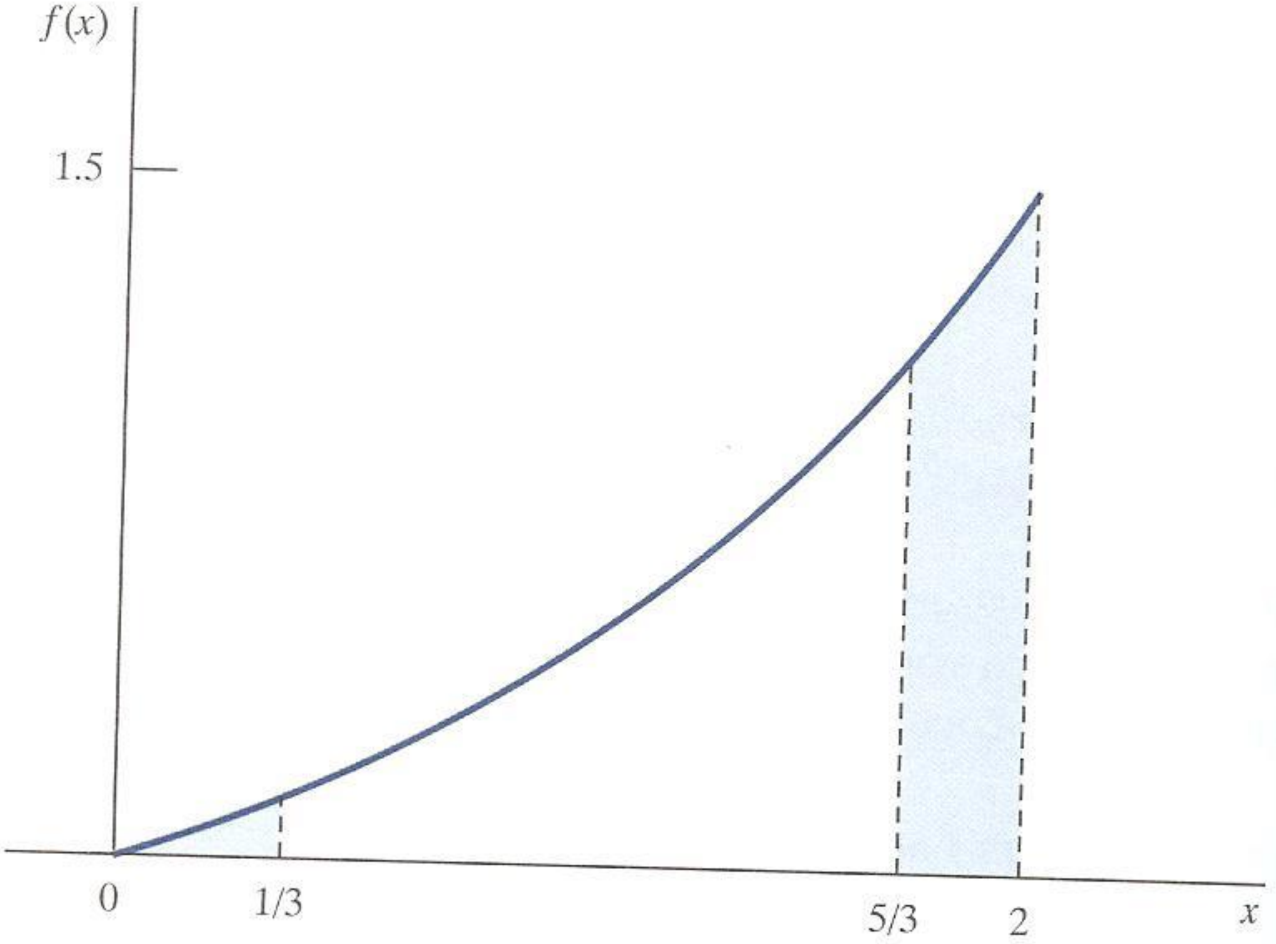
- Μπορεί η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

να είναι συνάρτηση πυκνότητας μιας συνεχούς τ.μ.;

Αν ναι, υπολογίστε τις πιθανότητες $P\left(0 \le X \le \frac{1}{3}\right)$ και $P\left(\frac{5}{3} \le X \le 2\right)$

Παράδειγμα 1ο (2)



Σχέση συνάρτησης πυκνότητας και συνάρτησης κατανομής συνεχούς τ.μ.

- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- $f(x) = F'(x)$ (στα σημεία συνέχειας της *f*)

Υπολογισμός πιθανοτήτων για συνεχείς τ.μ.

- $P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

- $P(X = x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$

Παράμετροι θέσης συνεχούς τ.μ.

- Μέση τιμή

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

- p-ποσοστιαίο σημείο x_p, $0 < p < 1$
- $\int_{-\infty}^{x_p} f(x)dx = p$ ή $F(x_p) = p$
- Διάμεσος: $\boldsymbol{\delta = x_{0,5}}$
- 1ο, 2ο και 3ο τεταρτημόριο: $\mathbf{x_{0,25}}$, $\mathbf{x_{0,5}}$, $\mathbf{x_{0,75}}$

Μέση τιμή συνάρτησης συνεχούς τ.μ.

- $\mathrm{E}\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

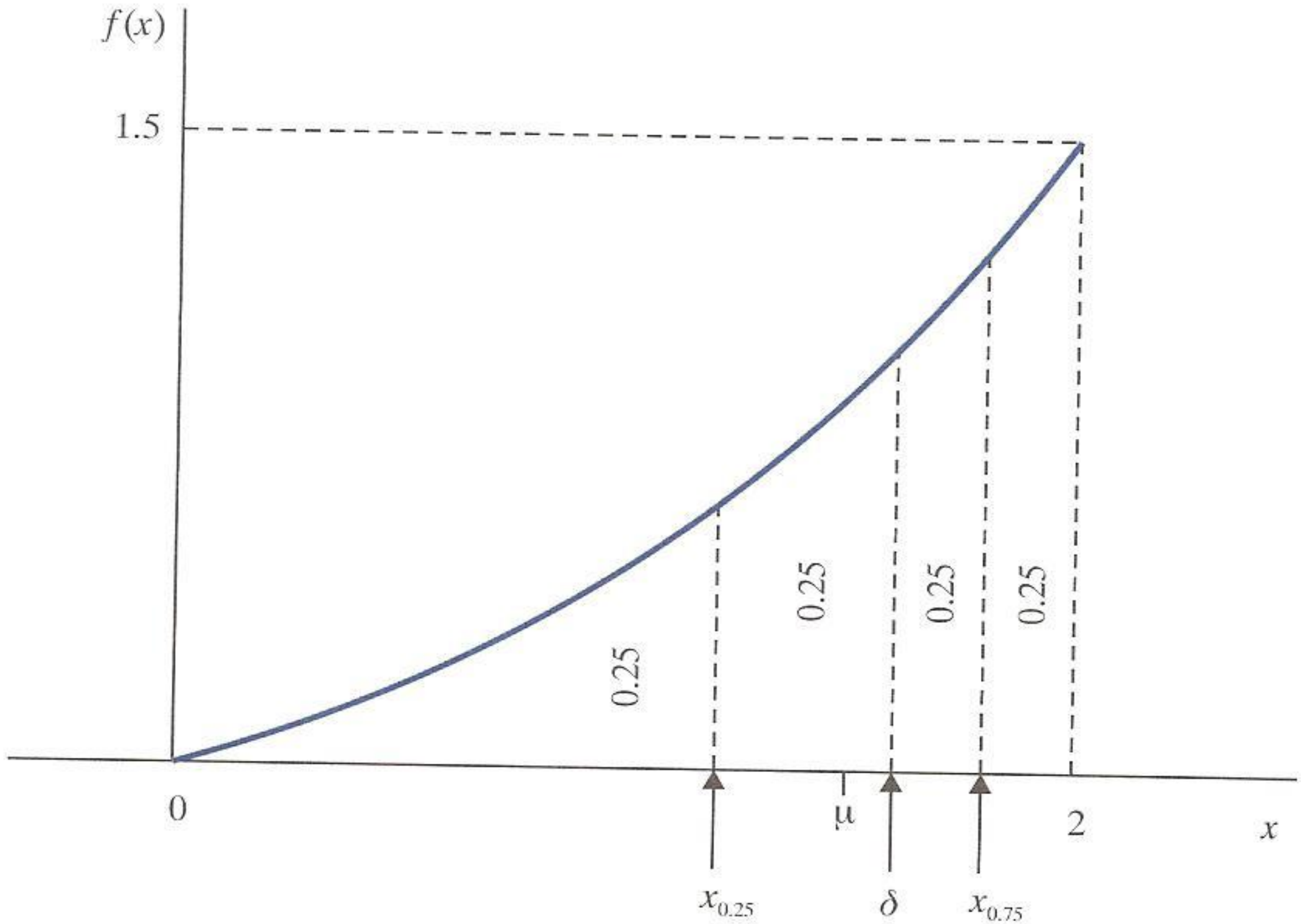
Παράδειγμα 2ο (1)

- Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

- Υπολογίστε τις παραμέτρους θέσης και διασποράς της *X*

Παράδειγμα 2ο (2)



Ομοιόμορφη κατανομή συνεχούς τ.μ.

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

(σε υποδιαστήματα του ίδιου πλάτους αντιστοιχούν ίσες πιθανότητες)

- $\mu = \mathrm{E(X)} = \frac{\alpha+\beta}{2}$
- $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

Ανεξάρτητες τ.μ. X και Y

- $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$

για οποιαδήποτε (μετρήσιμα) υποσύνολα A, B των πραγματικών

Ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_N$

- $P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, XN \in AN) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2) \ldots P(X_N \in AN)$

για οποιαδήποτε (μετρήσιμα) υποσύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_N$ των πραγματικών

Τυχαίο δείγμα μεγέθους N

- N ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ οι οποίες ακολουθούν την ίδια κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2
- Αν X η τ.μ. που παίρνει ως τιμή το αποτέλεσμα ενός πειράματος οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ αντιστοιχούν στην επανάληψη του ίδιου πειράματος N φορές

Δειγματικός μέσος

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Μέση τιμή και Διακύμανση δειγματικού μέσου

- $\mathrm{E}(\bar{\mathrm{X}}) = \mu_{\bar{\mathrm{X}}} = \mu$
- $Var(\bar{X}) = \sigma_{\bar{\mathrm{X}}}^2 = \frac{\sigma^2}{\mathrm{N}}$

Πληθυσμός ή στατιστικός πληθυσμός

- Η κατανομή των (δυνατών) τιμών μιας τ.μ.