

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΈΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ (Μέρος 1^ο)

Η γενική ιδέα της διαδικασίας στατιστικού ελέγχου υποθέσεων

- Πρόκειται για μια διαδικασία απόφασης μεταξύ δύο υποθέσεων
- Η μια υπόθεση ονομάζεται μηδενική (H_0) και η άλλη εναλλακτική (H_1)
- Θέτουμε ως μηδενική αυτή που αμφισβητείται και εξετάζουμε αν ένα τυχαίο δείγμα που παίρνουμε από τον πληθυσμό συνηγορεί (δίνει αποδείξεις) υπέρ της απόρριψής της έναντι της εναλλακτικής
- Έτσι, υποθέτοντας ότι η H_0 είναι αληθής, αν αυτό που «παρατηρείται στο δείγμα» είναι ακραίο, δηλαδή, αν έχει πολύ μικρή πιθανότητα να συμβεί, τότε **απορρίπτουμε την H_0**
- Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή, αν αυτό που παρατηρείται στο δείγμα δεν είναι ακραίο – σπάνιο (όταν δηλαδή είναι αληθής η H_0), τότε το δείγμα που πήραμε **δε μας δίνει αρκετές ενδείξεις για την απόρριψη της H_0** και «αποτυγχάνουμε να την απορρίψουμε»

Είδη σφαλμάτων

- Σφάλμα **Τύπου I**: Η λανθασμένη απόρριψη της H_0
- Σφάλμα **Τύπου II**: Η λανθασμένη μη απόρριψη της H_0

Παράδειγμα

- Το όριο αντοχής ενός τύπου καλωδίων είναι τυχαία μεταβλητή X με μέση τιμή $\mu=1500$ Kg και τυπική απόκλιση $\sigma=175$ Kg
- Το εργοστάσιο που κατασκευάζει αυτόν τον τύπο καλωδίων ισχυρίζεται ότι βελτίωσε τα υλικά που χρησιμοποιεί και πλέον το όριο αντοχής των καλωδίων έχει αυξηθεί
- Έλεγχος υποθέσεων
 - $H_0: \mu = 1500$ Kg
 - $H_1: \mu > 1500$ Kg

Κανόνες καθορισμού H_0

1. Ως H_0 διαλέγουμε την υπόθεση που δηλώνει ότι στον πληθυσμό η κατάσταση παραμένει αμετάβλητη (δεν υπάρχει αλλαγή / διαφορά)
2. Ως H_0 θέτουμε την υπόθεση της οποίας η λανθασμένη απόρριψη εγκυμονεί τους περισσότερους κινδύνους

Είδη ελέγχων

► Μονόπλευροι έλεγχοι:

1. $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$

2. $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$

► Αμφίπλευρος έλεγχος:

1. $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$

Στατιστική συνάρτηση ελέγχου

- Η στατιστική συνάρτηση την οποία επιλέγουμε για να εκφράσει «αυτό που παρατηρείται στο δείγμα»
- Συναρτήσεις που επιλέγονται ως στατιστικές συναρτήσεις ελέγχου:
 1. Ο δειγματικός μέσος, \bar{X}
 2. Η συνάρτηση $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
 3. Η συνάρτηση $T = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Επίπεδο σημαντικότητας, κρίσιμη τιμή και περιοχή απόρριψης

- Το μέγιστο αποδεκτό επίπεδο της πιθανότητας σφάλματος Τύπου I (λανθασμένης απόρριψης της H_0), συμβολίζεται με α και ονομάζεται **επίπεδο σημαντικότητας** του ελέγχου
- Προκαθορίζεται, και με βάση αυτό ορίζεται η **κρίσιμη τιμή** του ελέγχου, δηλαδή, η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου με βάση την οποία κρίνεται αν αυτό που παρατηρείται στο δείγμα είναι ακραίο ή όχι, και επομένως αν δίνει στατιστικά σημαντικές αποδείξεις εναντίον της H_0
- Οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου για τις οποίες, σε προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας α , απορρίπτεται η H_0 , ορίζουν την **περιοχή απόρριψης** της H_0
- Συνήθως το επίπεδο σημαντικότητας ορίζεται ίσο με 0,01 (**$\alpha=99\%$**) ή 0,05 (**$\alpha=95\%$**)

P-τιμή

- ▶ Είναι η ελάχιστη τιμή του επιπέδου σημαντικότητας (πιθανότητα) για την οποία απορρίπτεται η H_0
 - ▶ Αν $\alpha \geq \text{P-τιμή}$, τότε σε επίπεδο σημαντικότητας α , η H_0 απορρίπτεται
 - ▶ Αν $\alpha < \text{P-τιμή}$, τότε σε επίπεδο σημαντικότητας α , η H_0 δεν απορρίπτεται
- ▶ Η **P-τιμή** είναι ένα μέτρο το οποίο εκφράζει πόσο ισχυρές είναι οι αποδείξεις που προκύπτουν εναντίον της H_0 από το συγκεκριμένο δείγμα που εξετάζουμε

Στατιστικά σημαντικό δείγμα

- Όταν σε επίπεδο σημαντικότητας α απορρίπτεται η H_0 , το δείγμα χαρακτηρίζεται στατιστικά σημαντικό (σε επίπεδο σημαντικότητας α) και έχει την έννοια ότι δίνει σημαντικές αποδείξεις εναντίον της H_0
- Όσο πιο μικρό είναι το επίπεδο σημαντικότητας στο οποίο απορρίπτεται η H_0 και επομένως όσο πιο μικρή είναι η **P-τιμή**, τόσο πιο σημαντικό είναι το δείγμα

Ισχύς του ελέγχου

- Είναι η πιθανότητα να μην αποτύχει ο έλεγχος να απορρίψει την H_0 όταν αληθής είναι η H_1
- Δηλαδή, η ισχύς του ελέγχου εκφράζει την ικανότητα του ελέγχου να απορρίπτει σωστά την H_0
- Συμβολίζεται με $1-\beta$, όπου β η πιθανότητα σφάλματος Τύπου II
- Δηλαδή
 - $\beta = P(\text{μη απόρριψη της } H_0 \mid \text{αληθής η } H_1)$
 - $1-\beta = P(\text{απόρριψη της } H_0 \mid \text{αληθής η } H_1)$

Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α για τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού με ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n

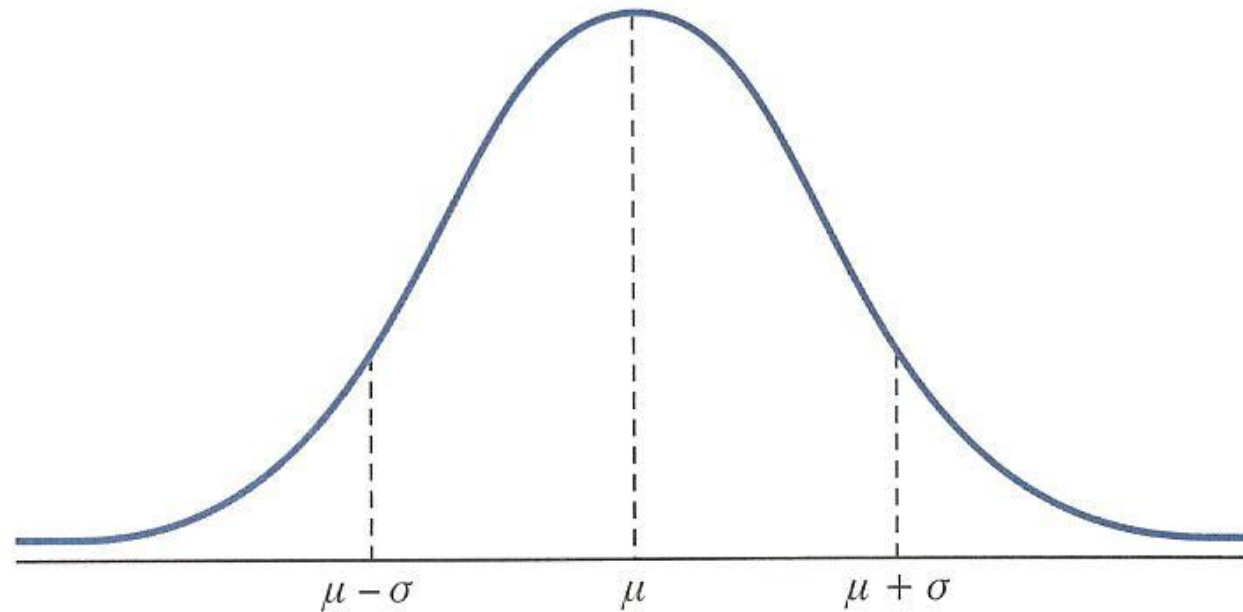
$H_0: \mu = \mu_0$

- Η διακύμανση σ^2 είναι **γνωστή** και ο πληθυσμός είναι κανονικός (οτιδήποτε μέγεθος πληθυσμού)
- Η διακύμανση σ^2 είναι **γνωστή** και το μέγεθος του πληθυσμού n μεγάλο (**>30**) (πληθυσμός οτιδήποτε) [έλεγχος επιπέδου σημαντικότητας α κατά προσέγγιση]

Περιοχή απόρριψης της H_0

$H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$
$ Z = \frac{ \bar{X} - \mu_0 }{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_{\alpha}$

Γραφική παράσταση της κανονικής κατανομής



Οι θέσεις των σημείων καμπής και της κορυφής της κανονικής καμπύλης

Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α για τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού με ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n

$$H_0: \mu = \mu_0$$

- Η διακύμανση σ^2 είναι **άγνωστη** και το μέγεθος του πληθυσμού n μεγάλο (**>30**) (οτιδήποτε πληθυσμός) [έλεγχος επιπέδου σημαντικότητας α κατά προσέγγιση]

Περιοχή απόρριψης της H_0

$H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$
$ Z = \frac{ \bar{X} - \mu_0 }{S/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq -z_{\alpha}$

Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α για τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού με ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n

$$H_0: \mu = \mu_0$$

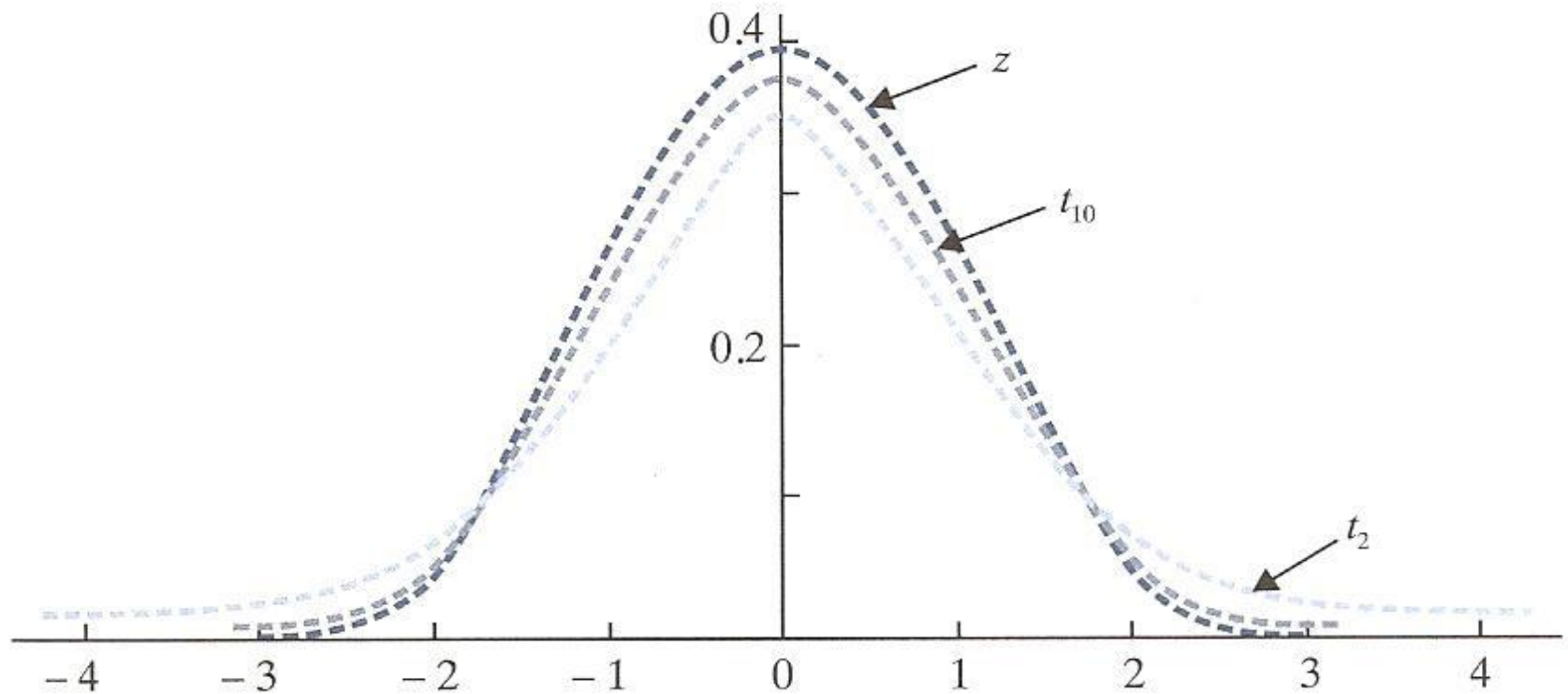
- Η διακύμανση σ^2 είναι **άγνωστη** και ο πληθυσμός είναι **κανονικός** (οτιδήποτε μέγεθος πληθυσμού)

Περιοχή απόρριψης της H_0

$H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$
$ T = \frac{ \bar{X} - \mu_0 }{S/\sqrt{n}} \geq t_{n-1; \alpha/2}$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{n-1; \alpha}$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq -t_{n-1; \alpha}$

Η τ.μ. $\frac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}}$, για κανονικό πληθυσμό, προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την t-κατανομή με n-1 βαθμούς ελευθερίας

Η κατανομή t (ή Student) με n βαθμούς ελευθερίας – καμπύλη



Η συνάρτηση πυκνότητας της t_v για $v = 2$ και $v = 10$ και της $N(0, 1)$.

Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α για τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού με ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n
 $H_0: \mu = \mu_0$

- Το **t-test** προϋποθέτει ότι ο πληθυσμός είναι **κανονικός**
- Στην πράξη εντούτοις αποδεικνύεται «ανθεκτικό» σε αυτή την υπόθεση
- Δηλαδή, το επίπεδο σημαντικότητας του ελέγχου είναι κοντά στο α ακόμα και αν η υπόθεση της κανονικότητας του πληθυσμού δεν ικανοποιείται όταν:
 1. Η κατανομή του πληθυσμού δεν απέχει δραματικά από την κανονική κατανομή
 2. Το μέγεθος του δείγματος δεν είναι πολύ μικρό

Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α για τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού με ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n

$$H_0: \mu = \mu_0$$

- ▶ Όταν το n είναι **μικρό**, ο πληθυσμός **όχι κανονικός** και η διακύμανση σ^2 είτε γνωστή είτε άγνωστη δεν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε στατιστικό έλεγχο υποθέσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α

Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α για το διωνυμικό ποσοστό p με ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n

$H_0: p = p_0$

➤ $np_0 \geq 5$ και $n(1 - p_0) \geq 5$

➤ \hat{p} είναι το ποσοστό επιτυχιών στο δείγμα

Περιοχή απόρριψης της H_0

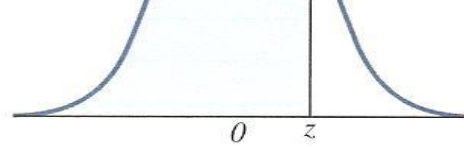
$H_1: p \neq p_0$	$H_1: p > p_0$	$H_1: p < p_0$
$ z = \frac{ \hat{p} - p_0 /\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \geq z_{\alpha/2}$	$z = \frac{(\hat{p} - p_0)/\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \geq z_{\alpha}$	$z = \frac{(\hat{p} - p_0)/\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \leq -z_{\alpha}$

Παράδειγμα 1

- Στον παρακάτω Πίνακα φαίνεται για κάθε μια από 50 τυχαία επιλεγμένες γαλακτοπαραγωγές αγελάδες ο χρόνος (σε μήνες) από την πρώτη εκδήλωση μιας συγκεκριμένης ασθένειας που προσβάλλει τις αγελάδες μέχρι την επανεμφάνισή της

2,1	1,7	0,8	0,8	4,1	8,7	1,4	2,9	1,9	2,7
4,4	2,2	5,5	7,0	1,8	0,2	1,0	0,9	4,0	0,7
2,0	6,5	0,7	4,3	0,2	5,6	2,4	1,4	1,3	1,2
0,5	3,9	7,4	3,3	8,8	0,3	2,0	5,7	0,8	2,6
9,9	1,6	2,8	1,0	0,6	1,3	0,8	5,9	0,9	0,4

- Από τη σχετική βιβλιογραφία είναι γνωστό ότι ο μέσος χρόνος μέχρι την επανεμφάνιση της συγκεκριμένης ασθένειας είναι 3 μήνες
- Μήπως τα συγκεκριμένα δεδομένα δίνουν σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, στατιστικά σημαντικές αποδείξεις ότι ο μέσος χρόνος επανεμφάνισης της ασθένειας δεν είναι 3 μήνες αλλά λιγότερο;



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Παράδειγμα 2

- Τα βιομηχανικά απόβλητα που ρίχνονται στα ποτάμια απορροφούν το διαλυμένο στο νερό οξυγόνο με συνέπεια αυτό να μειώνεται και όταν η μέση τιμή του δεν υπερβαίνει τα 5 ppm, να δημιουργείται σοβαρό πρόβλημα επιβίωσης των υδρόβιων οργανισμών
- Το πρόβλημα αυτό είχε διαπιστωθεί πριν από αρκετά χρόνια και στον ποταμό Καλαμά
- Για την αντιμετώπισή του εφαρμόστηκε ειδικό πρόγραμμα αποκατάστασης και προστασίας του ποταμού
- Ένας φοιτητής στο πλαίσιο της πτυχιακής του εργασίας που είχε ως σκοπό να διερευνήσει αν απέδωσαν τα μέτρα προστασίας, έπρεπε μεταξύ άλλων δεικτών, να μελετήσει την ποσότητα διαλυμένου οξυγόνου που υπάρχει στα νερά του ποταμού
- Για το σκοπό αυτό, πήρε με βάση κατάλληλο σχέδιο τυχαίας δειγματοληψίας, μετρήσεις από 10 σημεία της κοίτης του ποταμού
- Οι 10 μετρήσεις έδωσαν τις εξής τιμές διαλυμένου οξυγόνου σε ppm: 5, 5.1, 5.2, 5.1, 4.9, 5.3, 5, 5.2, 5.1, 5.1
- Με βάση αυτά τα δεδομένα, μπορεί ο φοιτητής να συμπεράνει ότι στον ποταμό Καλαμά η μέση ποσότητα διαλυμένου οξυγόνου είναι πλέον μεγαλύτερη από 5 ppm;

v	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576