Στατιστική Επιχειρήσεων Ι

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Παράμετροι τυχαίας μεταβλητής

1. Παράμετροι θέσης ή κεντρικής τάσης
   - Δίνουν πληροφορίες για τη θέση της κατανομής της τ.μ.
2. Παράμετροι μεταβλητότητας / διασποράς
   - Δίνουν πληροφορίες για τη μεταβλητότητά της
3. Παράμετροι λοξότητας και κύρτωσης
   - Δίνουν πληροφορίες για τη μορφή της

Παράμετροι θέσης διακριτής τ.μ.

1. Μέση τιμή (αναμενόμενη τιμή)
   $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) = \sum_{x \in R_x} \boldsymbol{x f(x)}$
2. p-ποσοστιαίο σημείο, x_p, $0 < p < 1$

$P(X < x_p) \leq p \leq P(X \leq x_p)$

ή $F(X_{p-}) \leq p \leq F(X_p)$

3. Διάμεσος: $\boldsymbol{\delta = x_{0,5}}$
4. 1ο, 2ο και 3ο τεταρτημόριο:
   $\boldsymbol{x_{0,25}}$, $\boldsymbol{x_{0,5}}$, $\boldsymbol{x_{0,75}}$

Μέση τιμή συνάρτησης διακριτής τ.μ.

- Μέση τιμή

$$\mu = \mathrm{E}[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) f(x)$$

Παράδειγμα 1ο

- Με ένα φίλο μας παίζουμε το εξής παιχνίδι.
- Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά και αν η ένδειξη είναι 5 ή 6 μας δίνει ο φίλος μας 10€, ενώ αν έρθει άλλη ένδειξη δίνουμε στο φίλο μας 5€
- Δείξτε ότι πρόκειται για ένα **δίκαιο** τυχερό παιχνίδι
- Σημείωση:
  - Ένα τυχερό παιχνίδι ονομάζεται δίκαιο αν το αναμενόμενο κέρδος του είναι μηδέν, δηλαδή αν μετά από πολλές επαναλήψεις του παιχνιδιού κανένας από τους παίκτες δε χάνει ούτε κερδίζει

Γραμμικότητα μέσης τιμής

- $E(\alpha X+\beta) = \alpha E(X) + \beta$

Μέση τιμή γραμμικού συνδυασμού διακριτών τ.μ.

- $E(X_1 + X_2 + \ldots + X_k) = E(X_1)+E(X_2) +\ldots+ E(X_k)$
- $E(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_kX_k) =$

$a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \ldots + a_kE(X_k)$

- $E[a_1g_1(X) + a_2g_2(X) + \ldots + a_kg_k(X)] =$

$a_1E[g_1(X)] + a_2E[g_2(X)] + \ldots + a_kE[g_2(X)]$

Παράμετροι διασποράς διακριτής τ.μ.

- Διακύμανση

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i-\mu)^2 f(x_i)}$$

- Τυπική απόκλιση

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της διακύμανσης

- $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$

- Επομένως ισχύει ότι
  - $E(X^2) \geq [E(X)]^2$

Διακύμανση και τυπική απόκλιση γραμμικού συνδυασμού διακριτών τ.μ.

- ${\sigma^2}_{aX+\beta} = Var(aX+\beta) = \boldsymbol{\alpha^2}\mathbf{Var}(\boldsymbol{X})$
- $\sigma_{aX+\beta} = |\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}}$
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ανεξάρτητες τ.μ. τότε

$$Var(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k) = a_1^2Var(X_1) + a_2^2Var(X_2) + \ldots + a_k^2Var(X_k)$$

Παράδειγμα 2ο

- Ο αριθμός των προϊόντων που πουλάει μια επιχείρηση σε διάστημα μιας εβδομάδας είναι διακριτή τ.μ., έστω X, με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0{,}1 & x = 0 \\ 0{,}2 & x = 1 \\ 0{,}6 & x = 2 \\ 0{,}1 & x = 3 \end{cases}$$

- Έστω ότι το κέρδος από την πώληση ενός προϊόντος είναι 200€ και ότι τα πάγια εβδομαδιαία έξοδα της επιχείρησης είναι 100€
- Πόσο είναι το αναμενόμενο εβδομαδιαίο κέρδος της επιχείρησης; (2 τρόποι υπολογισμού)
- Υπολογίστε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση

Ομοιόμορφη κατανομή διακριτής τ.μ.

- $f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & x = x_1, x_2, \dots, x_N \\ 0, & x \neq x_1, x_2, \dots, x_N \end{cases}$

(οι δυνατές τιμές είναι ισοπίθανες)

- $\mu = E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{\mathrm{N}}$
- $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}{N} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}\right)^2$

Η ανισότητα Chebyshev (1)

- Αν X μια τ.μ. μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2, τότε για κάθε $c > 0$, ισχύει ότι:

$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

- Δίνει ένα πάνω φράγμα για την πιθανότητα $P(|X-\mu| \geq c)$

Η ανισότητα Chebyshev (2)

- Αν θέσουμε c = kσ η ανισότητα Chebyshev γίνεται:

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 k^2} = \frac{1}{k^2}$$

- ή ισοδύναμα

$$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow$$

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Η ανισότητα Chebyshev (3)

- Έτσι, για οποιαδήποτε τ.μ. *X*, όποια κατανομή κι αν έχει, η πιθανότητα να πάρει τιμή στο διάστημα:
  - (μ – 2σ, μ + 2σ) είναι τουλάχιστον $1 - \frac{1}{2^2} = 0.75$
  - (μ – 2.5σ, μ + 2.5σ) είναι τουλάχιστον $1 - \frac{1}{2.5^2} = 0.84$
  - (μ – 3σ, μ + 3σ) είναι τουλάχιστον $1 - \frac{1}{3^2} = 0.89$

Ενδοτεταρτημοριακό πλάτος ή εύρος διακριτής τ.μ.

- Ονομάζεται η διαφορά $x_{0.75} - x_{0.25}$
- Εκφράζει το πλάτος ενός κεντρικού (γύρω από τη διάμεσο) διαστήματος εντός του οποίου βρίσκεται το 50% της κατανομής

Ημιενδοτεταρτημοριακό εύρος διακριτής τ.μ.

- Είναι ίσο με $\frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{2}$
- Ονομάζεται και τεταρτημοριακή απόκλιση

Ροπές και παράμετροι λοξότητας και κύρτωσης διακριτής τ.μ.

- Ροπή *r* τάξης γύρω από το 0:
$$\mu'_r = E(X^r), r = 1,2, \ldots$$
- Κεντρική ροπή *r* τάξης:
$$\mu_r = E[(X-\mu)^r], r = 1,2, \ldots$$
- Παραγοντική ροπή *r* τάξης:
$$\mu_{(r)} = E[X(X-1)\ldots(X-r+1)], r = 1,2 \ldots$$

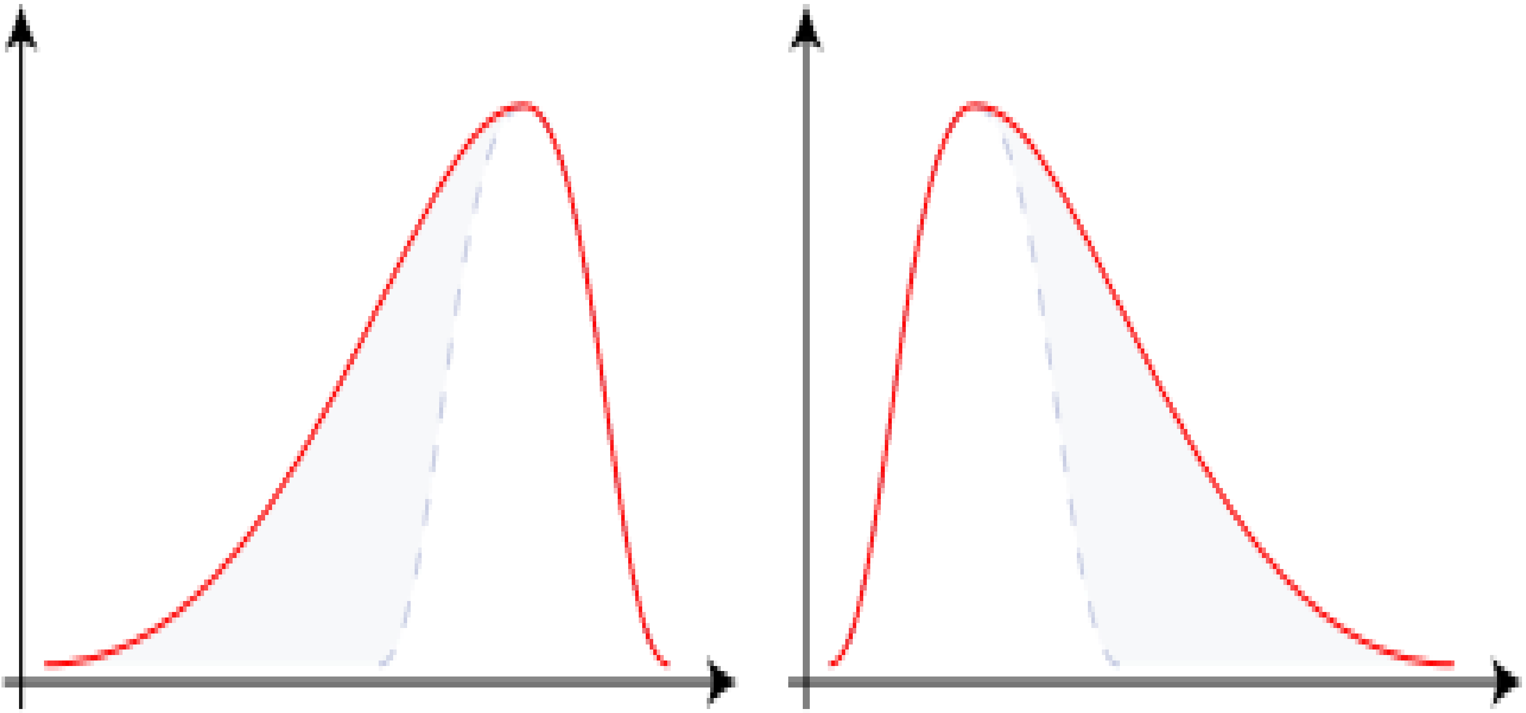
Μέτρα λοξότητας και κύρτωσης διακριτής τ.μ. (1)

- Συντελεστής λοξότητας:

$$\beta = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}}$$

- $\beta = 0 \rightarrow$ συμμετρική κατανομή
- $\beta > 0 \rightarrow$ κατανομή με θετική συμμετρία (λοξή προς τα δεξιά)
- $\beta < 0 \rightarrow$ κατανομή με αρνητική συμμετρία (λοξή προς τα αριστερά)

Μέτρα λοξότητας και κύρτωσης διακριτής τ.μ. (2)



Αρνητική λοξότητα **Θετική λοξότητα**

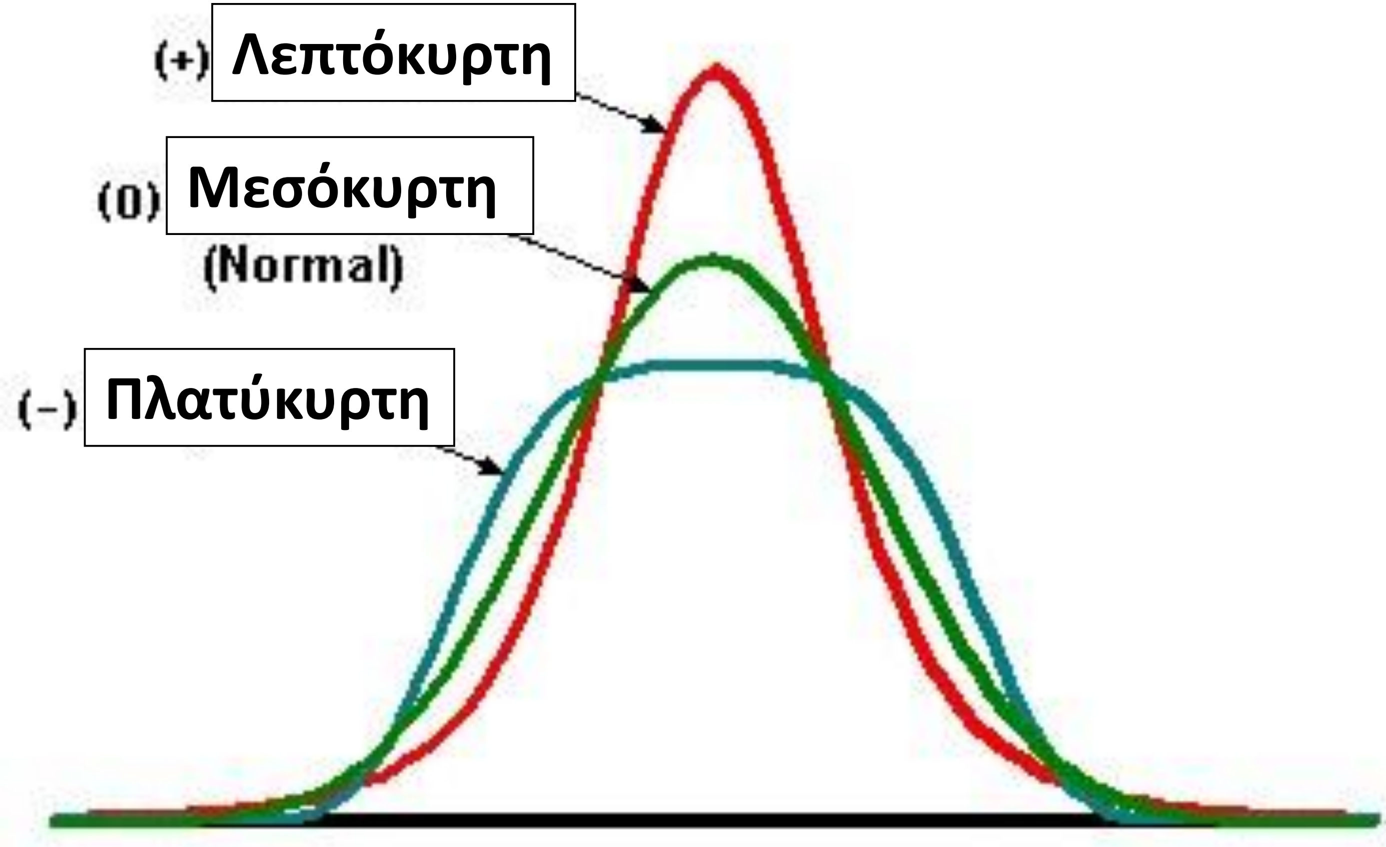
Μέτρα λοξότητας και κύρτωσης διακριτής τ.μ. (3)

- Συντελεστής κυρτότητας:

$$\gamma = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

- γ =3 → μεσόκυρτη κατανομή
- $\gamma > 3$ → λεπτόκυρτη κατανομή
- $\gamma < 3$ → πλατύκυρτη κατανομή

Μέτρα λοξότητας και κύρτωσης διακριτής τ.μ. (3)



Παράδειγμα 3ο

- Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με $E(X) = \mu$ και $Var(X) = \sigma^2$
- Δείξτε ότι η τ.μ. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση ίση με 1
- Η Z ονομάζεται τυποποιημένη τ.μ.