

Στατιστική II

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων και Τροφίμων,
Πανεπιστήμιο Πατρών



Διάλεξη 8η

- Έλεγχος t για ένα δείγμα
 - Κατανομή δειγματοληψίας του t
 - Έλεγχος t
 - Εκτίμηση του τυπικού σφάλματος
 - Διαστήματα εμπιστοσύνης



13^ο κεφάλαιο

Κίνητρο

- Στις περιπτώσεις που η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι άγνωστη δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο z
- Απαιτείται η εκτίμηση της άγνωστης τυπικής απόκλισης και ο έλεγχος t

Παράδειγμα

Home > ... > Δικαιώματα των καταναλωτών και καταγγελίες > Επιβολή της νομοθεσίας για την προσ

Dieselgate

Volkswagen

Μετά το σκάνδαλο «Dieselgate», οι αρχές του δικτύου συνεργασίας για την προστασία των καταναλωτών (CPC) απέστειλαν επιστολή στον όμιλο Volkswagen, στις 7 Σεπτεμβρίου 2017, καλώντας τον να επισκευάσει άμεσα όλα τα εμπλεκόμενα αυτοκίνητα. Τον Δεκέμβριο του 2017 η Volkswagen δεσμεύτηκε να συνεχίσει να προσφέρει δωρεάν επισκευές κατά τη διάρκεια του 2018.

- Αυστηρές ποινές για τις εκπομπές καυσαερίων
- Οδηγία σχετικά με τα μίλια-ανά-γαλόνι (mpg) ως προς την κατανάλωση καυσίμου
- Κάτω όριο τα 45 mpg
- Πρακτικά αδύνατο να ελεγχθούν όλα τα αυτοκίνητα (συνήθως μετράμε την κατανάλωση σε ένα μικρό δείγμα ανά μοντέλο, έστω 6 αυτοκίνητα)
- Ζητάμε να εξάγουμε συμπέρασμα ώστε να επιβληθεί πρόστιμο ή όχι στην αυτοκινητοβιομηχανία



Παράδειγμα



- Διατύπωση στην μορφή ελέγχου υποθέσεων:

$$H_0: \mu \geq 45 \text{ και}$$

$$H_1: \mu < 45$$

- Πιθανά σφάλματα:

Μπορώ να το λύσω
με έλεγχο z;

Τι εγώ
πιστεύω

Απόφαση	Κατάσταση του H_0	
	Αληθής H_0	Ψευδής H_0
Διατήρηση του H_0	1) Σωστή απόφαση	3) Σφάλμα τύπου II (αστοχία)
Απόρριψη του H_0	2) Σφάλμα τύπου I (εσφαλμένος συναγερμός)	4) Σωστή απόφαση

Επίπεδο σημαντικότητας 0.01

Κατανομή δειγματοληψίας του t

- Αναπαριστά την κατανομή που θα παίρναμε αν μια τιμή του t υπολογίζονταν για κάθε δειγματικό μέσο για όλα τα πιθανά τυχαία δείγματα (δεδομένου μεγέθους ενός πλυθισμού)
- Η κατανομή αυτή έχει ως παράμετρο έναν θετικό ακέραιο αριθμό που καλείται βαθμός ελευθερίας (df , degree of freedom)
- Η διαισθητική ερμηνεία του df είναι ότι αναπαριστά τον αριθμό των πραγματικά ελευθέρων μεταβλητών του προβλήματος
- Στην εκτίμηση της άγνωστης μεταβλητότητας του πληθυσμού, κάνουμε χρήση της τετραγωνικής απόκλισης από τον δειγματικό μέσο οπότε «χάνεται» ένας df
- Οπότε για δείγμα μεγέθους n , $df=n-1$

Παράδειγμα $df=n-1$

4 μετρήσεις είναι
ικανές να δώσουν και
την 5^η

Λόγω της σχέσης

WHEN μ IS UNKNOWN

$(\bar{X} = 3)$

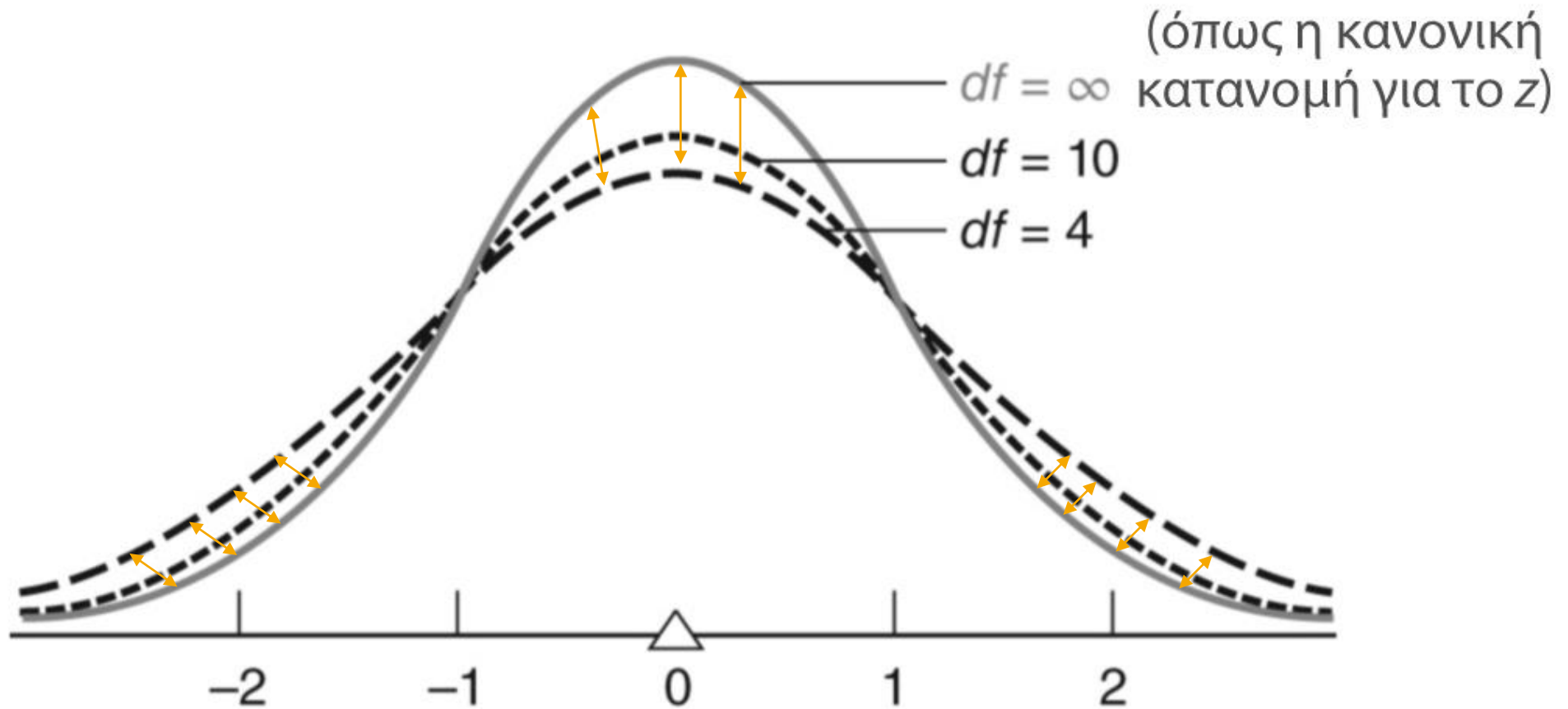
X	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$
7	$7 - 3 = 4$	16
3	$3 - 3 = 0$	0
1	$1 - 3 = -2$	4
0	$0 - 3 = -3$	9
4	$4 - 3 = 1$	1
$\Sigma(X - \bar{X}) = 0$		$\Sigma(X - \bar{X})^2 = 30$
$df = n - 1 = 5 - 1 = 4$		
$s^2(df = n - 1) = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n - 1} = \frac{30}{4} = 7.50$		

WHEN μ IS KNOWN

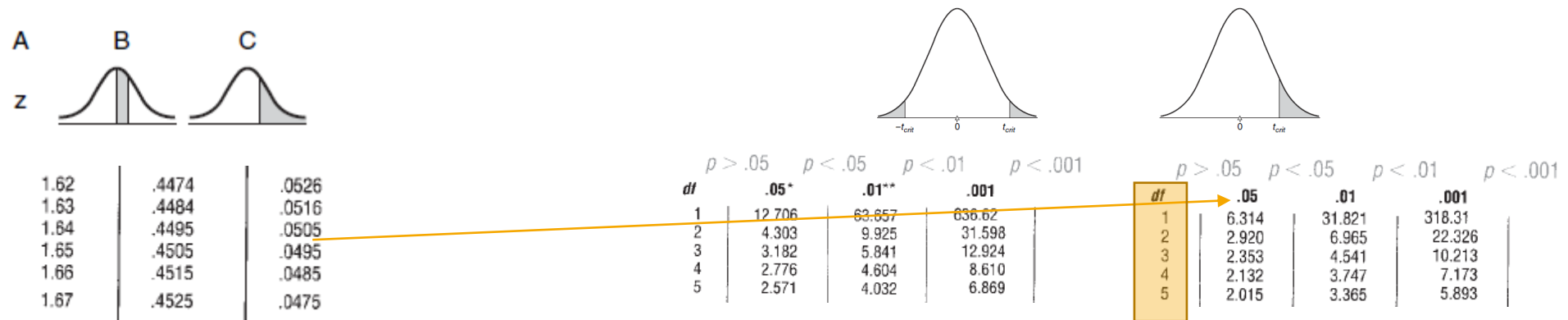
$(\mu = 2)$

X	$X - \mu$	$(X - \mu)^2$
7	$7 - 2 = 5$	25
3	$3 - 2 = 1$	1
1	$1 - 2 = -1$	1
0	$0 - 2 = -2$	4
4	$4 - 2 = 2$	4
$\Sigma(X - \mu) = 5$		$\Sigma(X - \mu)^2 = 35$
$df = n = 5$		
$s^2(df = n) = \frac{\Sigma(X - \mu)^2}{n} = \frac{35}{5} = 7.00$		

Σύγκριση με την τυποποιημένη κανονική κατανομή



Σύγκριση με την τυποποιημένη κανονική κατανομή



Αν δεν μπορούμε να βρούμε στους πίνακες το *df* που μας ενδιαφέρει, τότε χρησιμοποιούμε τον αμέσως μικρότερο αριθμό του πίνακα.

Διαφορετικές τιμές για βαθμούς ελευθερίας

Παραδείγματα

- Να βρεθούν οι κρίσιμες τιμές βάσει της κατανομής t , για τους στατιστικούς ελέγχους αποφάσεων:

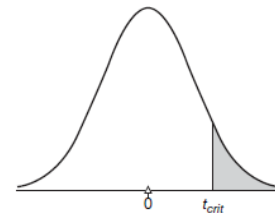
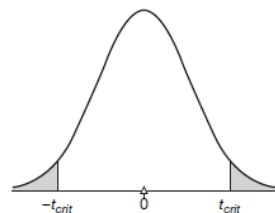
(α) αμφίπλευρος, $\alpha=0.05$, $df=12$

(β) μονόπλευρος αριστερής πλευράς, $\alpha=0.01$, $df=19$

(γ) μονόπλευρος δεξιάς πλευράς, $\alpha=0.05$, $df=38$

(δ) αμφίπλευρος, $\alpha=0.01$, $df=48$

Παραδείγματα



	$p > .05$	$p < .05$	$p < .01$	$p < .001$		$p > .05$	$p < .05$	$p < .01$	$p < .001$
df	.05*	.01**	.001		df	.05	.01	.001	
1	12.706	63.657	636.62		1	6.314	31.821	318.31	
2	4.303	9.925	31.598		2	2.920	6.965	22.326	
3	3.182	5.841	12.924		3	2.353	4.541	10.213	
4	2.776	4.604	8.610		4	2.132	3.747	7.173	
5	2.571	4.032	6.869		5	2.015	3.365	5.893	
6	2.447	3.707	5.959		6	1.943	3.143	5.208	
7	2.365	3.499	5.408		7	1.895	2.998	4.785	
8	2.306	3.355	5.041		8	1.860	2.896	4.501	
9	2.262	3.250	4.781		9	1.833	2.821	4.297	
10	2.228	3.169	4.587		10	1.812	2.764	4.144	
11	2.201	3.106	4.437		11	1.796	2.718	4.025	
12	2.179	3.055	4.318		12	1.782	2.681	3.930	
13	2.160	3.012	4.221		13	1.771	2.650	3.852	
14	2.145	2.977	4.140		14	1.761	2.624	3.787	
15	2.131	2.947	4.073		15	1.753	2.602	3.733	
16	2.120	2.921	4.015		16	1.746	2.583	3.686	
17	2.110	2.898	3.965		17	1.740	2.567	3.646	
18	2.101	2.878	3.922		18	1.734	2.552	3.610	
19	2.093	2.861	3.883		19	1.729	2.539	3.579	
20	2.086	2.845	3.850		20	1.725	2.528	3.552	
21	2.080	2.831	3.819		21	1.721	2.518	3.527	
22	2.074	2.819	3.792		22	1.717	2.508	3.505	
23	2.069	2.807	3.767		23	1.714	2.500	3.485	
24	2.064	2.797	3.745		24	1.711	2.492	3.467	
25	2.060	2.787	3.725		25	1.708	2.485	3.450	
26	2.056	2.779	3.707		26	1.706	2.479	3.435	
27	2.052	2.771	3.690		27	1.703	2.473	3.421	
28	2.048	2.763	3.674		28	1.701	2.467	3.408	
29	2.045	2.756	3.659		29	1.699	2.462	3.396	
30	2.042	2.750	3.646		30	1.697	2.457	3.385	
40	2.021	2.704	3.551		40	1.684	2.423	3.307	
60	2.000	2.660	3.460		60	1.671	2.390	3.232	
120	1.980	2.617	3.373		120	1.658	2.358	3.160	
∞	1.960	2.576	3.291		∞	1.645	2.326	3.090	

(α) αμφίπλευρος, $\alpha=0.05$, $df=12$

± 2.179

(β) μονόπλευρος αριστερής πλευράς,
 $\alpha=0.01$, $df=19$

2.539

(γ) μονόπλευρος δεξιάς πλευράς,
 $\alpha=0.05$, $df=38$

1.697

(δ) αμφίπλευρος, $\alpha=0.01$, $df=48$

± 2.704

Έλεγχος t

- Όταν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι άγνωστη, άρα και το τυπικό σφάλμα, τότε καταφεύγουμε στην εκτίμησή του $s_{\bar{X}}$
- Παρόμοια με τον έλεγχο z

$$t = \frac{\text{δειγματικός μέσος} - \text{υποθετικός μέσος πληθυσμού}}{\text{εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα}}$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{\text{υποθετικό}}}{s_{\bar{X}}}$$

Έλεγχος t

- Παρατηρούμε πως σε σχέση με τον έλεγχο z , η συνάρτηση κατανομής του t είναι περισσότερο διογκωμένη στις «ουρές» της
- Αυτό σημαίνει πως οι αντίστοιχες κρίσιμες τιμές απέχουν μεγαλύτερη απόσταση από την μέση τιμή
- Πχ για $\alpha=0.01$ ο μονόπλευρος αριστερός έλεγχος για το έλεγχο t έχει κρίσιμη τιμή -3.365 ενώ για τον έλεγχο z τιμή -2.33

Κοινό μοτίβο

- Γενικά στους ελέγχους υποθέσεων ακολουθούμε παρόμοιο τρόπο εργασίας:

Αν κάποιο παρατηρούμενο στατιστικό στοιχείο, πχ μέσος ενός τυχαίου δείγματος, θεωρείται σπάνιο με βάση την μηδενική υπόθεση, τότε απορρίπτουμε την H_0

Εκτίμηση του τυπικού σφάλματος

- Αν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι άγνωστη, την εκτιμούμε βάσει του δείγματος
- Η αλλαγή αυτή σε σχέση με τον έλεγχο z, επιφέρει μεγάλες αλλαγές στον έλεγχο υποθέσεων
- Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα:

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα του μέσου

$$s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{SS}{df}} \quad df = n - 1$$
$$SS = \sum (X - \bar{X})^2 = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}$$

Παράδειγμα



- Ελέγχουμε 10 συσκευασίες ως προς το βάρος τους σε ουγγίες
- Για το τυχαίο δείγμα λαμβάνουμε τις μετρήσεις:
16, 15, 14, 15, 14, 15, 16, 14, 14, 14
- Να υπολογίσετε
 - (α) τον μέσο
 - (β) το εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα του μέσου



Παράδειγμα

(α) $\bar{X} = \frac{147}{10} = 14.7$

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{SS}{df}} \quad df = n - 1$$

(β) Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα του μέσου

$$SS = \sum (X - \bar{X})^2 = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{2167 - \frac{21609}{10}}{10 - 1}} = \sqrt{\frac{6.10}{9}} = \sqrt{.68} = .82$$

$$s_{\bar{X}} = \frac{.82}{\sqrt{10}} = \frac{.82}{3.16} = .26$$

Παράδειγμα (συνέχεια)



- Αυστηρές ποινές για τις εκπομπές καυσαερίων
- Οδηγία σχετικά με τα μίλια-ανά-γαλόνι (mpg) ως προς την κατανάλωση καυσίμου
- Κάτω όριο τα 45 mpg
- Πρακτικά αδύνατο να ελεγχθούν όλα τα αυτοκίνητα (συνήθως μετράμε την κατανάλωση σε ένα μικρό δείγμα ανά μοντέλο, έστω 6 αυτοκίνητα)
- Ζητάμε να εξάγουμε συμπέρασμα ώστε να επιβληθεί πρόστιμο ή όχι στην αυτοκινητοβιομηχανία

Παράδειγμα



- Διατύπωση στην μορφή ελέγχου υποθέσεων:

$$H_0: \mu \geq 45 \text{ και}$$

$$H_1: \mu < 45$$

- Επίπεδο σημαντικότητας 0.01

Παράδειγμα



• Βήμα 1^ο

- Εκχώρηση τιμής στο n (1)
- Πρόσθεση όλων των αποτελεσμάτων X (2)
- Εύρεση του μέσου (3)
- Υπολογισμός τετραγώνων του X (4)
- Πρόσθεση όλων των τετραγώνων και των διαφορών (5-6)
- Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης του δείγματος s (7)

Παράδειγμα



• Βήμα 1°

- Εκχώρηση τιμής στο n (1)
- Πρόσθεση όλων των αποτελεσμάτων X (2)
- Εύρεση του μέσου (3)
- Υπολογισμός τετραγώνων του X (4)
- Πρόσθεση όλων των τετραγώνων και των διαφορών (5-6)
- Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης του δείγματος s (7)

Δεδομένα
του προβλήματος

X	X^2
40	1600
44	1936
46	2116
41	1681
43	1849
44	1936

$$1 \quad n = 6$$

$$2 \quad \Sigma X = 258$$

$$5 \quad \Sigma X^2 = 11118$$

$$3 \quad \bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{258}{6} = 43$$

$$6 \quad SS = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} = 11118 - \frac{(258)^2}{6} = 11118 - \frac{66564}{6} = 11118 - 11094 = 24$$

$$7 \quad s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{24}{6-1}} = \sqrt{4.8} = 2.19$$

Παράδειγμα



Βήμα 2^ο

- Υπολογισμός του εκτιμώμενου τυπικού σφάλματος του μέσου (8)

$$8 \quad s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2.19}{\sqrt{6}} = \frac{2.19}{2.45} = 0.89$$

Παράδειγμα



Βήμα 3^ο

- Εκχώρηση τιμής του υποθετικού μέσου του πληθυσμού (9)
- Υπολογισμός του t (10)

$$9 \quad \mu_{hyp} = 45$$

$$10 \quad t = \frac{\bar{X} - \mu_{hyp}}{s_{\bar{X}}} = \frac{43 - 45}{0.89} = \frac{-2}{0.89} = -2.25$$

Παράδειγμα

Δεδομένα του προβλήματος

X	X ²
40	1600
44	1936
46	2116
41	1681
43	1849
44	1936

Βήμα 1^ο

- Εκχώρηση τιμής στο n (1)
- Πρόσθεση όλων των αποτελεσμάτων X (2)
- Έκθεση του μέσου (3)
- Υπολογισμός τετραγώνων του X (4)
- Πρόσθεση όλων των τετραγώνων και των διαφορών (5-6)
- Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης του δείγματος (7)

1 n = 6 2 ΣX = 258 5 ΣX² = 11118

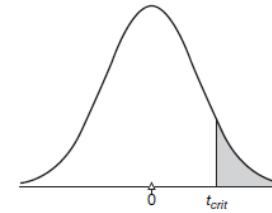
3 $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{258}{6} = 43$

6 $SS = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} = 11118 - \frac{(258)^2}{6} = 11118 - \frac{66564}{6} = 11118 - 11094 = 24$

7 $s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{24}{6-1}} = \sqrt{4.8} = 2.19$

21

Παράδειγμα



$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{hyp}}{s_{\bar{X}}} = \frac{43 - 45}{0.89} = \frac{-2}{0.89} = -2.25$$

df=5, $\alpha=0.01$

Μονόπλευρος αριστερής πλευράς:
κρίσιμη τιμή -3.365

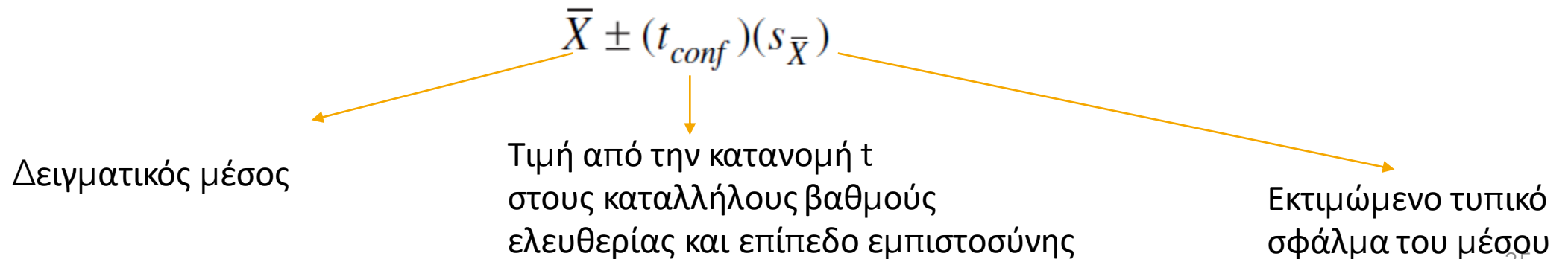


Δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0

	$\rho > .05$	$\rho < .05$	$\rho < .01$	$\rho < .001$
df	.05	.01	.001	
1	6.314	31.821	318.31	
2	2.920	6.965	22.326	
3	2.353	4.541	10.213	
4	2.132	3.747	7.173	
5	2.015	3.365	5.893	
6	1.943	3.143	5.208	
7	1.895	2.998	4.785	
8	1.860	2.896	4.501	
9	1.833	2.821	4.297	
10	1.812	2.764	4.144	
11	1.796	2.718	4.025	
12	1.782	2.681	3.930	
13	1.771	2.650	3.852	
14	1.761	2.624	3.787	
15	1.753	2.602	3.733	
16	1.746	2.583	3.686	
17	1.740	2.567	3.646	
18	1.734	2.552	3.610	
19	1.729	2.539	3.579	
20	1.725	2.528	3.552	
21	1.721	2.518	3.527	
22	1.717	2.508	3.505	
23	1.714	2.500	3.485	
24	1.711	2.492	3.467	
25	1.708	2.485	3.450	
26	1.706	2.479	3.435	
27	1.703	2.473	3.421	
28	1.701	2.467	3.408	
29	1.699	2.462	3.396	
30	1.697	2.457	3.385	
40	1.684	2.423	3.307	
60	1.671	2.390	3.232	
120	1.658	2.358	3.160	
∞	1.645	2.326	3.090	

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- Ο ισχυρισμός $\alpha\%$ βεβαιότητας (πχ $\alpha=95$) σημαίνει μπορούμε να είμαστε εύλογα βέβαιοι ότι ένα παρατηρούμενο ΔE περιλαμβάνει τον πραγματικό μέσο όταν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού δεν είναι γνωστή (αλλά κάνουμε χρήση του εκτιμώμενου τυπικού σφάλματος του μέσου)



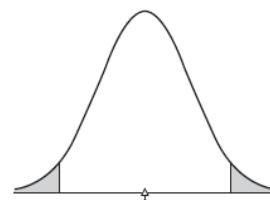
Παράδειγμα



- Να υπολογισθεί το ΔΕ του μέσου για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%

$$\bar{X} \pm (t_{conf})(s_{\bar{X}}) \longrightarrow s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2.19}{\sqrt{6}} = \frac{2.19}{2.45} = 0.89$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{258}{6} = 43$$



df	.05*	.01**	.001
1	12.706	63.657	636.62
2	4.303	9.925	31.598
3	3.182	5.841	12.924
4	2.776	4.604	8.610
5	2.571	4.032	6.869

$$43 \pm (2.571)(0.89) = 43 \pm 2.29 = \begin{cases} 45.29 \\ 40.71 \end{cases}$$

Παράδειγμα

Δεδομένα του προβλήματος

X	X ²
40	1600
44	1936
46	2116
41	1681
43	1849
44	1936

Βήμα 1*

- Εκτίμηση τιμής στο n (1)
- Πρόσθεση όλων των αποτελεσμάτων X (2)
- Έκταση του μέσου (3)
- Υπολογισμός τετραγώνων του X (4)
- Πρόσθεση όλων των τετραγώνων και των διαφορών (5-6)
- Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης του δείγματος (7)

1 n = 6 2 ΣX = 258 5 ΣX² = 11118

3 $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{258}{6} = 43$

6 $SS = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} = 11118 - \frac{(258)^2}{6} = 11118 - \frac{66564}{6} = 11118 - 11094 = 24$

7 $s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{24}{6-1}} = \sqrt{4.8} = 2.19$

Παράδειγμα



- Μακροπρόθεσμα, το 95% όλων των διαστημάτων όπως το υπολογισθέν, θα περιλαμβάνει τον άγνωστο μέσο του πληθυσμού
- Ο ισχυρισμός 95% βεβαιότητας σημαίνει πως μπορούμε να είμαστε εύλογα βέβαιοι ότι το παρατηρούμενο $\Delta E [40.71-45.29]$ περιλαμβάνει τον πραγματικό μέσο του πληθυσμού των αυτοκινήτων του συγκεκριμένου μοντέλου

Υποθέσεις/σχόλια σχετικά με το t

- Η τυπική απόκλιση είναι άγνωστη
- Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πληθυσμός κατανέμεται κανονικά
 - Και όταν ακόμη δεν ικανοποιείται η συνθήκη το t διατηρεί την ακρίβεια του όταν το δείγμα δεν είναι υπερβολικά μικρό
 - Για μικρά μεγέθη δείγματος (πχ < 10) εφόσον γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός είναι μη-κανονικός, προτείνεται η αύξηση του μεγέθους του δείγματος πριν υπολογίσουμε και χρησιμοποιήσουμε το t

Σύνδεσμοι σε online συγγράμματα

- <https://www.stat.cmu.edu/~hseltman/309/Book/chapter6.pdf>

Chapter 6

The t-test and Basic Inference Principles

The t-test is used as an example of the basic principles of statistical inference.

Σύνδεσμοι σε online video

- <https://www.youtube.com/watch?v=pTmLQvMM-1M>





R code

- `t.test(data)`