Στατιστική ΙΙ

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων,

Πανεπιστήμιο Πατρών

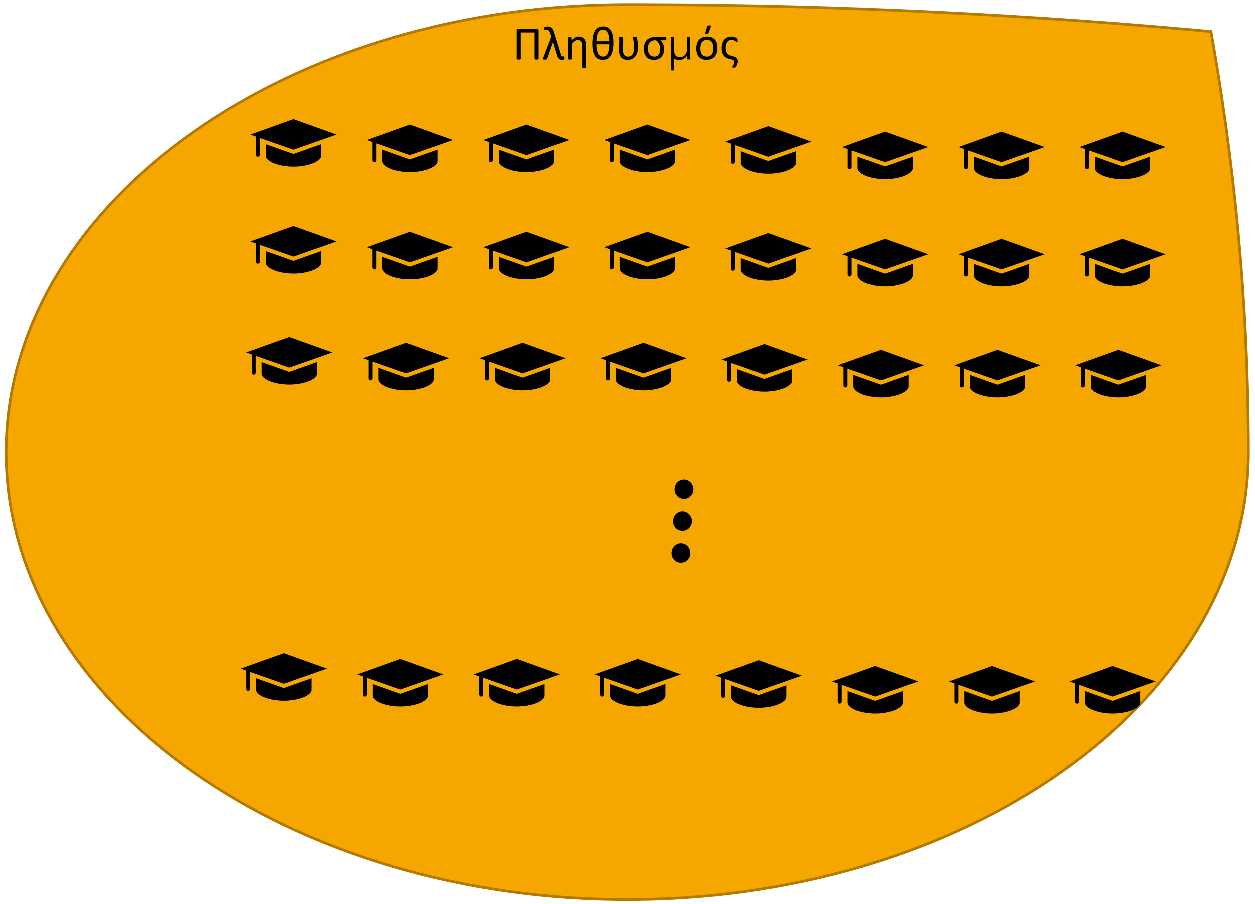
Ακαδημαϊκό έτος: 2020-2021

Διάλεξη 5η

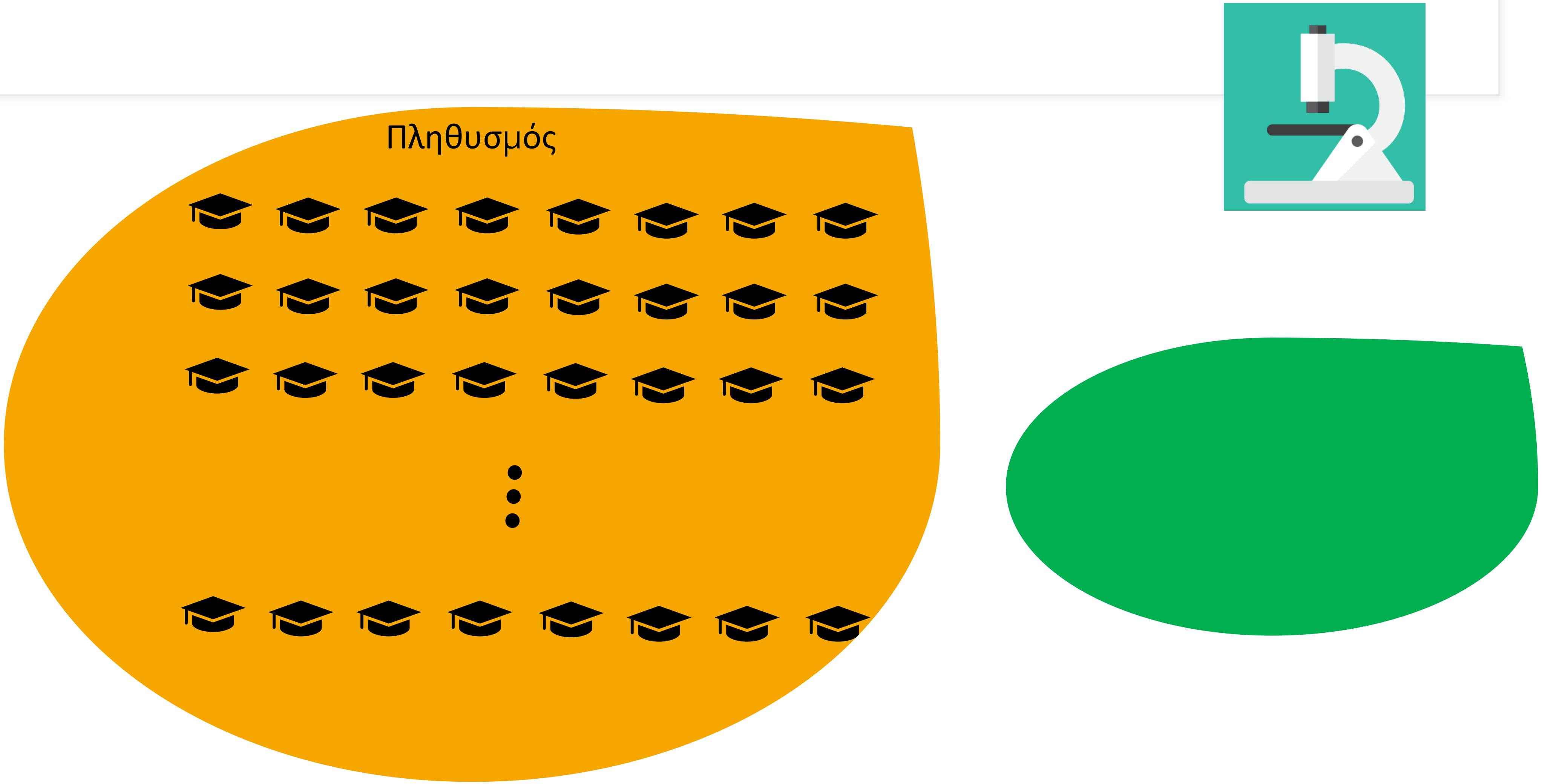
- Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων
- Μηδενικές και εναλλακτικές υποθέσεις
- Κανόνας απόφασης
- Ο έλεγχος z

10ο κεφάλαιο

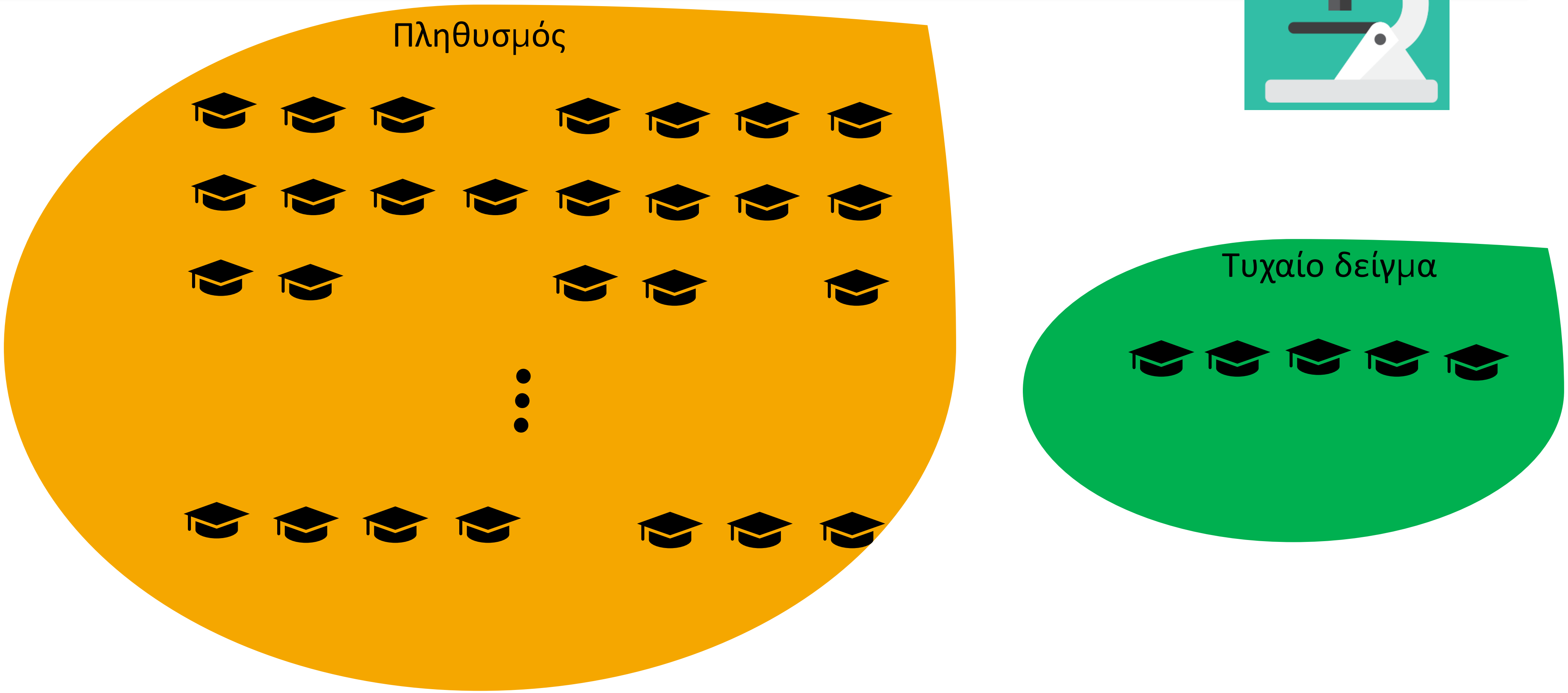
Βασική ιδέα



Βασική ιδέα

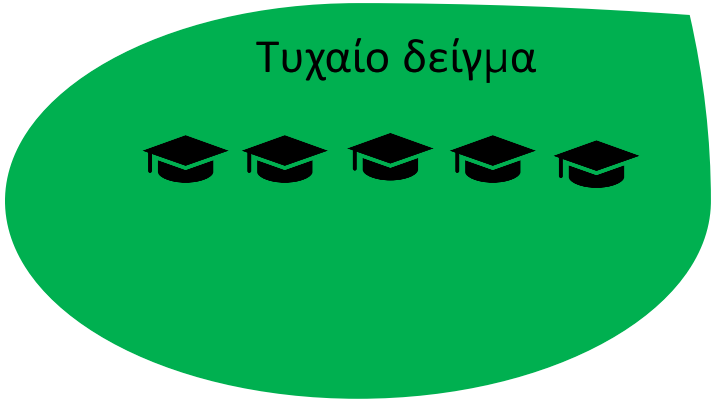


Βασική ιδέα



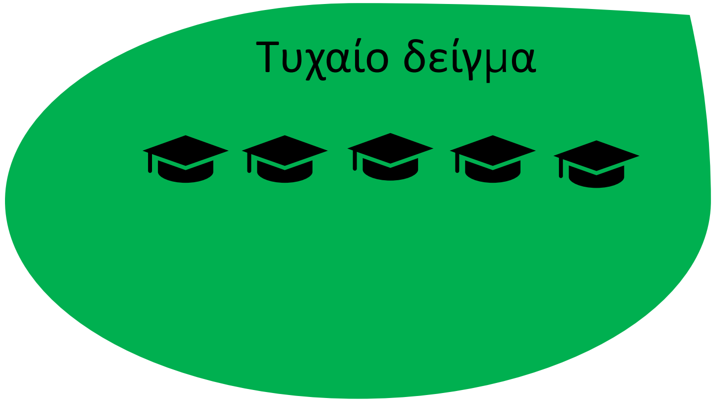
Βασική ιδέα

Βασική ιδέα



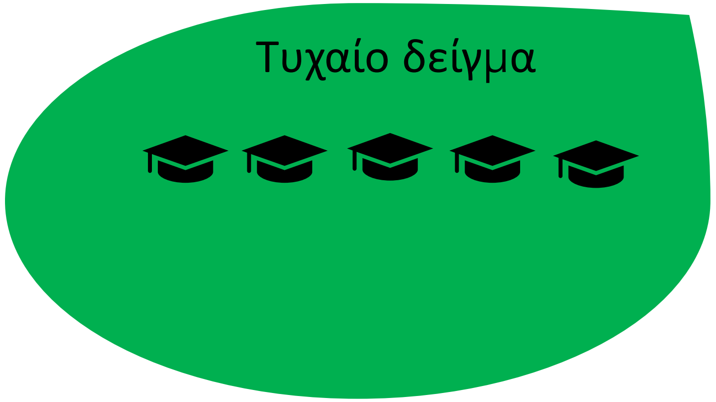
Τι μπορούμε να πούμε για τον πληθυσμός βασισμένοι στο δείγμα;

Βασική ιδέα



Πρέπει να λάβουμε υπόψη
τον ρόλο της τυχαιότητας
κατά την επιλογή του δείγματος

Βασική ιδέα



Η κατανομή της δειγματοληψίας θα είναι το σημείο αναφοράς

Παράδειγμα

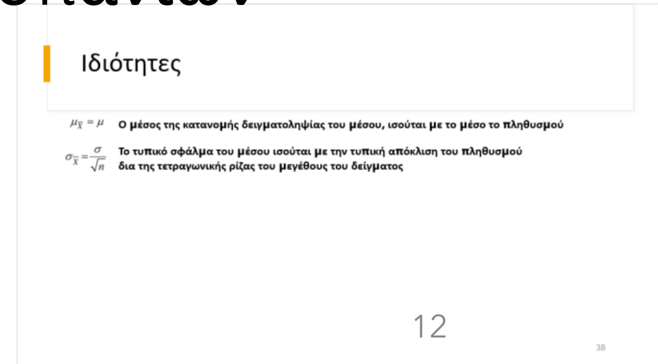
- Έστω ότι οι φοιτητές που λαμβάνουν μέρος στις εθνικές εξετάσεις έχουν μέσο 500 και τυπική απόκλιση 110 σε εθνικό επίπεδο.
- Σε τυχαίο δείγμα (τ.δ.) 100 τοπικών φοιτητών έχουν μέσο 533.
- Υπάρχει/συμβαίνει κάτι ιδιαίτερο στον τοπικό πληθυσμό σε σχέση με τον εθνικό;

Τρόπος εργασίας

- Καταρτίζουμε μια μηδενική υπόθεση: πχ οι τοπικοί φοιτητές δεν διαφέρουν από εκείνους σε εθνικό επίπεδο
- Η κατανομή δειγματοληψίας του μέσου για όλα τα πιθανά τυχαία δείγματα (πχ μεγέθους 100) αποτελεί το σημείο αναφοράς μας
- «Συγκρίνουμε» τον μέσο του δείγματος με την θέση του στην κατανομή δειγματοληψίας

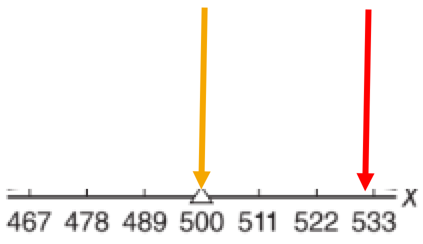
Σκεπτικό

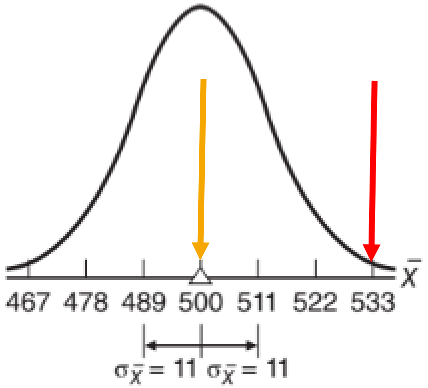
- Ο μέσος της κατανομής δειγματοληψίας του μέσου, ισούται με το μέσο το πληθυσμού
- Λαμβάνουμε υπόψη τον ρόλο του μεγέθους του δείγματος στην διακύμανση
- Αν το δείγμα «τοποθετείται» μεταξύ των εξαιρετικά σπάνιων τιμών λαμβάνουμε το κατάλληλο συμπέρασμα



Παράδειγμα

- Αν λαμβάναμε δείγματα μεγέθους 100 από τον εθνικό πληθυσμό η υποθετική κατανομή δειγματοληψίας θα ήταν





$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{110}{\sqrt{100}} = \frac{110}{10} = 11$$

(για καλύτερη απεικόνιση σημειώνουμε αποστάσεις με βάση το τυπικό σφάλμα του τοπικού δείγματος)

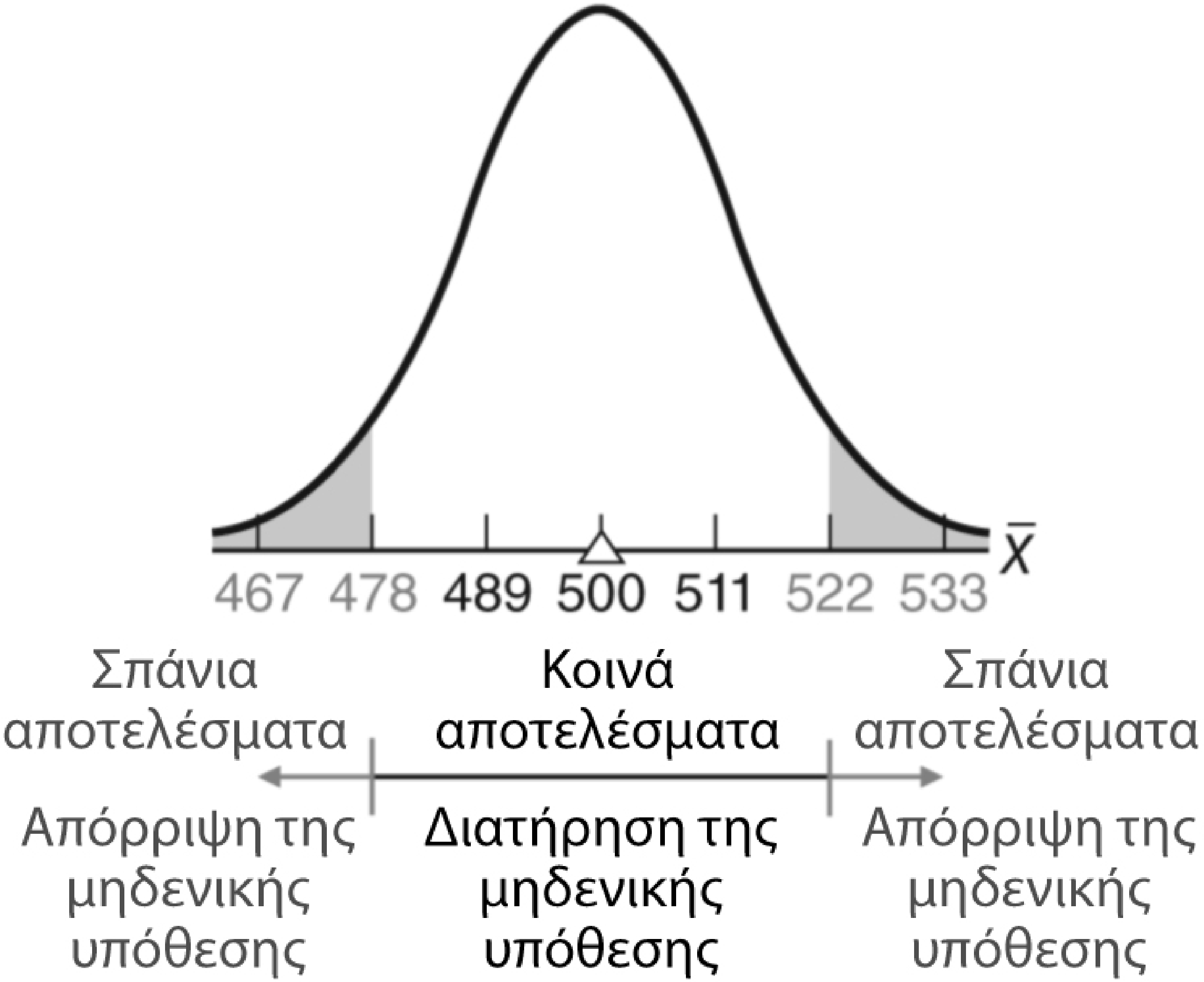
Κοινά αποτελέσματα

- Ένας παρατηρούμενος δειγματικός μέσος θεωρείται κοινό αποτέλεσμα αν δεν διαφέρει πολύ από τον μέσο της κατανομής δειγματοληψίας
- Υποδηλώνει έλλειψη απόδειξης ότι συμβαίνει κάτι ιδιαίτερο σε σχέση με το δείγμα του προς εξέταση πληθυσμού
- Ενδεχομένως η μικρή διαφορά είναι αποτέλεσμα της δειγματοληψίας

Σπάνια αποτελέσματα

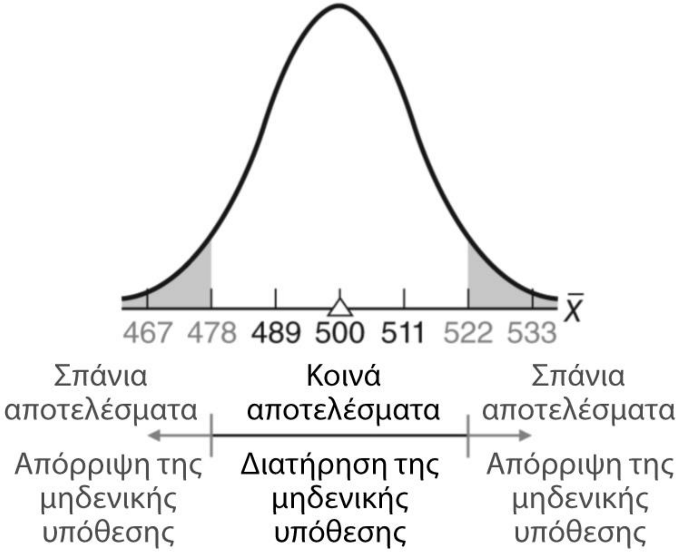
- Ένας παρατηρούμενος δειγματικός μέσος θεωρείται σπάνιο αποτέλεσμα αν διαφέρει σημαντικά από τον μέσο της κατανομής δειγματοληψίας
- Υποδηλώνει την ύπαρξη απόδειξης ότι συμβαίνει κάτι ιδιαίτερο σε σχέση με το δείγμα του προς εξέταση πληθυσμού

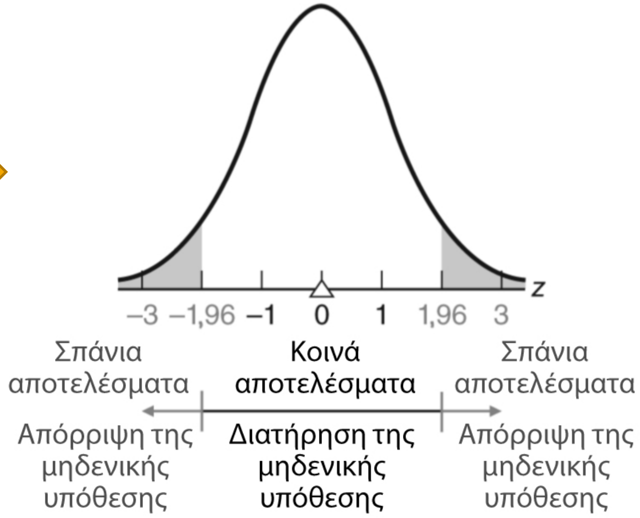
Τα όρια σχηματικά



Τυποποίηση της κατανομής δειγματοληψίας

- Για λόγους κοινής αντιμετώπισης μετατρέπουμε την κατανομή δειγματοληψίας σε τυποποιημένη μορφή



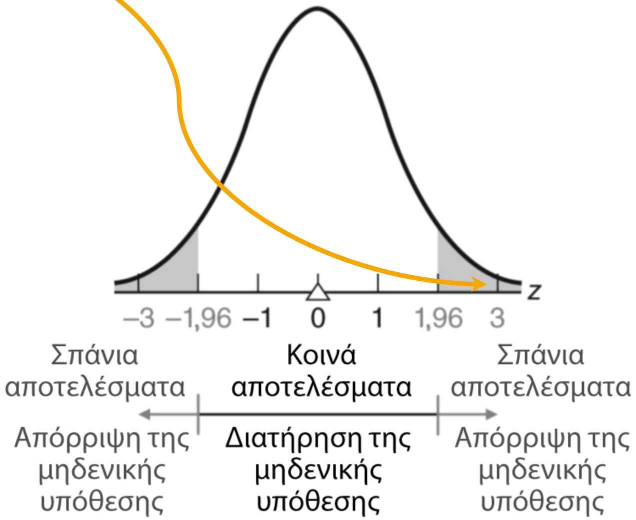


0.00	.0000	.5000	0.56	.2123	.2877	1.12	.3686	.1314
0.01	.0040	.4960	0.57	.2157	.2843	1.13	.3708	.1292
0.02	.0080	.4920	0.58	.2190	.2810	1.14	.3729	.1271
0.03	.0120	.4880	0.59	.2224	.2776	1.15	.3749	.1251
0.04	.0160	.4840	0.60	.2257	.2743	1.16	.3770	.1230
0.05	.0199	.4801	0.61	.2291	.2709	1.17	.3790	.1210
0.06	.0239	.4761	0.62	.2324	.2676	1.18	.3810	.1190
0.07	.0279	.4721	0.63	.2357	.2643	1.19	.3830	.1170
0.08	.0319	.4681	0.64	.2389	.2611	1.20	.3849	.1151
0.09	.0359	.4641	0.65	.2422	.2578	1.21	.3869	.1131
0.10	.0398	.4602	0.66	.2454	.2546	1.22	.3888	.1112
0.11	.0438	.4562	0.67	.2486	.2514	1.23	.3907	.1093
0.12	.0478	.4522	0.68	.2517	.2483	1.24	.3925	.1075
0.13	.0517	.4483	0.69	.2549	.2451	1.25	.3944	.1056
0.14	.0557	.4443	0.70	.2580	.2420	1.26	.3962	.1038
0.15	.0596	.4404	0.71	.2611	.2389	1.27	.3980	.1020
0.16	.0636	.4364	0.72	.2642	.2358	1.28	.3997	.1003
0.17	.0675	.4325	0.73	.2673	.2327	1.29	.4015	.0985
0.18	.0714	.4286	0.74	.2704	.2296	1.30	.4032	.0968
0.19	.0753	.4247	0.75	.2734	.2266	1.31	.4049	.0951
0.20	.0793	.4207	0.76	.2764	.2236	1.32	.4066	.0934
0.21	.0832	.4168	0.77	.2794	.2206	1.33	.4082	.0918
0.22	.0871	.4129	0.78	.2823	.2177	1.34	.4099	.0901
0.23	.0910	.4090	0.79	.2852	.2148	1.35	.4115	.0885
0.24	.0948	.4052	0.80	.2881	.2119	1.36	.4131	.0869
0.25	.0987	.4013	0.81	.2910	.2090	1.37	.4147	.0853
0.26	.1026	.3974	0.82	.2939	.2061	1.38	.4162	.0838
0.27	.1064	.3936	0.83	.2967	.2033	1.39	.4177	.0823
0.28	.1103	.3897	0.84	.2995	.2005	1.40	.4192	.0808
0.29	.1141	.3859	0.85	.3023	.1977	1.41	.4207	.0793
0.30	.1179	.3821	0.86	.3051	.1949	1.42	.4222	.0778
0.31	.1217	.3783	0.87	.3078	.1922	1.43	.4236	.0764
0.32	.1255	.3745	0.88	.3106	.1894	1.44	.4251	.0749
0.33	.1293	.3707	0.89	.3133	.1867	1.45	.4265	.0735
0.34	.1331	.3669	0.90	.3159	.1841	1.46	.4279	.0721
0.35	.1368	.3632	0.91	.3186	.1814	1.47	.4292	.0708
0.36	.1406	.3594	0.92	.3212	.1788	1.48	.4306	.0694
0.37	.1443	.3557	0.93	.3238	.1762	1.49	.4319	.0681
0.38	.1480	.3520	0.94	.3264	.1736	1.50	.4332	.0668
0.39	.1517	.3483	0.95	.3289	.1711	1.51	.4345	.0655
0.40	.1554	.3446	0.96	.3315	.1685	1.52	.4357	.0643
0.41	.1591	.3409	0.97	.3340	.1660	1.53	.4370	.0630
0.42	.1628	.3372	0.98	.3365	.1635	1.54	.4382	.0618
0.43	.1664	.3336	0.99	.3389	.1611	1.55	.4394	.0606
0.44	.1700	.3300	1.00	.3413	.1587	1.56	.4406	.0594
0.45	.1736	.3264	1.01	.3438	.1562	1.57	.4418	.0582
0.46	.1772	.3228	1.02	.3461	.1539	1.58	.4429	.0571
0.47	.1808	.3192	1.03	.3485	.1515	1.59	.4441	.0559
0.48	.1844	.3156	1.04	.3508	.1492	1.60	.4452	.0548
0.49	.1879	.3121	1.05	.3531	.1469	1.61	.4463	.0537
0.50	.1915	.3085	1.06	.3554	.1446	1.62	.4474	.0526
0.51	.1950	.3050	1.07	.3577	.1423	1.63	.4484	.0516
0.52	.1985	.3015	1.08	.3599	.1401	1.64	.4495	.0505
0.53	.2019	.2981	1.09	.3621	.1379	1.65	.4505	.0495
0.54	.2054	.2946	1.10	.3643	.1357	1.66	.4515	.0485
0.55	.2088	.2912	1.11	.3665	.1335	1.67	.4525	.0475

Μετατροπή δειγματικού μέσου σε συμβατή μορφή

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_{\text{hyp}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

$$z = \frac{533 - 500}{11} = \frac{33}{11} = 3$$



«Σιωπηρές» υποθέσεις

- Ο έλεγχος z (δηλαδή ο στατιστικός έλεγχος που εκτιμά πόσο αποκλίνει ο παρατηρούμενος δειγματικός μέσος σε μονάδες τυπικού σφάλματος σε σχέση με το την υποτιθέμενη κατανομή δειγματοληψίας του μέσου), είναι ακριβής όταν:
- Ο πληθυσμός κατανέμεται κανονικά ή το δείγμα είναι μεγάλο ώστε να εφαρμόζεται με ακρίβεια το κεντρικό οριακό θεώρημα
- Η τυπική απόκλιση του πληθυσμούς είναι γνωστή

Ερωτήσεις

• Υπολογίστε την τιμή του z-test για τις παρακάτω περιπτώσεις:

(a) $\bar{X} = 566; \sigma = 30; n = 36; \mu_{\text{hyp}} = 560$

(b) $\bar{X} = 24; \sigma = 4; n = 64; \mu_{\text{hyp}} = 25$

(c) $\bar{X} = 82; \sigma = 14; n = 49; \mu_{\text{hyp}} = 75$

(d) $\bar{X} = 136; \sigma = 15; n = 25; \mu_{\text{hyp}} = 146$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_{\text{hyp}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

$$z = \frac{533 - 500}{11} = \frac{33}{11} = 3$$

Ερωτήσεις

(a) $z = \frac{566 - 560}{30/\sqrt{36}} = \frac{6}{5} = 1.20$

(b) $z = \frac{24 - 25}{4/\sqrt{64}} = \frac{-1}{.5} = -2.00$

(c) $z = \frac{82 - 75}{14/\sqrt{49}} = \frac{7}{2} = 3.50$

(d) $z = \frac{136 - 146}{15/\sqrt{25}} = \frac{-10}{3} = -3.33$

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_{\text{hyp}}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

Η διαδικασία βήμα προς βήμα 1/5

Διατύπωση του προβλήματος σαν ερώτημα έρευνας

Πχ ο μέσος όρος των ντόπιων φοιτητών διαφέρει από τον εθνικό μέσο

Η διαδικασία βήμα προς βήμα 2/5

Διατύπωση στατιστικών υποθέσεων:
Μηδενική υπόθεση (null-hypothesis) H_0
Εναλλακτική υπόθεση (alternative-hypothesis) H_1

Πχ H_0: $\mu=500$ και H_1: $\mu\neq 500$

Η διαδικασία βήμα προς βήμα 2/5

- Η μηδενική υπόθεση H_0 είναι το σημείο εστίασης της ερευνάς
- Υποστηρίζει ότι τίποτα διαφορετικό/ιδιαίτερο δεν συμβαίνει με το προς εξέταση πληθυσμό
- Η H_0 κάνει μια ακριβής δήλωση για ένα χαρακτηριστικό του προς εξέταση πληθυσμού
- Πρέπει να είναι διατυπωμένος με τέτοιο τρόπο ώστε να απαντά στο αρχικό πρόβλημα (1/5) μέσω της εξέτασης αν ο δειγματικός μέσος προκύπτει όντως από την υποθετική κατανομής δειγματοληψίας

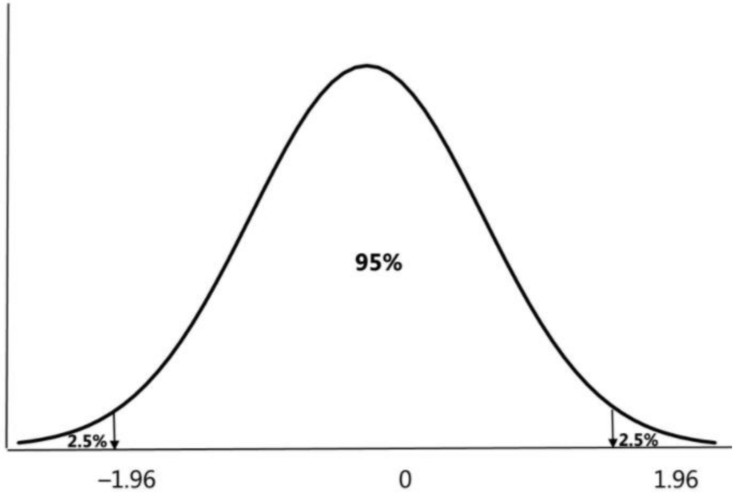
Η διαδικασία βήμα προς βήμα 2/5

- Η εναλλακτική υπόθεση υποστηρίζει το αντίθετο από το H_0
- Η H_1 είναι η υπόθεση εκείνη που συνήθως ελπίζει να απόδειξη η στατιστική έρευνα και ονομάζεται και «υπόθεση έρευνας»
- Μπορεί να λάβει 3 μορφές (επόμενες διαλέξεις)

Η διαδικασία βήμα προς βήμα 3/5

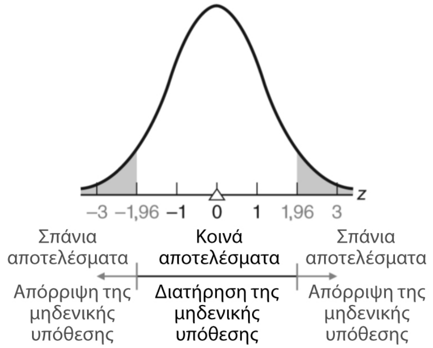
Διατύπωση του κανόνα απόφασης βασισμένη σε επίπεδο σημαντικότητας α.
Η τιμή του α καθορίζει το όριο για την z-τιμή

Πχ για επίπεδο σημαντικότητας α=0.05, κινούμαστε σε εύρος z≥1.96 και z≤1.96



Η διαδικασία βήμα προς βήμα 3/5

- Μέσω της τιμής του επιπέδου σημαντικότητας α, καθορίζουμε το πόσο ιδιαίτερο πρέπει να είναι το παρατηρούμενο δείγμα (δηλαδή τον βαθμό σπανιότητας του παρατηρούμενου αποτελέσματος)
- Η τιμή του α, μεταφράζεται σε «πιθανότητα σπανιότητας»
- Από την επιλογή του α, υπολογίζουμε τις κρίσιμες τιμές για την τιμή του z



Η διαδικασία βήμα προς βήμα 4/5

Κάνοντας χρήση του τύπου $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$, όπου σ είναι η τυπική απόκλιση του πληθυσμού και n το μέγεθος του δείγματος μετατρέοπουμε τον δειγματικού μέσο $\bar{X}$ σε z-μορφή

$$z = (\bar{X} - \mu)/\sigma_{\bar{X}}$$

Πχ για το δείγμα ντόπιων φοιτητών

$$\bar{X} = 533;\ \mu_{hyp} = 500;\ \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{110}{\sqrt{100}} = 11$$

$$z = \frac{533 - 500}{11} = 3$$

Η διαδικασία βήμα προς βήμα 5/5

Εφαρμόζουμε τον κανόνα απόφασης κάνοντας χρήση της z-τιμής και των ορίων βάσει του επιπέδου σημαντικότητας και απορρίπτουμε ή όχι την μηδενική υπόθεση.

Πχ για $z=3 \rightarrow z \geq 1.96 \rightarrow$ απορρίπτουμε το H_0

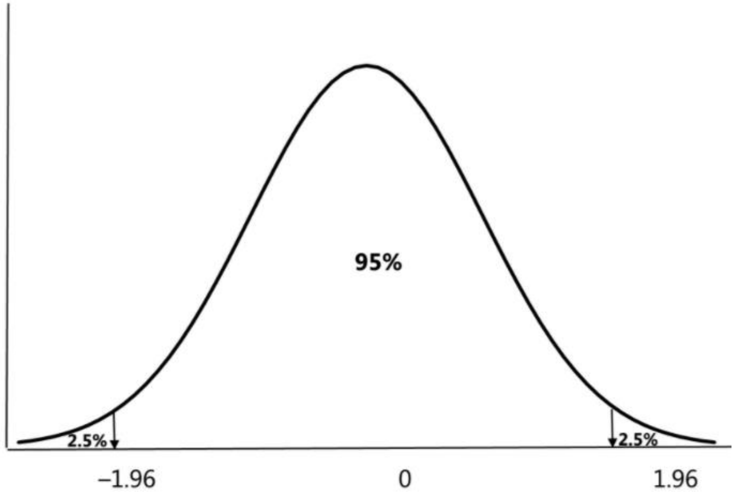
Η διαδικασία βήμα προς βήμα 5/5

- Αξιολογούμε την σπανιότητα των παρατηρήσεων
- Το κάνουμε ποσοτικά
- Στηριζόμαστε σε προ-αποφασισμένα κατώφλια (δηλ. τιμές του α)
- Γενική αρχή «με βάση την υποθετική κατανομή δειγματοληψίας διαπιστώνουμε πόσο κεντρικά-ακραία είναι η παρατήρησή μας»
- Για ευκολία τυποποιούμε την κατανομή και την παρατήρηση

Ερωτήσεις

- Τι θα πείτε για τη H_1 για έναν στατιστικό έλεγχο z με κρίσιμες τιμές ± 1.96
  - (a) $z=1.74$
  - (b) $z=0.13$
  - (z) $z=-2.51$

Ερωτήσεις

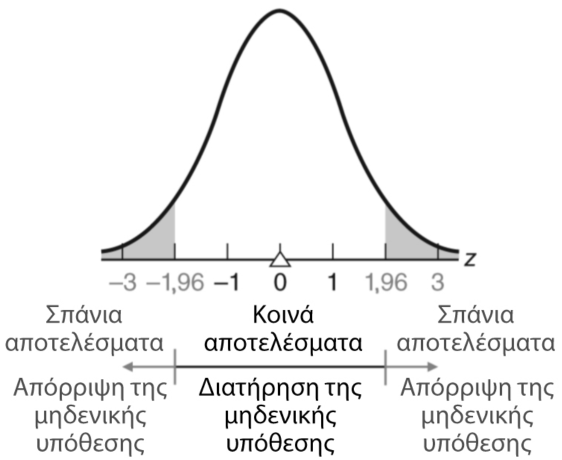


- Οι κρίσιμες τιμές ±1.96 αντιστοιχούν σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05

(a) Διατήρηση του H_0 γιατί για z=1.74 ισχύει -1.96≤z≤1.96

(b) Διατήρηση του H_0 γιατί για z= 0.13 ισχύει -1.96≤z≤1.96

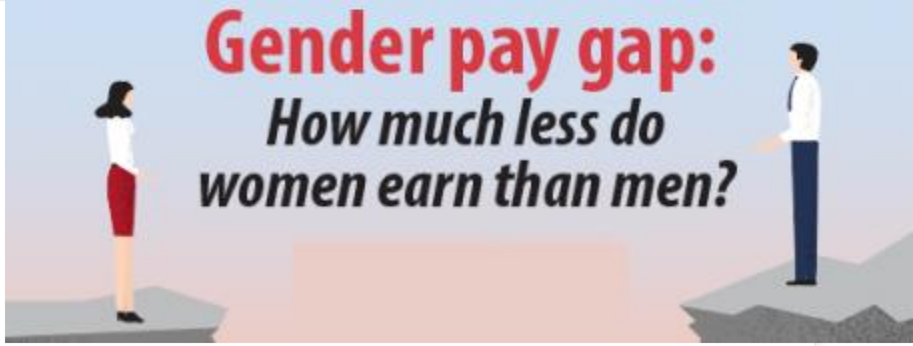
(c) Απόρριψη του H_0 γιατί για z=-2.51 ισχύει z≤-1.96



Ερμηνεία της απόφασης σε σχέση την αρχική ερώτηση

- Ανάλογα με την απόφαση ένα από τα παρακάτω συμβαίνουν:
  - Αν αποφασίσαμε να διατηρήσουμε την H_0 τότε η αρχική ερώτηση έρευνα (ανάλογα με την διατύπωσή της) λαμβάνει αρνητική απάντηση (πχ η παρακολούθηση κινουμένων σχεδίων μειώνει την επίδοση των μαθητών)
  - Αν αποφασίσαμε να απορρίψουμε την H_0, τότε συνήθως λαμβάνουμε θετική απάντηση στην αρχική ερώτηση (πχ ο μέσος των ντόπιων φοιτητών διαφέρει από τον εθνικό μέσο)
    - Ανάλογα με το ποιον τρόπο κάνουμε την απόρριψη (πχ. $z \leq -1.96$ ή $z \geq 1.96$) μπορούμε να αποφανθούμε αν ο μέσος είναι σπάνιος/ιδιαίτερος μικρός ή μεγάλος (πχ οι ντόπιοι φοιτητές έχουν υψηλότερη μέση βαθμολογία)

Ερωτήσεις



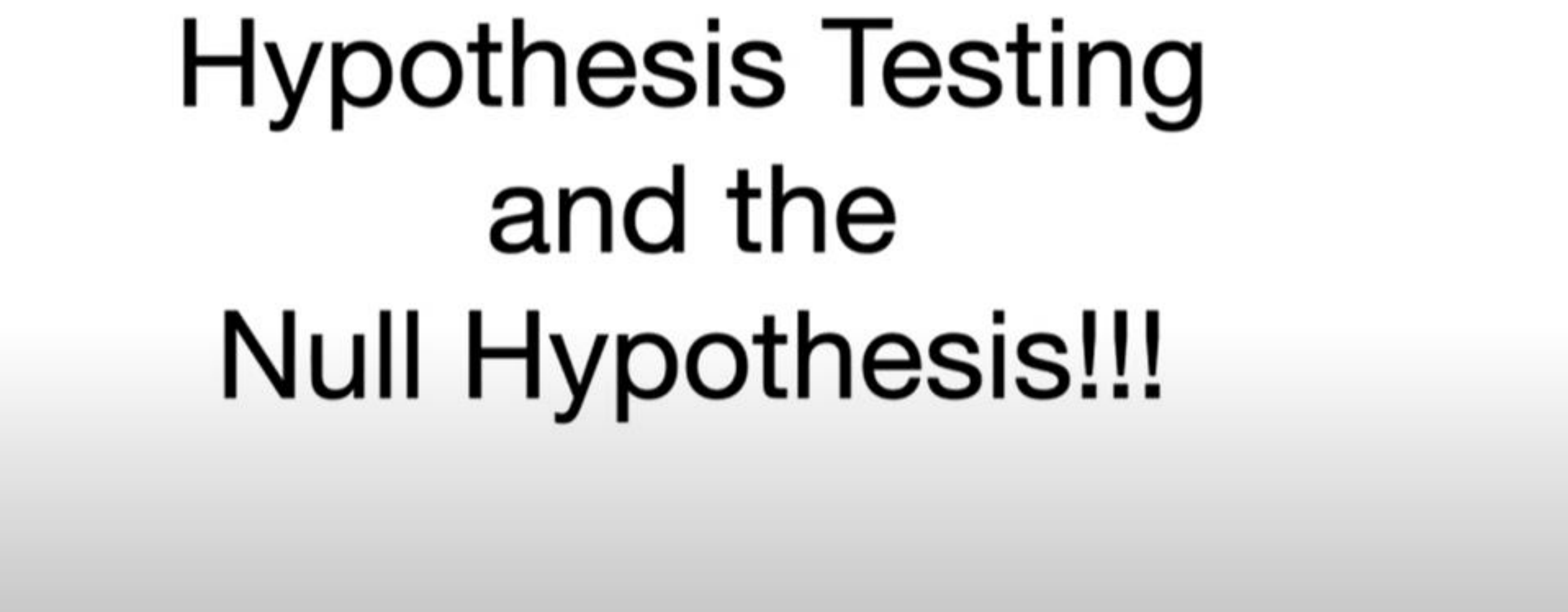
- Από μελέτη βρέθηκε ότι το μέσο ετήσιο εισόδημα των αποφοίτων είναι $82500 με τυπικό απόκλιση $6000.
- Έρευνα αν οι γυναίκες αμείβονται παρομοίως
- Είναι ο μέσος αυτός ίδιος για τις γυναίκες
- Ρωτήθηκαν 100 γυναίκες και ο μέσος μισθός βρέθηκε $80100

Συγγράμματα online (δωρεάν)

- http://courses.washington.edu/psy315/tutorials/z_test_tutorial.pdf

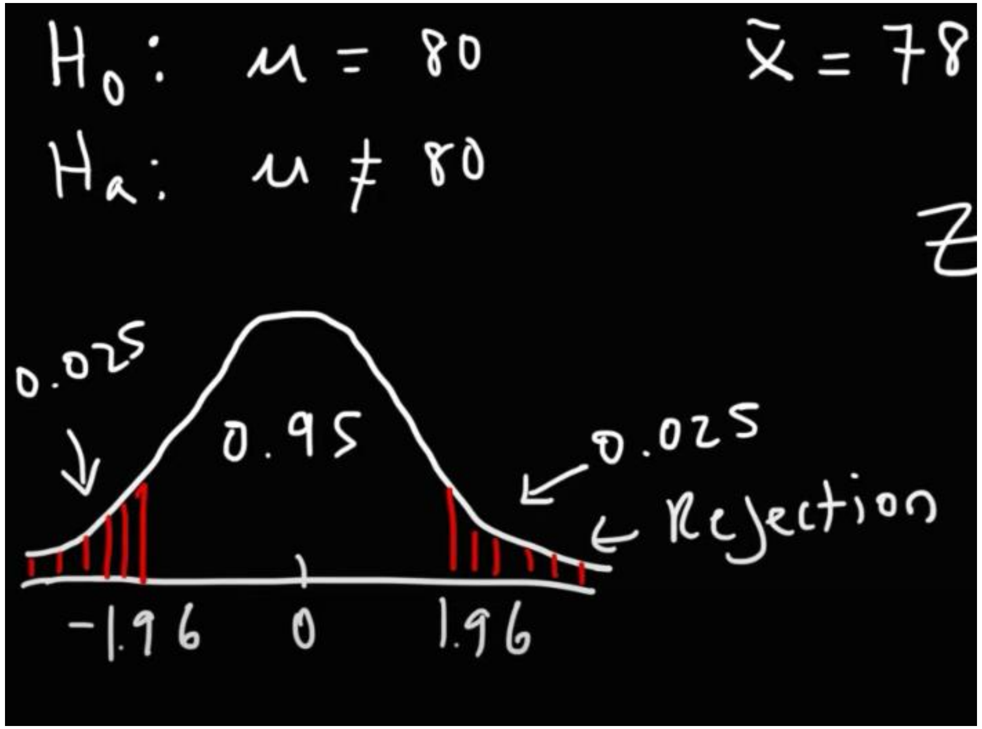
Σχετικά video

- https://www.youtube.com/watch?v=0oc49DyA3hU



Σχετικά video

- https://www.youtube.com/watch?v=zJ8e_wAWUzE



Ιδιότητες

$\mu_{\overline{X}} = \mu$ **Ο μέσος της κατανομής δειγματοληψίας του μέσου, ισούται με το μέσο το πληθυσμού**

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **Το τυπικό σφάλμα του μέσου ισούται με την τυπική απόκλιση του πληθυσμού δια της τετραγωνικής ρίζας του μεγέθους του δείγματος**