Στατιστική ΙΙ

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων,

Πανεπιστήμιο Πατρών

Ακαδημαϊκό έτος: 2020-2021

Διάλεξη 10η

- Ανάλυση διακύμανσης (ANOVA)
  - Έλεγχος F

16ο κεφάλαιο

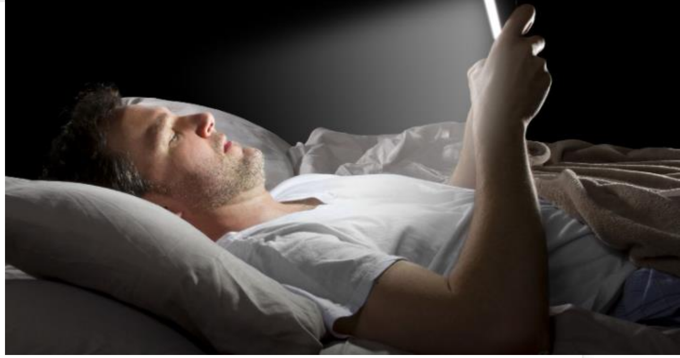
Γενικά

- Η ανάλυση διακύμανσης χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει διαφορές μεταξύ δύο ή περισσοτέρων ομάδων βασισμένοι σε μια ανεξάρτητη μεταβλητή
- Η μεταβλητότητα/διασπορά μεταξύ των παρατηρήσεων αναγνωρίζεται ως προερχόμενη από διάφορες πηγές και αν ελέγχει κατάλληλα μας δίνει πληροφορίες αναφορικά με τις διαφορές των ομάδων και κατά πόσο οφείλονται στην τυχαιότητα

Παράδειγμα

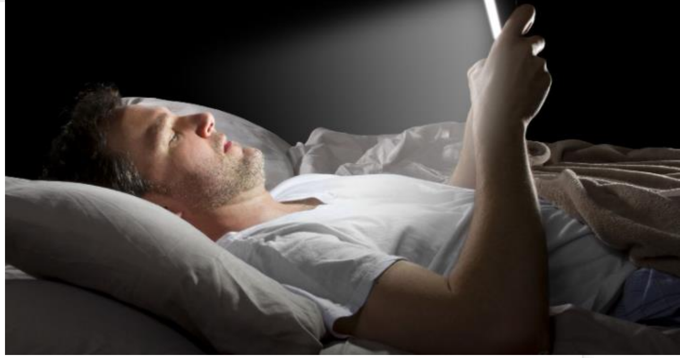
- Προκαλεί η έλλειψη ύπνου περισσότερο ή λιγότερο επιθετική συμπεριφορά;
- Ψυχολόγος εντάσσει τυχαία εθελοντές σε περιόδους έλλειψης ύπνου 0, 24 και 48 ωρών (παράγοντας ή ανεξάρτητη μεταβλητή)
- Μετράται η επιθετικότητά τους (εξαρτημένη μεταβλητή)
  - Ένας αριθμός που αποτυπώνει τον συνολικό αριθμό επιθετικής συμπεριφοράς (πχ προσβολές, διαφωνίες,…)

Παράδειγμα



- Μηδενική υπόθεση: τίποτα σημαντικό δεν συμβαίνει/καταγράφεται
  - Και οι τρείς ομάδες στέρησης ύπνου (0, 24 και 48 ωρών) κατά μέσο όρο έχουν την ίδια συμπεριφορά
  - H_0: $\mu_0 = \mu_{24} = \mu_{48}$
  - Η εναλλακτική υπόθεση δηλώνει ότι η H_0 είναι ψευδής
    - Οποιοσδήποτε συνδυασμός διαφορετικότητας
      - Αρκεί μια ισότητα να μην ισχύει
      - Ενδεχομένως για κάποιο ζεύγος να ισχύει η ισότητα

Παράδειγμα



- Τα δεδομένα είναι λίγα μόνο για την ευκολία στην παρουσίαση και δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα

Διαισθητικά: Ποιο πείραμα θα απέρριπτε την μηδενική υπόθεση;

Πείραμα 1

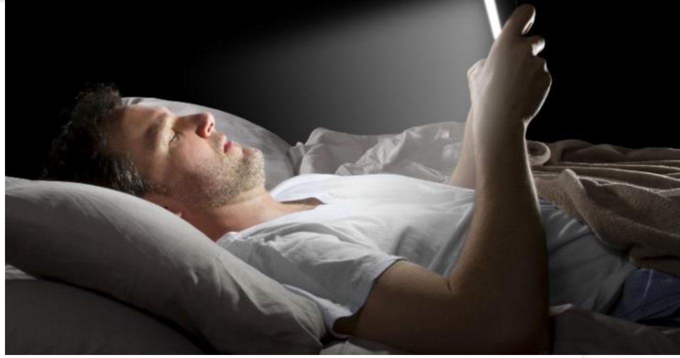
	OUTCOME A HOURS OF SLEEP DEPRIVATION			
	ZERO	TWENTY-FOUR	FORTY-EIGHT	
	3	4	2	
	5	8	4	
	7	6	6	
Group mean:	5	6	4	Grand mean = $\boxed{5}$

Πείραμα 2

	OUTCOME B HOURS OF SLEEP DEPRIVATION			
	ZERO	TWENTY-FOUR	FORTY-EIGHT	
	0	3	6	
	4	6	8	
	2	6	10	
Group mean:	2	5	8	Grand mean = $\boxed{5}$

Ίδιος συνολικός μέσος

Παράδειγμα



Πείραμα 1

	OUTCOME A HOURS OF SLEEP DEPRIVATION			
	ZERO	TWENTY-FOUR	FORTY-EIGHT	
	3	4	2	
	5	8	4	
	7	6	6	
Group mean:	5	6	4	Grand mean = 5

Πείραμα 2

	OUTCOME B HOURS OF SLEEP DEPRIVATION			
	ZERO	TWENTY-FOUR	FORTY-EIGHT	
	0	3	6	
	4	6	8	
	2	6	10	
Group mean:	2	5	8	Grand mean = 5

Στην ANOVA ελέγχουμε πολλαπλές πηγές μεταβλητότητας

Ο ρόλος της μεταβλητότητας

OUTCOME A

	HOURS OF SLEEP DEPRIVATION		
	ZERO	TWENTY-FOUR	FORTY-EIGHT
	3	4	2
	5	8	4
	7	6	6
Group mean:	5	6	4

Grand mean = 5

OUTCOME B

	HOURS OF SLEEP DEPRIVATION		
	ZERO	TWENTY-FOUR	FORTY-EIGHT
	0	3	6
	4	6	8
	2	6	10
Group mean:	2	5	8

Grand mean = 5

Διαισθητικά

Μικρές διαφοροποιήσεις ακόμα και αν ο ύπνος δεν επηρεάζει την επιθετικότητα

Σημαντικές διαφοροποιήσεις που ενδεχομένως είναι πέρα της τυχαιότητας του δείγματος

Ορισμοί

- **Επίδραση πειραματικού χειρισμού**: Η ύπαρξη μιας τουλάχιστον διαφοράς μεταξύ των μέσων πληθυσμού.
- **Μεταβλητότητα μεταξύ ομάδων:** μεταβλητότητα μεταξύ αποτελεσμάτων αντικειμένων τα οποία όντας σε διαφορετικές ομάδες, υποβάλλονται σε διαφορετικούς πειραματικούς χειρισμούς
- **Μεταβλητότητα εντός ομάδων:** μεταβλητότητα μεταξύ αποτελεσμάτων αντικειμένων τα οποία όντας στην ίδια ομάδα, υποβάλλονται στον ίδιο πειραματικό χειρισμό
- **Τυχαίο σφάλμα:** οι συνδυασμένες επιδράσεις στα αποτελέσματα μεμονωμένων αντικειμένων όλων των ανεξέλεγκτων παραγόντων.
  - Ατομικές διαφοροποιήσεις αντικειμένων, μικρές διαφοροποιήσεις στην διενέργεια του πειράματος, λάθη στις μετρήσεις…

Παράδειγμα

- Τα αντικείμενα των για τις 3 παρακάτω ομάδες υπόκειται σε 4 διαφορετικές δοκιμασίες. Για κάθε ένα από τα a, b, c και d ελέγξτε αν υπάρχει μεταβλητότητα μεταξύ/εντός ομάδων

(a)

GROUP 1	GROUP 2	GROUP 3
8	8	8
8	8	8
8	8	8
8	8	8

Μεταξύ ομάδων: όχι
Εντός ομάδων: όχι

(b)

GROUP 1	GROUP 2	GROUP 3
8	4	12
8	4	12
8	4	12
8	4	12

Μεταξύ ομάδων: ναι
Εντός ομάδων: όχι

(c)

GROUP 1	GROUP 2	GROUP 3
4	6	5
6	6	7
8	10	9
14	10	11

Μεταξύ ομάδων: όχι
Εντός ομάδων: ναι

(d)

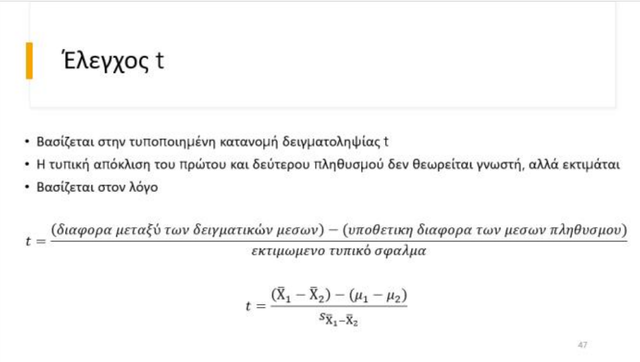
GROUP 1	GROUP 2	GROUP 3
6	11	20
8	12	18
8	14	23
10	15	25

Μεταξύ ομάδων: ναι
Εντός ομάδων: ναι

Λόγος F

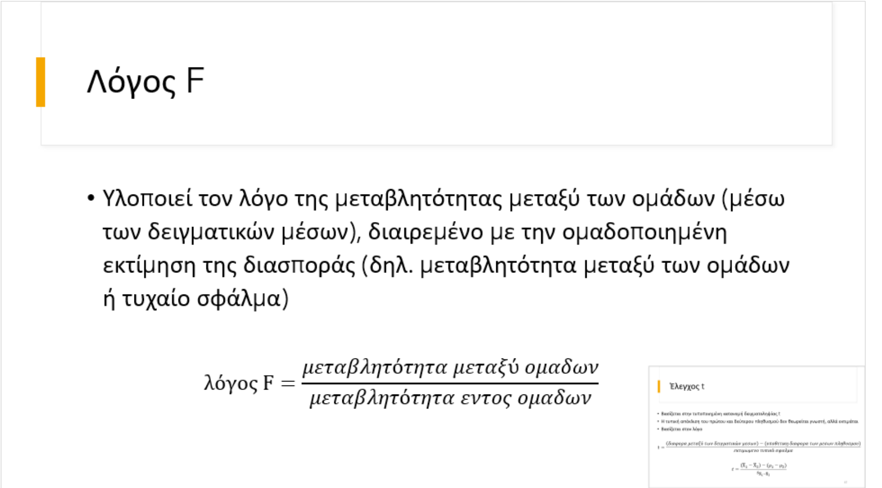
- Υλοποιεί τον λόγο της μεταβλητότητας μεταξύ των ομάδων (μέσω των δειγματικών μέσων), διαιρεμένο με την ομαδοποιημένη εκτίμηση της διασποράς (δηλ. μεταβλητότητα μεταξύ των ομάδων ή τυχαίο σφάλμα)

$$\lambda \acute{o} \gamma o\varsigma \ \mathrm{F} = \frac{\mu \varepsilon \tau \alpha \beta \lambda \eta \tau \acute{o} \tau \eta \tau \alpha \ \mu \varepsilon \tau \alpha \xi \acute{\upsilon} \ o \mu \alpha \delta \omega \nu}{\mu \varepsilon \tau \alpha \beta \lambda \eta \tau \acute{o} \tau \eta \tau \alpha \ \varepsilon \nu \tau o \varsigma \ o \mu \alpha \delta \omega \nu}$$

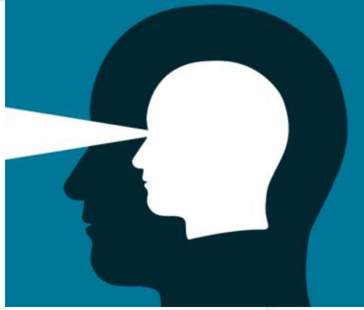


Έλεγχος F

- Ένας έλεγχος F της μηδενικής υπόθεσης βασίζεται στο:
- Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, τότε ο αριθμητής και ο παρονομαστής του λόγου F θα έτειναν να είναι περίπου ίσοι,
- Αλλά αν η μηδενική υπόθεση είναι ψευδής, ο αριθμητής θα έτεινε να υπερτερεί



Έλεγχος F



Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, τότε δεν υπάρχει επίδραση του πειραματικού χειρισμού

$$\mathrm{F} = \frac{\tau\upsilon\chi\alpha\iota o\ \sigma\varphi\alpha\lambda\alpha}{\tau\upsilon\chi\alpha\iota o\ \sigma\varphi\alpha\lambda\mu\alpha}$$

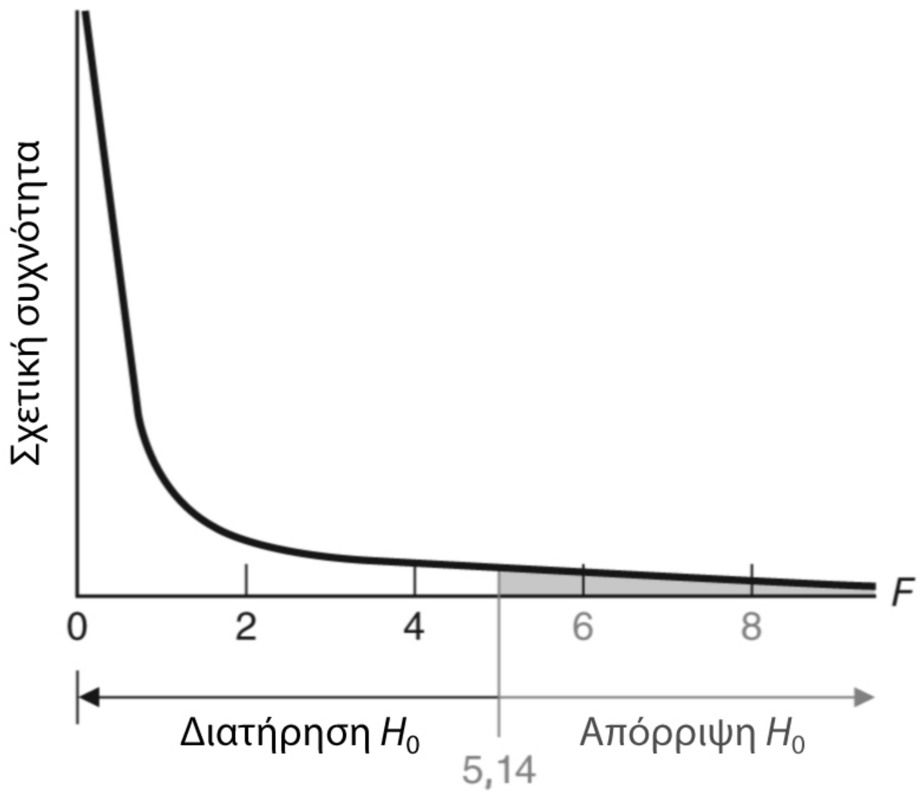
Αν η μηδενική υπόθεση είναι ψευδής, τότε δεν υπάρχει επίδραση του πειραματικού χειρισμού στον αριθμητή του λόγου και ο λόγος μεγαλύτερος από την μονάδα

$$\mathrm{F} = \frac{\tau\upsilon\chi\alpha\iota o\ \sigma\varphi\alpha\lambda\alpha + \varepsilon\pi\iota\delta\rho\alpha\sigma\eta\ \pi\varepsilon\iota\rho\alpha\mu\alpha\tau\iota\kappa o\upsilon\ \chi\varepsilon\iota\rho\iota\sigma\mu o\upsilon}{\tau\upsilon\chi\alpha\iota o\ \sigma\varphi\alpha\lambda\mu\alpha}$$

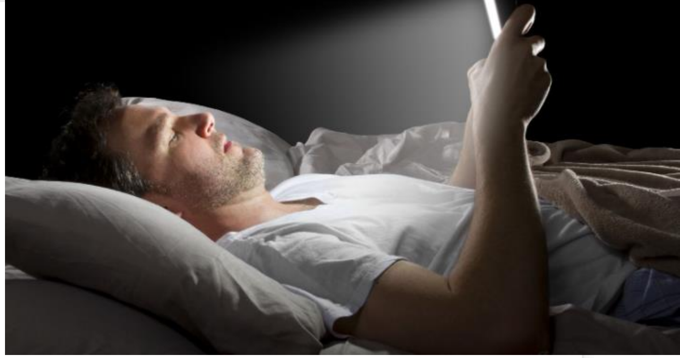
Στην πράξη κινούμαστε αντίστροφα: από τον λόγο να εξάγουμε συμπέρασμα για την Η0

Έλεγχος F

- Θεωρούμε ότι η μηδενική υπόθεση είναι αληθής
  - Ο λόγος F είναι κοντά στην μονάδα
  - Οι διαφορές είναι μικρές και προϊόν της τυχαιότητας δειγματοληψίας
  - Το F θα έπαιρνε ανάλογες κοινές τιμές στην υποθετική συνάρτηση κατανομής δειγματοληψίας
- Αν η H0 είναι ψευδής τότε ο λόγος F αναμένεται να λαμβάνει σπάνιες τιμές στην υποθετική συνάρτηση κατανομής δειγματοληψίας



Παράδειγμα



Δεδομένα (πολύ λίγα μόνο για ευκολία παρουσίασης):

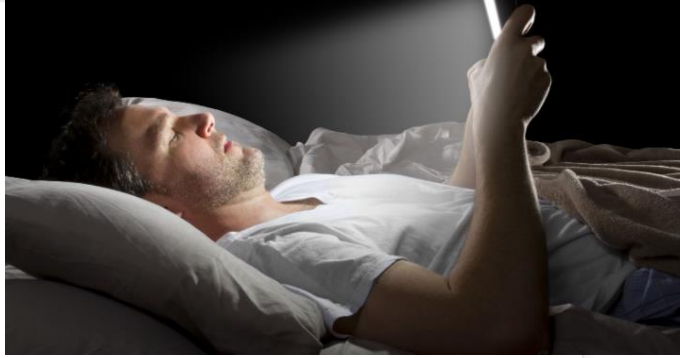
	HOURS OF SLEEP DEPRIVATION			
	ZERO	TWENTY-FOUR	FORTY-EIGHT	
	0	3	6	
	4	6	8	
	2	6	10	
Group mean:	2	5	8	Grand mean = 5

Στατιστικές υποθέσεις

$$\mathrm{H}_0\colon \mu_0 = \mu_{24} = \mu_{48}$$

H_1: η H_0 είναι ψευδής (κατά τουλάχιστον 1 συνδυασμό)

Παράδειγμα



- Υπολογίζουμε τον την κρίσιμη τιμή του λόγου F (ακολουθούν λεπτομέρειες των υπολογισμών)(δηλ. F≥5.14) για τους καταλλήλους βαθμούς ελευθερίας $df_{μεταξυ} = 2, df_{εντος} = 6$
- Υπολογίζουμε το λόγο F (δηλ. 7.36)
- Συγκρίνουμε με την κρίσιμη τιμή 5.14 και οπότε απορρίπτουμε την H0
- Η φυσική ερμηνεία της απόφασης είναι ότι: οι ώρες έλλειψης ύπνου επηρεάζουν τους μέσους βαθμούς επιθετικότητας.

Λεπτομέρειες υπολογισμών

- Συμβολισμοί:
  - X=μη επεξεργασμένα δεδομένα
  - T=σύνολο ομάδας
  - n=μέγεθος δείγματος ομάδας
  - G=γενικό σύνολο
  - N: γενικό/συνδυασμένο μέγεθος δείγματος

Λεπτομέρειες υπολογισμών

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων γύρω από τον γενικό μέσο

$$SS_{total} = \Sigma(X - \overline{X}_{grand})^2 = \Sigma X^2 - \frac{G^2}{N}$$

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων των μέσων ομάδας γύρω από τον γενικό μέσο (εναλλακτικό συμβολισμός $SS_{μεταξύ}$)

$$SS_{between} = n\Sigma(\overline{X}_{group} - \overline{X}_{grand})^2 = \Sigma\frac{T^2}{n} - \frac{G^2}{N}$$

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων γύρω από τον αντίστοιχο μέσο της ομάδας (εναλλακτικό συμβολισμός $SS_{εντός}$)

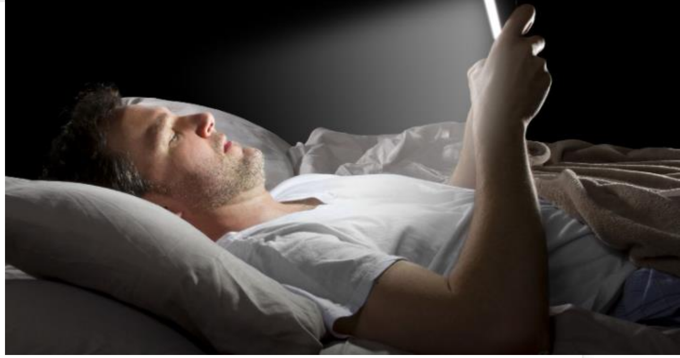
$$SS_{within} = \Sigma(X - \overline{X}_{group})^2 = \Sigma X^2 - \Sigma\frac{T^2}{n}$$

Λεπτομέρειες υπολογισμών

Εκτελούμε ακολουθιακά τα εξής βήματα:

- Εύρεση του συνόλου ομάδας T, του γενικού συνόλου G για όλες τις ομάδες (1)
- Υπολογισμός του $SS_{μεταξύ}$ (2)
- Υπολογισμός του $SS_{εντός}$ (3)
- Υπολογισμός του $SS_{ολικό}$ (4)

Παράδειγμα



Λεπτομέρειες υπολογισμών

- Συμβολισμοί:
  - X=μη επεξεργασμένα δεδομένα
  - T=σύνολο ομάδας
  - n=μέγεθος δείγματος ομάδας
  - G=γενικό σύνολο
  - N: γενικό/συνδυασμένο μέγεθος δείγματος

17

Λεπτομέρειες υπολογισμών

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων γύρω από τον γενικό μέσο

$$SS_{total} = \Sigma(X - \bar{X}_{grand})^2 = \Sigma X^2 - \frac{G^2}{N}$$

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων των μέσων ομάδας γύρω από τον γενικό μέσο (εναλλακτικό συμβολισμός $SS_{μεταξύ}$)

$$SS_{between} = n\Sigma(\bar{X}_{group} - \bar{X}_{grand})^2 = \Sigma\frac{T^2}{n} - \frac{G^2}{N}$$

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων γύρω από τον αντίστοιχο μέσο της ομάδας (εναλλακτικό συμβολισμός $SS_{εντός}$)

$$SS_{within} = \Sigma(X - \bar{X}_{group})^2 = \Sigma X^2 - \Sigma\frac{T^2}{n}$$

18

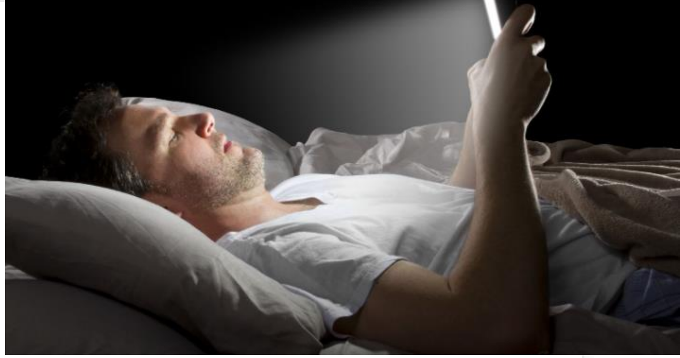
	HOURS OF SLEEP DEPRIVATION			
	0	**24**	**48**	
	0	3	6	
	4	6	8	
	2	6	10	
1 Group Totals (T) =	6	15	24	Grand Total (G) = 45

2 $$SS_{between} = \Sigma\frac{T^2}{n} - \frac{G^2}{N}$$

$$= \left[\frac{(6)^2}{3} + \frac{(15)^2}{3} + \frac{(24)^2}{3}\right] - \frac{(45)^2}{9} = \left[\frac{36}{3} + \frac{225}{3} + \frac{576}{3}\right] - \frac{2025}{9}$$

$$= [12 + 75 + 192] - 225 = 279 - 225 = 54$$

Παράδειγμα



Λεπτομέρειες υπολογισμών

- Συμβολισμοί:
  - X=μη επεξεργασμένα δεδομένα
  - T=σύνολο ομάδας
  - n=μέγεθος δείγματος ομάδας
  - G=γενικό σύνολο
  - N: γενικό/συνδυασμένο μέγεθος δείγματος

17

Λεπτομέρειες υπολογισμών

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων γύρω από τον γενικό μέσο

$$SS_{total} = \Sigma(X - \bar{X}_{grand})^2 = \Sigma X^2 - \frac{G^2}{N}$$

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων των μέσων ομάδας γύρω από τον γενικό μέσο (εναλλακτικό συμβολισμός $SS_{μεταξύ}$)

$$SS_{between} = n\Sigma(\bar{X}_{group} - \bar{X}_{grand})^2 = \Sigma\frac{T^2}{n} - \frac{G^2}{N}$$

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων γύρω από τον αντίστοιχο μέσο της ομάδας (εναλλακτικό συμβολισμός $SS_{εντός}$)

$$SS_{within} = \Sigma(X - \bar{X}_{group})^2 = \Sigma X^2 - \Sigma\frac{T^2}{n}$$

18

HOURS OF SLEEP DEPRIVATION

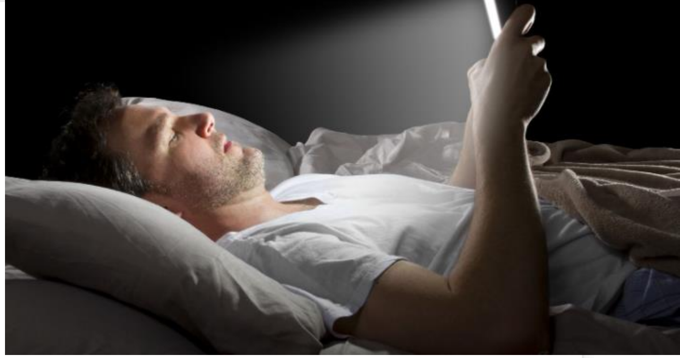
	0	**24**	**48**	
	0	3	6	
	4	6	8	
	2	6	10	
1 Group Totals (T) =	6	15	24	Grand Total (G) = 45

3 $SS_{within} = \Sigma X^2 - \Sigma\frac{T^2}{n}$

$$= (0)^2 + (4)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (6)^2 + (6)^2 + (6)^2 + (8)^2 + (10^2) - \left[\frac{(6)^2}{3} + \frac{(15)^2}{3} + \frac{(24)^2}{3}\right]$$

$$= 0 + 16 + 4 + 9 + 36 + 36 + 36 + 64 + 100 - \left[\frac{36}{3} + \frac{225}{3} + \frac{576}{3}\right] = 301 - 279 = 22$$

Παράδειγμα



Λεπτομέρειες υπολογισμών

- Συμβολισμοί:
  - X=μη επεξεργασμένα δεδομένα
  - T=σύνολο ομάδας
  - n=μέγεθος δείγματος ομάδας
  - G=γενικό σύνολο
  - N: γενικό/συνδυασμένο μέγεθος δείγματος

17

Λεπτομέρειες υπολογισμών

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων γύρω από τον γενικό μέσο

$$SS_{total} = \Sigma(X - \bar{X}_{grand})^2 = \Sigma X^2 - \frac{G^2}{N}$$

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων των μέσων ομάδας γύρω από τον γενικό μέσο (εναλλακτικό συμβολισμός $SS_{μεταξύ}$)

$$SS_{between} = n\Sigma(\bar{X}_{group} - \bar{X}_{grand})^2 = \Sigma\frac{T^2}{n} - \frac{G^2}{N}$$

- Άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων γύρω από τον αντίστοιχο μέσο της ομάδας (εναλλακτικό συμβολισμός $SS_{εντός}$)

$$SS_{within} = \Sigma(X - \bar{X}_{group})^2 = \Sigma X^2 - \Sigma\frac{T^2}{n}$$

18

HOURS OF SLEEP DEPRIVATION

	0	24	48	
	0	3	6	
	4	6	8	
	2	6	10	
1 Group Totals (T) =	6	15	24	Grand Total (G) = 45

$$4 \quad SS_{total} = \Sigma X^2 - \frac{G^2}{N}$$

$$= (0)^2 + (4)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (6)^2 + (6)^2 + (6)^2 + (8)^2 + (10)^2 - \frac{(45)^2}{9}$$

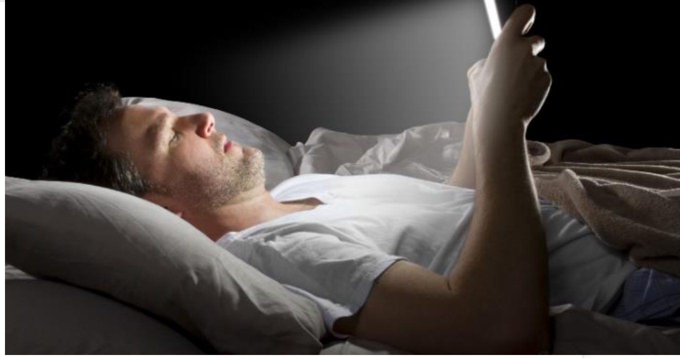
$$= 0 + 16 + 4 + 9 + 36 + 36 + 36 + 64 + 100 - \frac{2025}{9} = 301 - 225 = 76$$

Επαλήθευση

- Πρέπει να ισχύει:

$$SS_{total} = SS_{between} + SS_{within}$$

Παράδειγμα



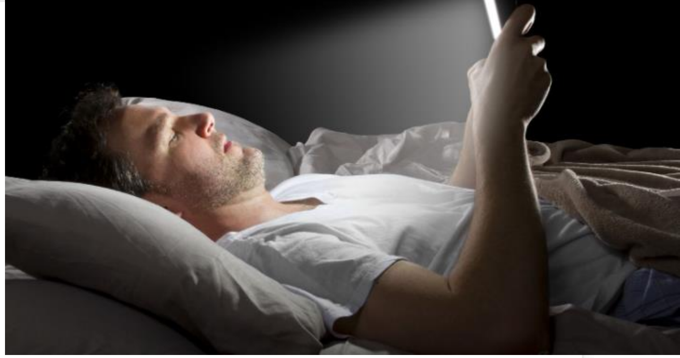
$$SS_{total} = SS_{between} + SS_{within}$$
$$76 = 54 + 22$$
$$76 = 76$$

Εύρεση των βαθμών ελευθερίας

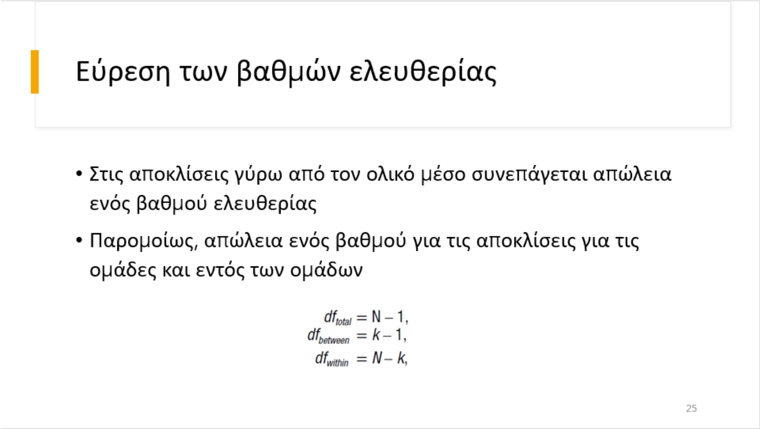
- Στις αποκλίσεις γύρω από τον ολικό μέσο συνεπάγεται απώλεια ενός βαθμού ελευθερίας
- Παρομοίως, απώλεια ενός βαθμού για τις αποκλίσεις για τις ομάδες και εντός των ομάδων

$$\begin{aligned} df_{total} &= N - 1, \\ df_{between} &= k - 1, \\ df_{within} &= N - k, \end{aligned}$$

Παράδειγμα



	HOURS OF SLEEP DEPRIVATION			
	0	**24**	**48**	
	0	3	6	
	4	6	8	
	2	6	10	
1 Group Totals (T) =	6	15	24	Grand Total (G) = 45



Εύρεση των βαθμών ελευθερίας

- Στις αποκλίσεις γύρω από τον ολικό μέσο συνεπάγεται απώλεια ενός βαθμού ελευθερίας
- Παρομοίως, απώλεια ενός βαθμού για τις αποκλίσεις για τις ομάδες και εντός των ομάδων

$$df_{total} = N - 1,$$
$$df_{between} = k - 1,$$
$$df_{within} = N - k,$$

25

$$df_{total} = N - 1 = 9 - 1 = 8$$
$$df_{between} = k - 1 = 3 - 1 = 2$$
$$df_{within} = N - k = 9 - 3 = 6$$

Επαλήθευση

- Πρέπει να ισχύει:

$$df_{total} = df_{between} + df_{within}$$

Παράδειγμα

Επαλήθευση

- Πρέπει να ισχύει:

$$df_{total} = df_{between} + df_{within}$$

Παράδειγμα

HOURS OF SLEEP DEPRIVATION

0	24	48	
0	3	6	
4	6	8	
2	6	10	
1 Group Totals (T) = 6	15	24	Grand Total (G) = 45

Εύρεση των βαθμών ελευθερίας

- Στις αποκλίσεις γύρω από τον ολικό μέσο συνεπάγεται απώλεια ενός βαθμού ελευθερίας
- Παρομοίως, απώλεια ενός βαθμού για τις αποκλίσεις για τις ομάδες και εντός των ομάδων

$$\begin{aligned} df_{total} &= N-1, \\ df_{between} &= k-1, \\ df_{within} &= N-k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df_{total} &= N-1 = 9-1 = 8 \\ df_{between} &= k-1 = 3-1 = 2 \\ df_{within} &= N-k = 9-3 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df_{total} &= N-1 = 9-1 = 8 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\ \| \\ df_{between} &= k-1 = 3-1 = 2 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\ + \\ df_{within} &= N-k = 9-3 = 6 \end{aligned}$$

Τετραγωνικός μέσος

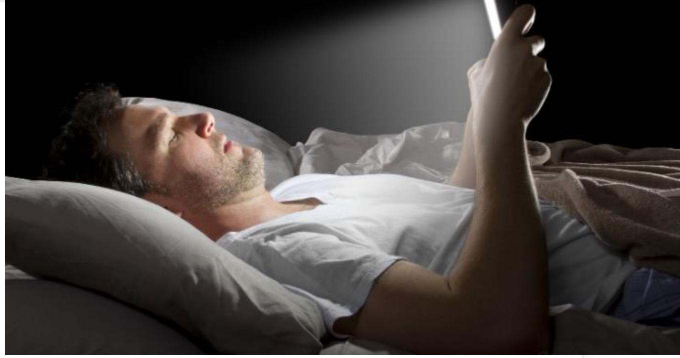
- Είναι μια εκτίμηση της διασποράς με την γενική μορφή:

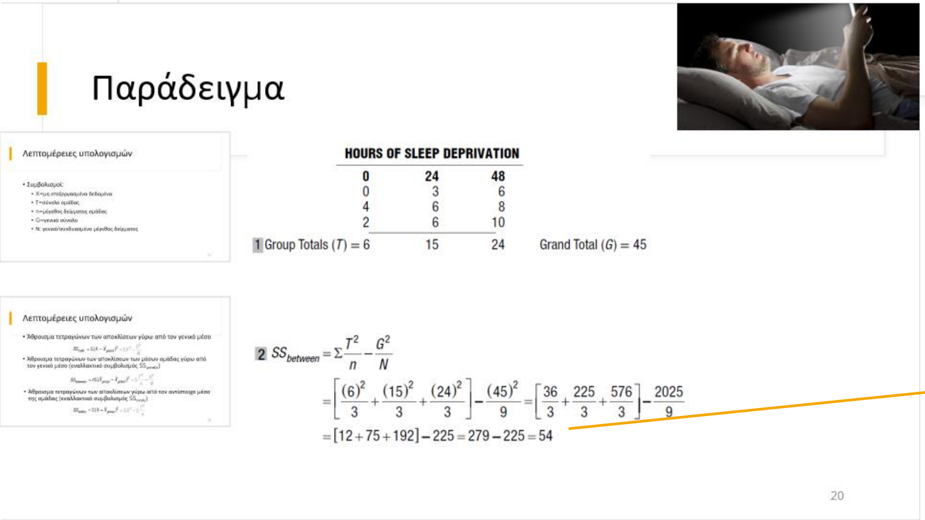
$$MS = \frac{SS}{df} \qquad SS = \Sigma(X - \bar{X})^2$$

- Τετραγωνικός μέσος μεταξύ των ομάδων και εντός είναι αντίστοιχα:

$$MS_{between} = \frac{SS_{between}}{df_{between}} \qquad MS_{within} = \frac{SS_{within}}{df_{within}}$$

Παράδειγμα





Παράδειγμα

HOURS OF SLEEP DEPRIVATION		
0	**24**	**48**
0	3	6
4	6	8
2	6	10

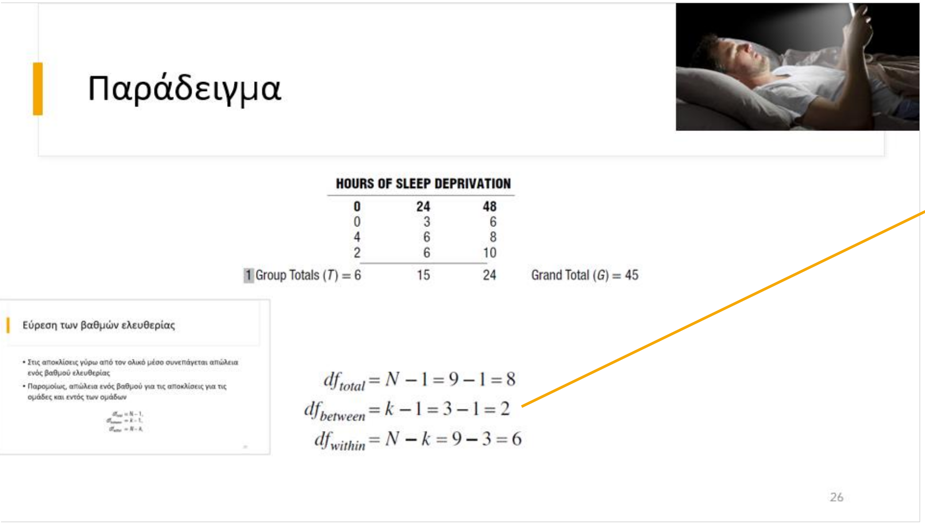
1 Group Totals (T) = 6   15   24   Grand Total (G) = 45

2 $SS_{between} = \Sigma\frac{T^2}{n} - \frac{G^2}{N}$

$$= \left[\frac{(6)^2}{3} + \frac{(15)^2}{3} + \frac{(24)^2}{3}\right] - \frac{(45)^2}{9} = \left[\frac{36}{3} + \frac{225}{3} + \frac{576}{3}\right] - \frac{2025}{9}$$

$$= [12 + 75 + 192] - 225 = 279 - 225 = 54$$

20



Παράδειγμα

HOURS OF SLEEP DEPRIVATION		
0	**24**	**48**
0	3	6
4	6	8
2	6	10

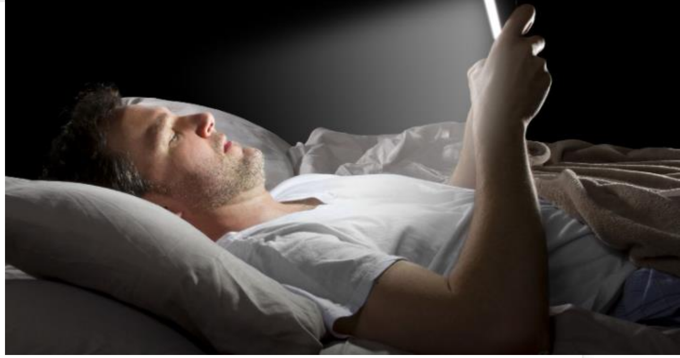
1 Group Totals (T) = 6   15   24   Grand Total (G) = 45

$$df_{total} = N - 1 = 9 - 1 = 8$$
$$df_{between} = k - 1 = 3 - 1 = 2$$
$$df_{within} = N - k = 9 - 3 = 6$$

26

$$MS_{between} = \frac{SS_{between}}{df_{between}} = \frac{54}{2} = 27$$

Παράδειγμα



Παράδειγμα

Λεπτομέρειες υπολογισμών

HOURS OF SLEEP DEPRIVATION			
	0	24	48
	0	3	6
	4	6	8
	2	6	10
1 Group Totals (T) =	6	15	24

Grand Total (G) = 45

Λεπτομέρειες υπολογισμών

3 $SS_{within} = \Sigma X^2 - \Sigma \frac{T^2}{n}$

$= (0)^2 + (4)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (6)^2 + (6)^2 + (6)^2 + (8)^2 + (10^2) - \left[\frac{(6)^2}{3} + \frac{(15)^2}{3} + \frac{(24)^2}{3}\right]$

$= 0 + 16 + 4 + 9 + 36 + 36 + 36 + 64 + 100 - \left[\frac{36}{3} + \frac{225}{3} + \frac{576}{3}\right] = 301 - 279 = 22$

21

$$MS_{within} = \frac{SS_{within}}{df_{within}} = \frac{22}{6} = 3.67$$

Παράδειγμα

HOURS OF SLEEP DEPRIVATION			
	0	24	48
	0	3	6
	4	6	8
	2	6	10
1 Group Totals (T) =	6	15	24

Grand Total (G) = 45

Εύρεση των βαθμών ελευθερίας

$df_{total} = N - 1 = 9 - 1 = 8$

$df_{between} = k - 1 = 3 - 1 = 2$

$df_{within} = N - k = 9 - 3 = 6$

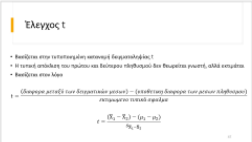
26

Λόγος F

Λόγος F

- Υλοποιεί τον λόγο της μεταβλητότητας μεταξύ των ομάδων (μέσω των δειγματικών μέσων), διαιρεμένο με την ομαδοποιημένη εκτίμηση της διασποράς (δηλ. μεταβλητότητα μεταξύ των ομάδων ή τυχαίο σφάλμα)

$$\text{λόγος F} = \frac{\textit{μεταβλητότητα μεταξύ ομαδων}}{\textit{μεταβλητότητα εντος ομαδων}}$$



Έλεγχος F

Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, τότε δεν υπάρχει επίδραση του πειραματικού χειρισμού

$$\mathrm{F} = \frac{\textit{τυχαιο σφαλα}}{\textit{τυχαιο σφαλμα}}$$

Αν η μηδενική υπόθεση είναι ψευδής, τότε δεν υπάρχει επίδραση του πειραματικού χειρισμού στον αριθμητή του λόγου και ο λόγος μεγαλύτερος από την μονάδα

$$\mathrm{F} = \frac{\textit{τυχαιο σφαλα} + \textit{επιδραση πειραματικου χειρισμου}}{\textit{τυχαιο σφαλμα}}$$

Στην πράξη κινούμαστε αντίστροφα: από τον λόγο να εξάγουμε συμπέρασμα για την Η0

13

$$F = \frac{\boxed{MS_{between}}}{\boxed{MS_{within}}}$$

Τετραγωνικός μέσος

- Είναι μια εκτίμηση της διασποράς με την γενική μορφή:

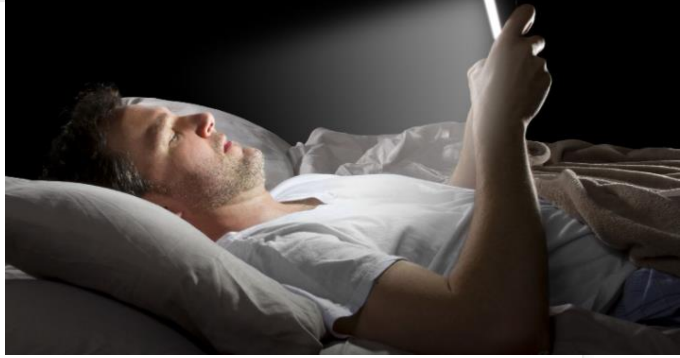
$$MS = \frac{SS}{df} \qquad SS = \Sigma(X - \bar{X})^2$$

- Τετραγωνικός μέσος μεταξύ των ομάδων και εντός είναι αντίστοιχα:

$$MS_{between} = \frac{SS_{between}}{df_{between}} \qquad MS_{within} = \frac{SS_{within}}{df_{within}}$$

29

Παράδειγμα



$$MS_{between} = \frac{SS_{between}}{df_{between}} = \frac{54}{2} = 27$$

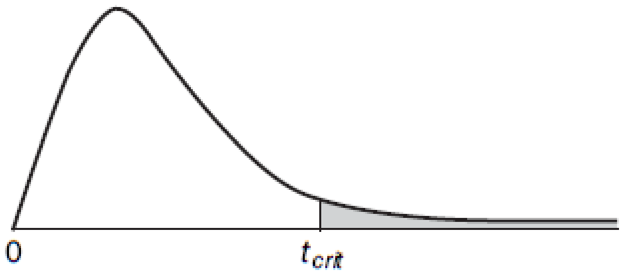
$$F = \frac{MS_{between}}{MS_{within}}$$

$$F = \frac{MS_{between}}{MS_{within}} = \frac{27}{3.67} = 7.36$$

$$MS_{within} = \frac{SS_{within}}{df_{within}} = \frac{22}{6} = 3.67$$

Αξιολόγηση του λόγου F

- Απαιτείται η σύγκριση του υπολογισμένου λόγου F, με μια κρίσιμη τιμή που ποσοτικοποιεί την σπανιότητα ώστε βάσει της σύγκρισης να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση.
- Προεπιλέγουμε ένα επίπεδο σημαντικότητας (συνήθως 0.05, 0.01)
- Συμβουλευόμαστε τους πίνακες της κατανομής F αναζητώντας την εγγραφή με το κατάλληλο ζεύγος βαθμών ελευθερίας



Χρήση των πινάκων της κατανομής F

Γραμμές με έντονα ψηφία αντιστοιχούν σε σημαντικότητα 0.01

Γραμμές με κανονικά ψηφία αντιστοιχούν σε σημαντικότητα 0.05

Εντοπίζουμε την γραμμή που ισούται $df_{εντός}$

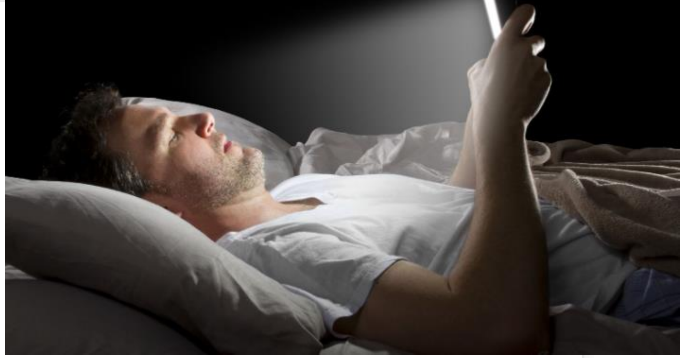
DEGREES OF FREEDOM IN NUMERATOR

Εντοπίζουμε την στήλη που ισούται $df_{μεταξύ}$

DEGREES OF FREEDOM IN DENOMINATOR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
	4,052	**4,999**	**5,403**	**5,625**	**5,764**	**5,859**	**5,928**	**5,981**	**6,022**	**6,056**	**6,082**	**6,106**	**6,142**	**6,169**	**6,208**	**6,234**	**6,258**	**6,286**	**6,302**	**6,323**	**6,334**	**6,352**	**6,361**	**6,366**
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.50
	98.49	**99.00**	**99.17**	**99.25**	**99.30**	**99.33**	**99.34**	**99.36**	**99.38**	**99.40**	**99.41**	**99.42**	**99.43**	**99.44**	**99.45**	**99.46**	**99.47**	**99.48**	**99.48**	**99.49**	**99.49**	**99.49**	**99.50**	**99.50**
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.53
	34.12	**30.82**	**29.46**	**28.71**	**28.24**	**27.91**	**27.67**	**27.49**	**27.34**	**27.23**	**27.13**	**27.05**	**26.92**	**26.83**	**26.69**	**26.60**	**26.50**	**26.41**	**26.35**	**26.27**	**26.23**	**26.18**	**26.14**	**26.12**
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63
	21.20	**18.00**	**16.69**	**15.98**	**15.52**	**15.21**	**14.98**	**14.80**	**14.66**	**14.54**	**14.45**	**14.37**	**14.24**	**14.15**	**14.02**	**13.93**	**13.83**	**13.74**	**13.69**	**13.61**	**13.57**	**13.52**	**13.48**	**13.46**
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.36
	16.26	**13.27**	**12.06**	**11.39**	**10.97**	**10.67**	**10.45**	**10.27**	**10.15**	**10.05**	**9.96**	**9.89**	**9.77**	**9.68**	**9.55**	**9.47**	**9.38**	**9.29**	**9.24**	**9.17**	**9.13**	**9.07**	**9.04**	**9.02**
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67
	13.74	**10.92**	**9.78**	**9.15**	**8.75**	**8.47**	**8.26**	**8.10**	**7.98**	**7.87**	**7.79**	**7.72**	**7.60**	**7.52**	**7.39**	**7.31**	**7.23**	**7.14**	**7.09**	**7.02**	**6.99**	**6.94**	**6.90**	**6.88**
7	5.59	4.47	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.23
	12.25	**9.55**	**8.45**	**7.85**	**7.46**	**7.19**	**7.00**	**6.84**	**6.71**	**6.62**	**6.54**	**6.47**	**6.35**	**6.27**	**6.15**	**6.07**	**5.98**	**5.90**	**5.85**	**5.78**	**5.75**	**5.70**	**5.67**	**5.65**
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.0	2.98	2.96	2.94	2.93
	11.26	**8.65**	**7.59**	**7.01**	**6.63**	**6.37**	**6.19**	**6.03**	**5.91**	**5.82**	**5.74**	**5.67**	**5.56**	**5.48**	**5.36**	**5.28**	**5.20**	**5.11**	**5.06**	**5.00**	**4.96**	**4.91**	**4.88**	**4.86**
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71
	10.56	**8.02**	**6.99**	**6.42**	**6.06**	**5.80**	**5.62**	**5.47**	**5.35**	**5.26**	**5.18**	**5.11**	**5.00**	**4.92**	**4.80**	**4.73**	**4.64**	**4.56**	**4.51**	**4.45**	**4.41**	**4.36**	**4.33**	**4.31**
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54
	10.04	**7.56**	**6.55**	**5.99**	**5.64**	**5.39**	**5.21**	**5.06**	**4.95**	**4.85**	**4.78**	**4.71**	**4.60**	**4.52**	**4.41**	**4.33**	**4.25**	**4.17**	**4.12**	**4.05**	**4.01**	**3.96**	**3.93**	**3.91**
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.40
	9.65	**7.20**	**6.22**	**5.67**	**5.32**	**5.07**	**4.88**	**4.74**	**4.63**	**4.54**	**4.46**	**4.40**	**4.29**	**4.21**	**4.10**	**4.02**	**3.94**	**3.86**	**3.80**	**3.74**	**3.70**	**3.66**	**3.62**	**3.60**
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30
	9.33	**6.93**	**5.95**	**5.41**	**5.06**	**4.82**	**4.65**	**4.50**	**4.39**	**4.30**	**4.22**	**4.16**	**4.05**	**3.98**	**3.86**	**3.78**	**3.70**	**3.61**	**3.56**	**3.49**	**3.46**	**3.41**	**3.38**	**3.36**
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.21
	9.07	**6.70**	**5.74**	**5.20**	**4.86**	**4.62**	**4.44**	**4.30**	**4.19**	**4.10**	**4.02**	**3.96**	**3.85**	**3.78**	**3.67**	**3.59**	**3.51**	**3.42**	**3.37**	**3.30**	**3.27**	**3.21**	**3.18**	**3.16**

Γραμμές με έντονα ψηφία αντιστοιχούν σε σημαντικότητα 0.01

Γραμμές με κανονικά ψηφία αντιστοιχούν σε σημαντικότητα 0.05



Παράδειγμα

$$df_{total} = N-1 = 9-1 = 8$$

$$df_{between} = k-1 = 3-1 = 2$$

$$df_{within} = N-k = 9-3 = 6$$

- Για επίπεδο σημαντικότητας α=0.05

$$F = \frac{MS_{between}}{MS_{within}} = \frac{27}{3.67} = 7.36 \quad >5.14$$

Απορρίπτουμε την H0

DEGREES OF FREEDOM IN NUMERATO..

Εντοπίζουμε την στήλη που ισούται $df_{μεταξύ}$

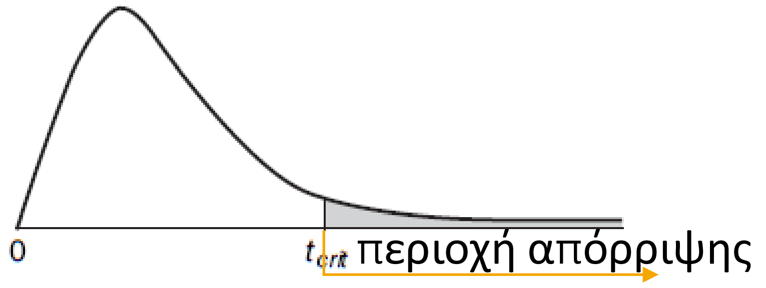
Εντοπίζουμε την γραμμή που ισούται $df_{εντός}$

DEGREES OF FREEDOM IN DENOMINATOR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
	4,052	**4,999**	**5,403**	**5,625**	**5,764**	**5,859**	**5,928**	**5,981**	**6,022**	**6,056**	**6,082**	**6,106**	**6,142**	**6,169**	**6,208**	**6,234**	**6,258**	**6,286**	**6,302**	**6,323**	**6,334**	**6,352**	**6,361**	**6,366**
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.50
	98.49	**99.00**	**99.17**	**99.25**	**99.30**	**99.33**	**99.34**	**99.36**	**99.38**	**99.40**	**99.41**	**99.42**	**99.43**	**99.44**	**99.45**	**99.46**	**99.47**	**99.48**	**99.48**	**99.49**	**99.49**	**99.49**	**99.50**	**99.50**
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.53
	34.12	**30.82**	**29.46**	**28.71**	**28.24**	**27.91**	**27.67**	**27.49**	**27.34**	**27.23**	**27.13**	**27.05**	**26.92**	**26.83**	**26.69**	**26.60**	**26.50**	**26.41**	**26.35**	**26.27**	**26.23**	**26.18**	**26.14**	**26.12**
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63
	21.20	**18.00**	**16.69**	**15.98**	**15.52**	**15.21**	**14.98**	**14.80**	**14.66**	**14.54**	**14.45**	**14.37**	**14.24**	**14.15**	**14.02**	**13.93**	**13.83**	**13.74**	**13.69**	**13.61**	**13.57**	**13.52**	**13.48**	**13.46**
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.36
	16.26	**13.27**	**12.06**	**11.39**	**10.97**	**10.67**	**10.45**	**10.27**	**10.15**	**10.05**	**9.96**	**9.89**	**9.77**	**9.68**	**9.55**	**9.47**	**9.38**	**9.29**	**9.24**	**9.17**	**9.13**	**9.07**	**9.04**	**9.02**
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67
	13.74	**10.92**	**9.78**	**9.15**	**8.75**	**8.47**	**8.26**	**8.10**	**7.98**	**7.87**	**7.79**	**7.72**	**7.60**	**7.52**	**7.39**	**7.31**	**7.23**	**7.14**	**7.09**	**7.02**	**6.99**	**6.94**	**6.90**	**6.88**
7	5.59	4.47	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.23
	12.25	**9.55**	**8.45**	**7.85**	**7.46**	**7.19**	**7.00**	**6.84**	**6.71**	**6.62**	**6.54**	**6.47**	**6.35**	**6.27**	**6.15**	**6.07**	**5.98**	**5.90**	**5.85**	**5.78**	**5.75**	**5.70**	**5.67**	**5.65**
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.0	2.98	2.96	2.94	2.93
	11.26	**8.65**	**7.59**	**7.01**	**6.63**	**6.37**	**6.19**	**6.03**	**5.91**	**5.82**	**5.74**	**5.67**	**5.56**	**5.48**	**5.36**	**5.28**	**5.20**	**5.11**	**5.06**	**5.00**	**4.96**	**4.91**	**4.88**	**4.86**
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71
	10.56	**8.02**	**6.99**	**6.42**	**6.06**	**5.80**	**5.62**	**5.47**	**5.35**	**5.26**	**5.18**	**5.11**	**5.00**	**4.92**	**4.80**	**4.73**	**4.64**	**4.56**	**4.51**	**4.45**	**4.41**	**4.36**	**4.33**	**4.31**
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54
	10.04	**7.56**	**6.55**	**5.99**	**5.64**	**5.39**	**5.21**	**5.06**	**4.95**	**4.85**	**4.78**	**4.71**	**4.60**	**4.52**	**4.41**	**4.33**	**4.25**	**4.17**	**4.12**	**4.05**	**4.01**	**3.96**	**3.93**	**3.91**
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.40
	9.65	**7.20**	**6.22**	**5.67**	**5.32**	**5.07**	**4.88**	**4.74**	**4.63**	**4.54**	**4.46**	**4.40**	**4.29**	**4.21**	**4.10**	**4.02**	**3.94**	**3.86**	**3.80**	**3.74**	**3.70**	**3.66**	**3.62**	**3.60**
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30
	9.33	**6.93**	**5.95**	**5.41**	**5.06**	**4.82**	**4.65**	**4.50**	**4.39**	**4.30**	**4.22**	**4.16**	**4.05**	**3.98**	**3.86**	**3.78**	**3.70**	**3.61**	**3.56**	**3.49**	**3.46**	**3.41**	**3.38**	**3.36**
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.21
	9.07	**6.70**	**5.74**	**5.20**	**4.86**	**4.62**	**4.44**	**4.30**	**4.19**	**4.10**	**4.02**	**3.96**	**3.85**	**3.78**	**3.67**	**3.59**	**3.51**	**3.42**	**3.37**	**3.30**	**3.27**	**3.21**	**3.18**	**3.16**

Συνοπτικοί πίνακες ANOVA

SOURCE	*SS*	*df*	*MS*	*F*
Between	54	2	$\left(\frac{54}{2}=\right)$ 27	$\left(\frac{27}{3.67}=\right)$ 7.36*
Within	22	6	$\left(\frac{22}{6}=\right)$ 3.67	
Total	76	8		

Γιατί η περιοχή απόρριψης βρίσκεται μόνο στο δεξιό μέρος;



$$SS_{between} = n\Sigma(\overline{X}_{group} - \overline{X}_{grand})^2 = \Sigma\frac{T^2}{n} - \frac{G^2}{N}$$

$$SS_{within} = \Sigma(X - \overline{X}_{group})^2 = \Sigma X^2 - \Sigma\frac{T^2}{n}$$

$$SS_{total} = \Sigma(X - \overline{X}_{grand})^2 = \Sigma X^2 - \frac{G^2}{N}$$

Όλες οι διαφορές είναι υψωμένες στο τετράγωνο
και το συσσωρευμένο αποτέλεσμα είναι επίσης θετικό.
Ο έλεγχος F είναι μη-κατευθυντικός

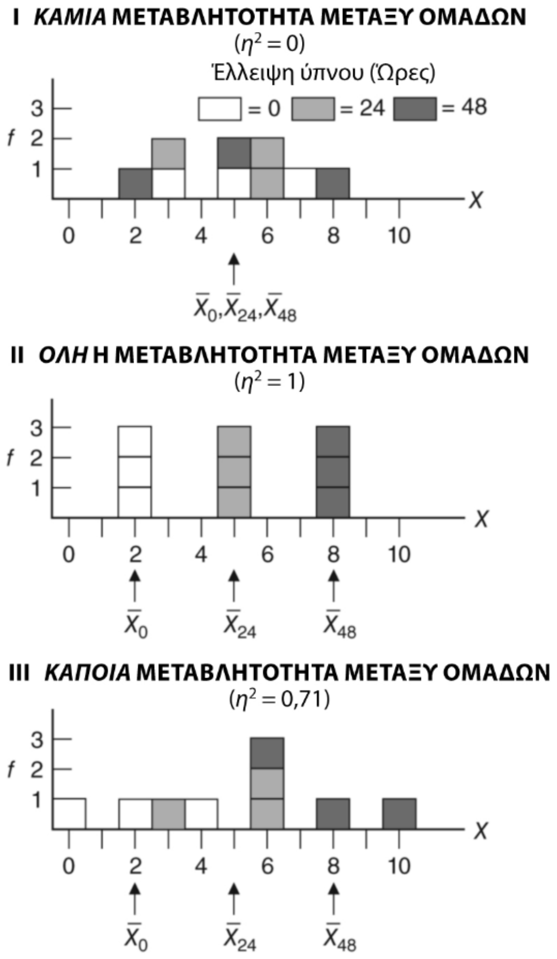
Εκτίμηση μεγέθους επίδρασης

- Εκφράζει την αναλογία της αιτιολογημένης διασποράς (explained variance) και ορίζεται ως ο λόγος

$$\eta^2 = \frac{SS_{between}}{SS_{total}}$$

- Γνωστή ως τετραγωνική καμπυλόγραμμή συσχέτιση

Τετραγωνική καμπυλόγραμμή συσχέτιση



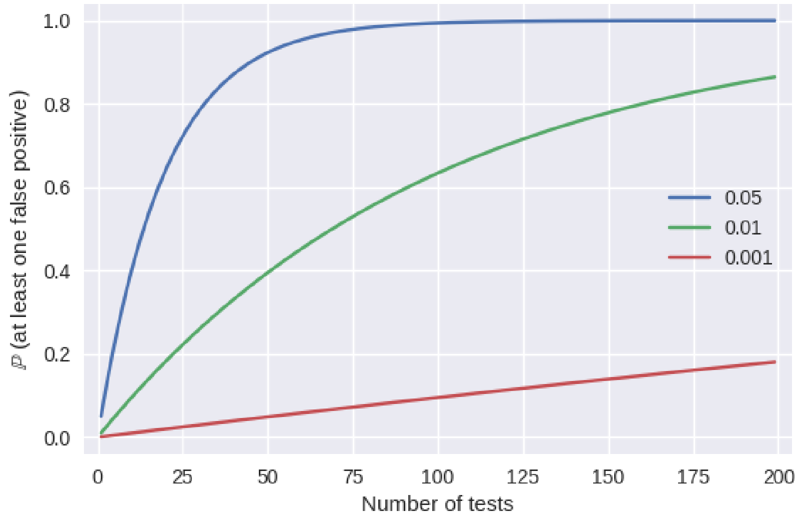
$$\eta^2 = \frac{SS_{between}}{SS_{total}} = \frac{SS_{between}}{SS_{between} + SS_{within}} = \frac{0}{0 + SS_{within}} = \frac{0}{SS_{within}} = 0$$

$$\eta^2 = \frac{SS_{between}}{SS_{total}} = \frac{SS_{between}}{SS_{between} + SS_{within}} = \frac{SS_{between}}{SS_{between} + 0} = \frac{SS_{between}}{SS_{between}} = 1$$

$$\eta^2 = \frac{SS_{between}}{SS_{total}} = \frac{SS_{between}}{SS_{between} + SS_{within}} = \frac{54}{54 + 22} = \frac{54}{76} = .71$$

Γιατί όχι πολλαπλές συγκρίσεις;

- Οι στατιστικοί έλεγχοι έχουν δημιουργηθεί ώστε να εκτελούνται μόνο μια φορά
- Αν αποφασίσουμε να κάνουμε χρήση σε πολλαπλά ζεύγη υπάρχει κίνδυνος αύξησης του σφάλματος τύπου Ι
- Συνιστάται η χρήση τεχνικής διόρθωσης πχ Bonferroni



Υποθέσεις

- Όλοι οι υποκείμενοι πληθυσμοί κατανέμονται κανονικά
- Μεγέθη ομάδας >10

Σύνδεσμοι σε online συγγράμματα

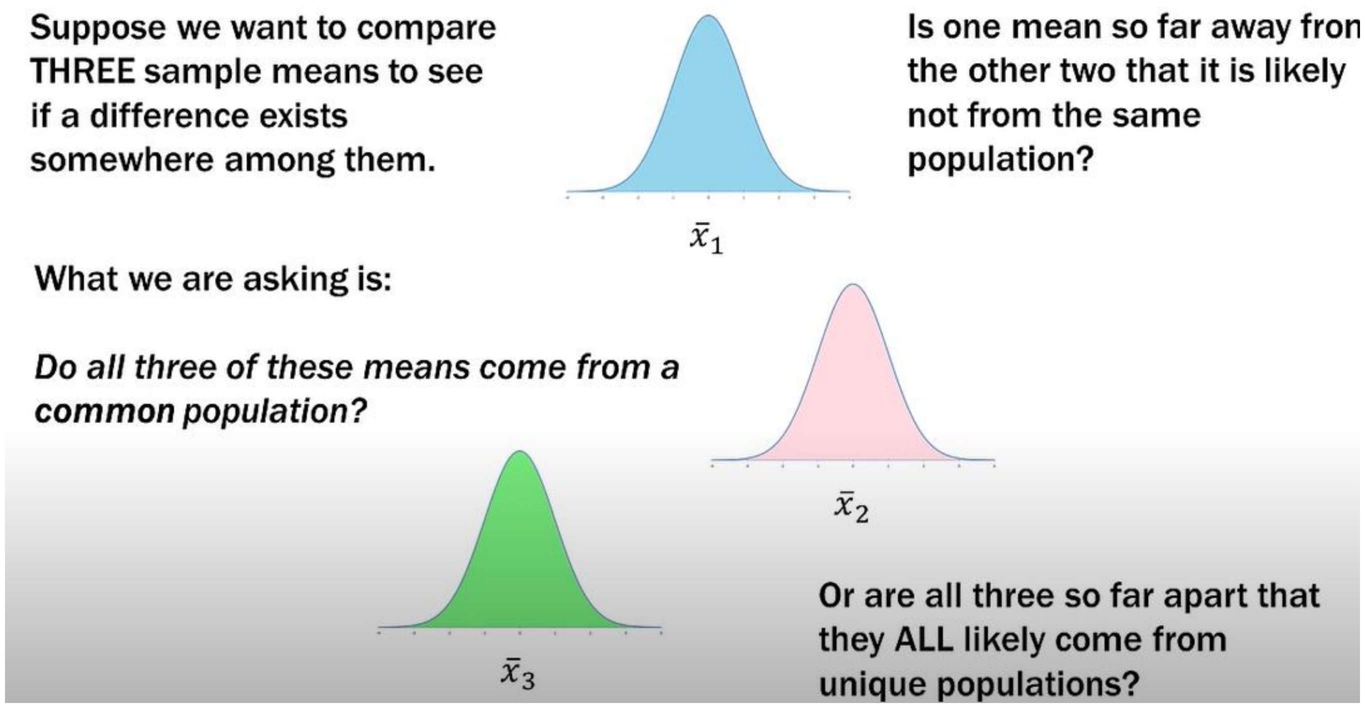
- http://www-personal.umich.edu/~gonzo/coursenotes/file2.pdf

Lecture Notes #2: Introduction to Analysis of Variance 2-1

Richard Gonzalez
Psych 613
Version 2.8 (9/2019)

Σύνδεσμοι σε online video

- https://www.youtube.com/watch?v=0Vj2V2qRU10



R code

- https://www.scribbr.com/statistics/anova-in-r/

ANOVA in R: A step-by-step guide

Published on March 6, 2020 by Rebecca Bevans. Revised on January 19, 2021.

ANOVA is a statistical test for estimating how a quantitative dependent variable changes according to the levels of one or more categorical independent variables. ANOVA tests whether there is a difference in means of the groups at each level of the independent variable.

Back up

Έλεγχος t

- Βασίζεται στην τυποποιημένη κατανομή δειγματοληψίας t
- Η τυπική απόκλιση του πρώτου και δεύτερου πληθυσμού δεν θεωρείται γνωστή, αλλά εκτιμάται
- Βασίζεται στον λόγο

$$t = \frac{(διαφορα\ μεταξύ\ των\ δειγματικών\ μεσων) - (υποθετικη\ διαφορα\ των\ μεσων\ πληθυσμου)}{εκτιμωμενο\ τυπικό\ σφαλμα}$$

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$