# Εισαγωγή στο Γραμμικό Προγραμματισμό

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-2020

# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Πρόβλημα
  - Βιομηχανική επιχείρηση γαλακτοκομικών προϊόντων
- Συνολικό μοντέλο
  - **Maximize $z = 150x_1 + 200x_2$**

(αντικειμενική συνάρτηση)

με περιορισμούς:

- $x_1 + x_2 \leq 550$ (γάλα σε λίτρα)
- $x_1 + 3x_2 \leq 1000$ (λεπτά εργασίας)
- $2x_1 + 5x_2 \leq 2000$ (λεπτά παστερίωσης και ψύξης)
- $x_1 \leq 400$ (ζήτηση Προϊόντος 1)
- $x_1, x_2 \geq 0$ (μη αρνητικές τιμές)

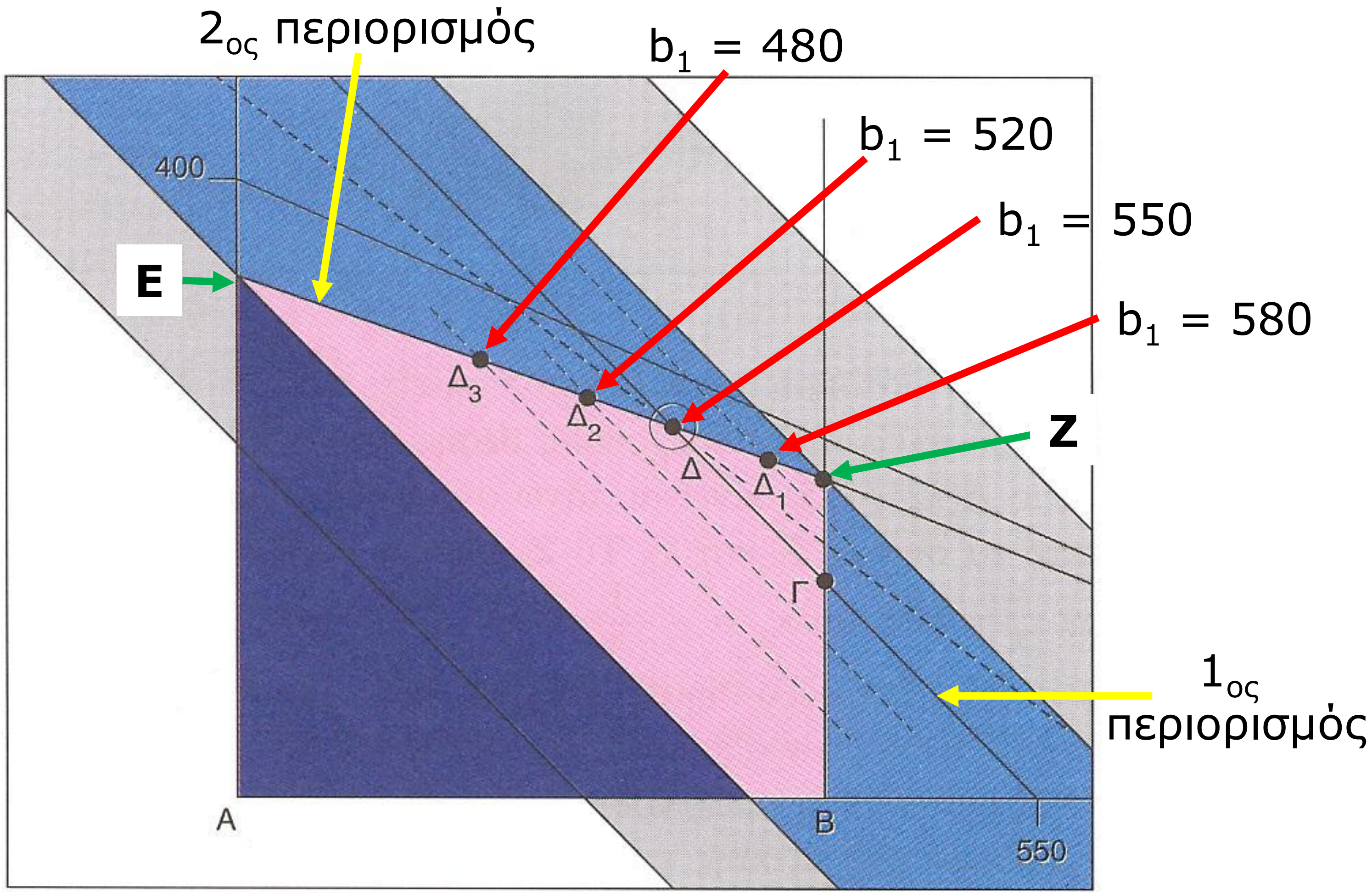
# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Οι δεσμευτικοί περιορισμοί σε αυτό το πρόβλημα είναι ο 1ος και ο 2ος
- Θα διερευνήσουμε τι γίνεται εάν αρχίσει να μεταβάλλεται το δεξιό μέλος του 1ου περιορισμού ($b_1$)

# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Η βασική εφικτή λύση (για $b_1=550$) είναι το σημείο Δ
  - $(x_1,x_2,s_1,s_2,s_3,s_4)=(325,225,0,0,225,75)$
  - με $z=93750$
- Για $b_1=580$ έχουμε το σημείο $Δ_1$
  - $(x_1,x_2,s_1,s_2,s_3,s_4)=(370,210,0,0,210,30)$
  - με $z=97500$
- Για $b_1=520$ έχουμε το σημείο $Δ_2$
  - $(x_1,x_2,s_1,s_2,s_3,s_4)=(280,240,0,0,240,120)$
  - με $z=90000$
- Για $b_1=480$ έχουμε το σημείο $Δ_3$
  - $(x_1,x_2,s_1,s_2,s_3,s_4)=(220,260,0,0,260,180)$
  - με $z=85000$

# Δεσμευτικοί περιορισμοί



# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Παρατηρούμε τα εξής:
  - Όσο το σημείο τομής των δύο δεσμευτικών περιορισμών παραμένει στην εφικτή περιοχή, η βέλτιστη λύση είναι το σημείο αυτό
  - Αν το σημείο τομής των δύο δεσμευτικών περιορισμών σταματήσει να ανήκει στην εφικτή περιοχή, το σημείο τομής του 1ου και του 2ου περιορισμού θα είναι μη εφικτή λύση

# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Παρατηρούμε τα εξής:
  - Οι αυξομειώσεις του δεξιού μέλους του 1ου περιορισμού
    - αλλάζουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
    - παράλληλα αλλάζουν και τις τιμές των μεταβλητών απόφασης που αποτελούν τη βέλτιστη λύση
    - αλλάζουν και τις τιμές των βοηθητικών μεταβλητών
  - Τι παραμένει αμετάβλητο;
    - ότι οι βασικές μεταβλητές (αυτές που είναι $\neq 0$) παραμένουν οι ίδιες, έστω και με διαφορετικές τιμές, δηλαδή η **βάση** παραμένει ίδια

# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Ας διερευνήσουμε το ρυθμό μεταβολής της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τη διαθέσιμη πρώτη ύλη «γάλα»

| $b_1$ | Σημείο | $(x_1,x_2)$ | z | Μεταβολή $b_1$ | Μεταβολή z | Ρυθμός μεταβολής |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 480 | $\Delta_3$ | (220,260) | 85000 | -70 | -8750 | 125 |
| 520 | $\Delta_2$ | (280,240) | 90000 | -30 | -3750 | 125 |
| 550 | Δ | (325,225) | 93750 | - | - | - |
| 580 | $\Delta_1$ | (370,210) | 97500 | +30 | +3750 | 125 |
| 590 | - | (385,205) | 98750 | +40 | +5000 | 125 |

# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Παρατηρούμε τα εξής:
  - Η αύξηση της διαθέσιμης ποσότητας γάλακτος κατά μία μονάδα (λίτρο) αυξάνει (βελτιώνει) την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά 125 λεπτά σε όλες τις περιπτώσεις, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής παραμένει σταθερός
  - Ο **ρυθμός μεταβολής** ονομάζεται **δυϊκή τιμή** του πόρου
  - Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης η δυϊκή τιμή εκφράζει την οριακή αξία μιας επιπλέον μονάδας του πόρου και υποδεικνύει <u>την αύξηση που θα προκύψει στο κέρδος λόγω αύξησης της ποσότητας του πόρου κατά μία μονάδα</u>

# Δεσμευτικοί περιορισμοί

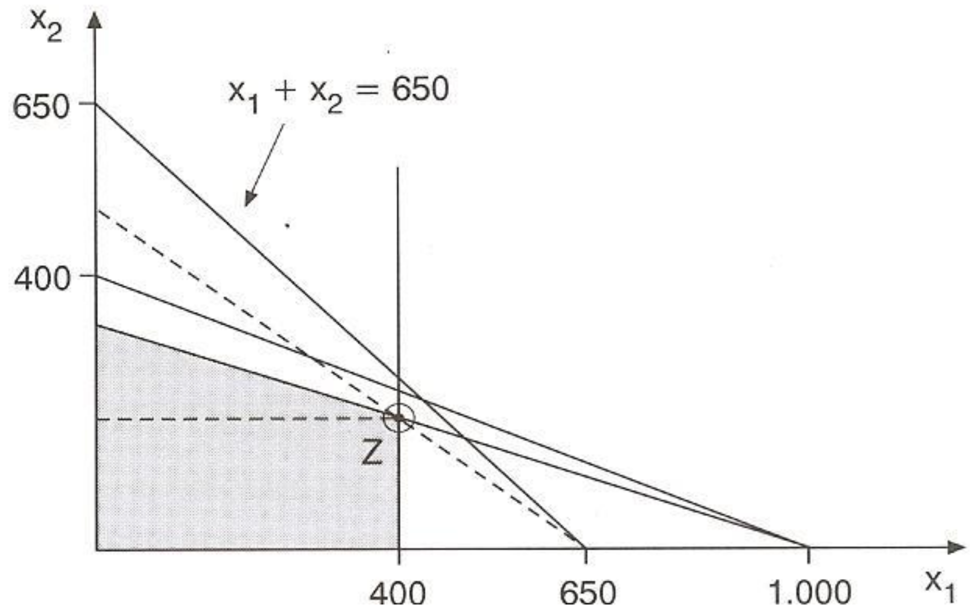
- **<u>Σκιώδης τιμή</u>**
  - Η **βελτίωση** που προκύπτει στην αντικειμενική συνάρτηση, όταν το δεξιό μέλος του περιορισμού αυξηθεί κατά μία μονάδα
- Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης η σκιώδης τιμή ενός περιορισμού (του αντίστοιχου πόρου) συμπίπτει με τη δυϊκή τιμή

# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Όλα αυτά ισχύουν αν οι μεταβολές του δεξιού μέλους ενός πόρου περιορίζονται μέσα στο εύρος εφικτότητας
- Αν το βέλτιστο σημείο ξεφύγει από την αρχική εφικτή περιοχή ο ρυθμός μεταβολής παύει να είναι ίσος με αυτόν που βρέθηκε πριν
- **Ελεύθερο αγαθό**
  - Ένας πόρος για τον οποίο η σκιώδης τιμή γίνεται ίση με 0, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει καμία συνεισφορά στο κέρδος από επιπλέον μονάδες του συγκεκριμένου πόρου

# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Έστω ότι ο 1ος περιορισμός γίνεται
  - $x_1 + x_2 \leq 650$



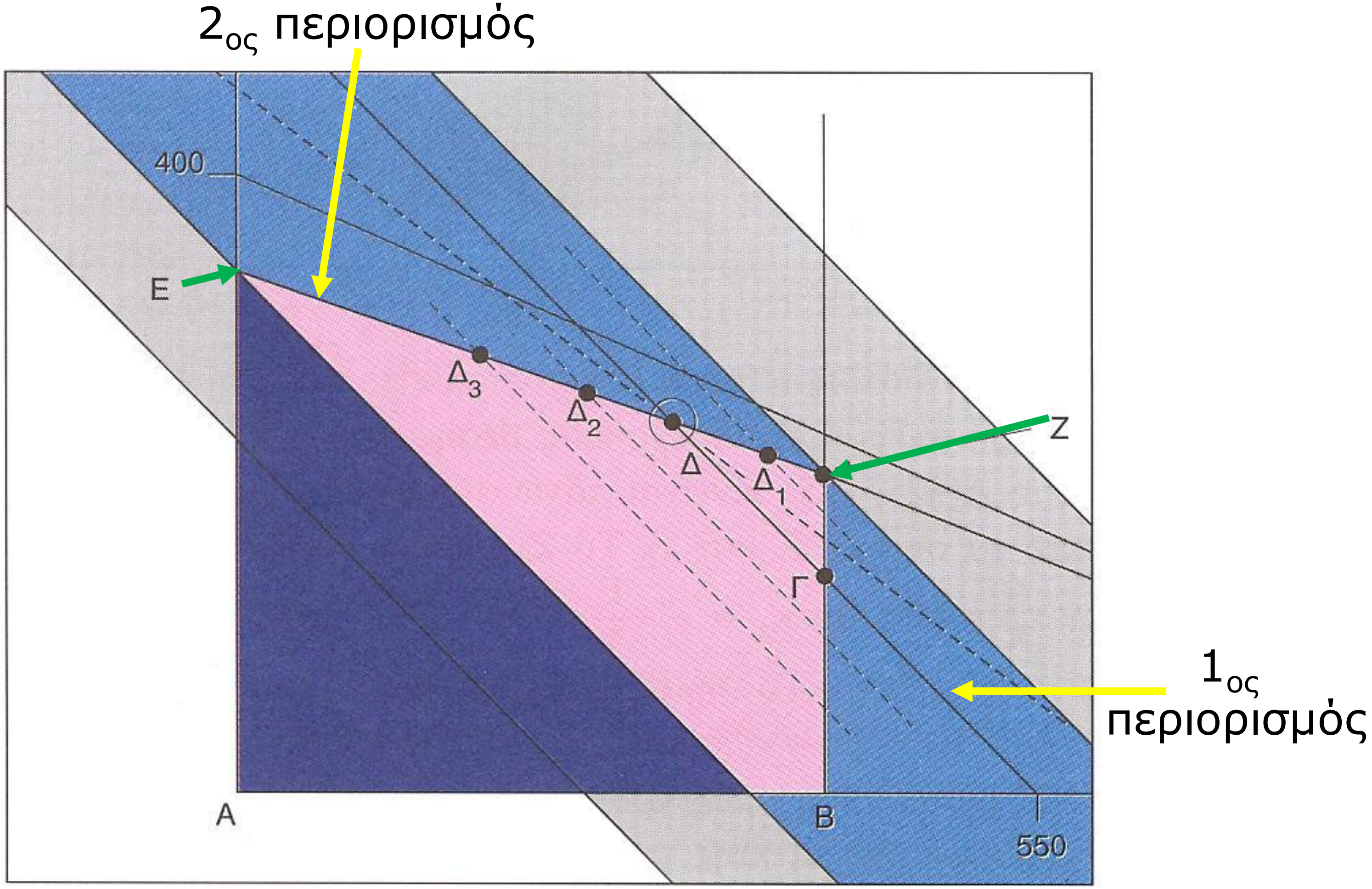
# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Ο $1^{ος}$ περιορισμός δεν είναι πια δεσμευτικός
- Οι δεσμευτικοί περιορισμοί είναι τώρα ο $2^{ος}$ και ο $4^{ος}$
- Για $b_1$=650 έχουμε το σημείο Ζ
  - $(x_1,x_2,s_1,s_2,s_3,s_4)=(400,200,50,0,200,0)$
  - με $z=100000$

# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Αναλυτικός προσδιορισμός **εύρους εφικτότητας** του $b_1$
  - Τα όρια για το $b_1$ βρίσκονται από τα σημεία για τα οποία διατηρείται η ίδια βάση
    - $x_1+x_2=b1$
    - $1^o$ σημείο: **Ε(0,1000/3)**
      - $0+1000/3=b_1 \Rightarrow b_1=1000/3$
    - $2^o$ σημείο: **Ζ(400,200)**
      - $400+200=b_1 \Rightarrow b_1=600$
- Άρα
  - $1000/3 \leq b_1 \leq 600$

# Δεσμευτικοί περιορισμοί



# Δεσμευτικοί περιορισμοί

- Η πιθανή μεταβολή D του $b_1$ ισούται με
  - $1000/3 \leq b_1 + D \leq 600 \Rightarrow$
  - $1000/3 \leq 550 + D \leq 600 \Rightarrow$
  - $\mathbf{-650/3 \leq D \leq 50}$

- Για αυξομειώσεις του $b_1$ μέσα στα παραπάνω πλαίσια το σημείο τομής του $1^{ου}$ και του $2^{ου}$ περιορισμού παραμένει η βέλτιστη λύση

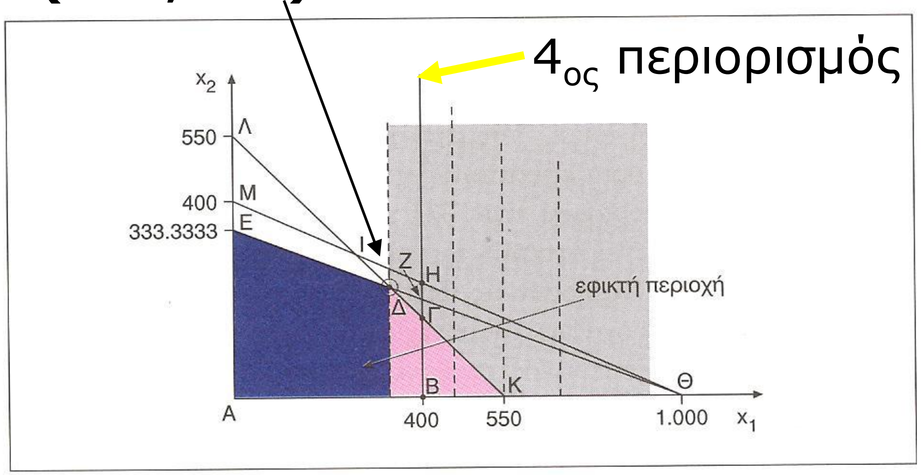
# Δεσμευτικοί περιορισμοί

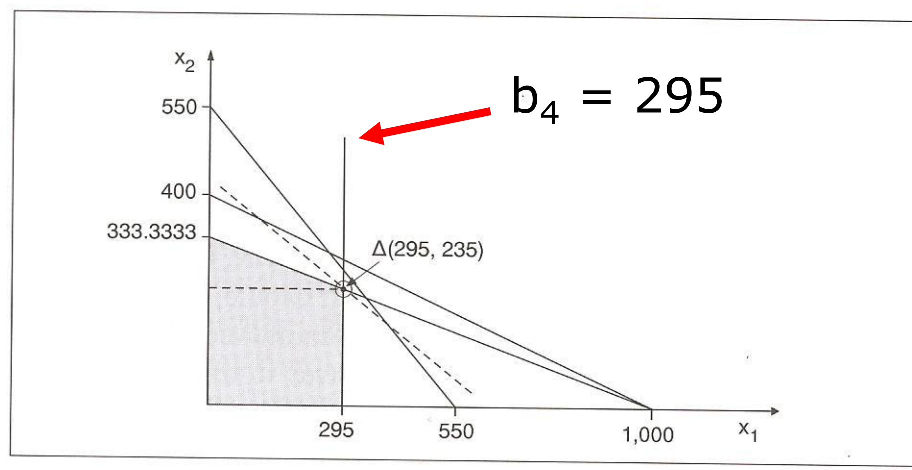
- Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, όσο η τιμή του δεξιού μέλους ενός περιορισμού κινείται μέσα στο διάστημα εφικτότητας, η **σκιώδης τιμή παραμένει σταθερή**
  - Νέα τιμή του z = προηγούμενη τιμή του z + σκιώδης τιμή · (νέα τιμή δεξιού μέλους – προηγούμενη τιμή δεξιού μέλους)

# Μη δεσμευτικοί περιορισμοί

- Έστω ο 4ος περιορισμός του προβλήματος (που είναι μη δεσμευτικός)
- Τα όρια εφικτότητας του δεξιού μέλους του 4ου περιορισμού ($b_4$) είναι
  - $325 \leq b_4 < \infty$

**Δ(325,225)**



# Μη δεσμευτικοί περιορισμοί

- Όταν ένας περιορισμός είναι **δεσμευτικός** η αντίστοιχη τιμή της χαλαρής μεταβλητής είναι μηδενική (<u>μη βασική μεταβλητή</u>) και η σκιώδης τιμή του περιορισμού (η οριακή αξία του πόρου) είναι <u>μη μηδενική</u>
- Όταν ένας περιορισμός είναι **μη δεσμευτικός** η αντίστοιχη τιμή της χαλαρής μεταβλητής είναι μη μηδενική (<u>βασική μεταβλητή</u>) και η σκιώδης τιμή του περιορισμού (η οριακή αξία του πόρου) είναι <u>μηδενική</u>

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- Συνολικό μοντέλο
  - Minimize $z = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2$

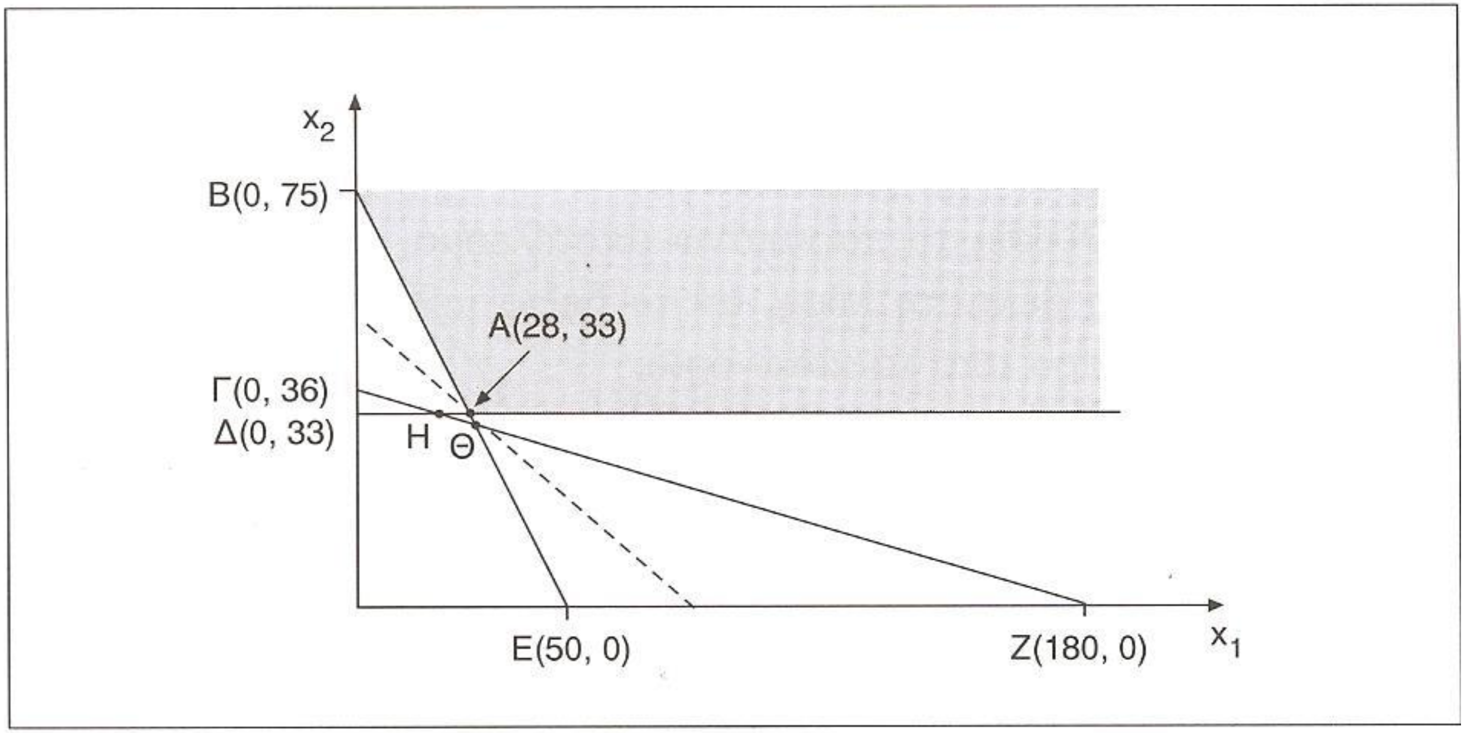
  με περιορισμούς:
    - $0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 \geq 15$ (γυναίκες)
    - $0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 \geq 9$ (άντρες)
    - $\mathbf{x_2 \geq 33}$ (βραδινές προβολές)
    - $x_1, x_2 \geq 0$

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- Τυποποιημένη μορφή
  - Minimize $z = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$

  με περιορισμούς:
    - $0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 - e_1 = 15$ (γυναίκες)
    - $0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 - e_2 = 9$ (άντρες)
    - $x_2 - e_3 = 33$ (βραδινές προβολές)
    - $x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0$

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης



# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

| Ακραίο σημείο | Βασική λύση | | | | | Σχόλια |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
| Α | 28 | 33 | 0 | 0,65 | 0 | Εφικτή, βέλτιστη |
| Β | 0 | 75 | 0 | 9,75 | 42 | Εφικτή εκφυλισμένη |
| Γ | 0 | 36 | -7,8 | 0 | 3 | Μη εφικτή εκφυλισμένη |
| Δ | 0 | 33 | -8,4 | -0,75 | 0 | Μη εφικτή εκφυλισμένη |
| Ε | 50 | 0 | 0 | -6,5 | -33 | Μη εφικτή εκφυλισμένη |
| Ζ | 180 | 0 | 39 | 0 | -33 | Μη εφικτή εκφυλισμένη |
| Η | 15 | 33 | -3,9 | 0 | 0 | Μη εφικτή |
| Θ | 30 | 30 | 0 | 0 | -3 | Μη εφικτή |

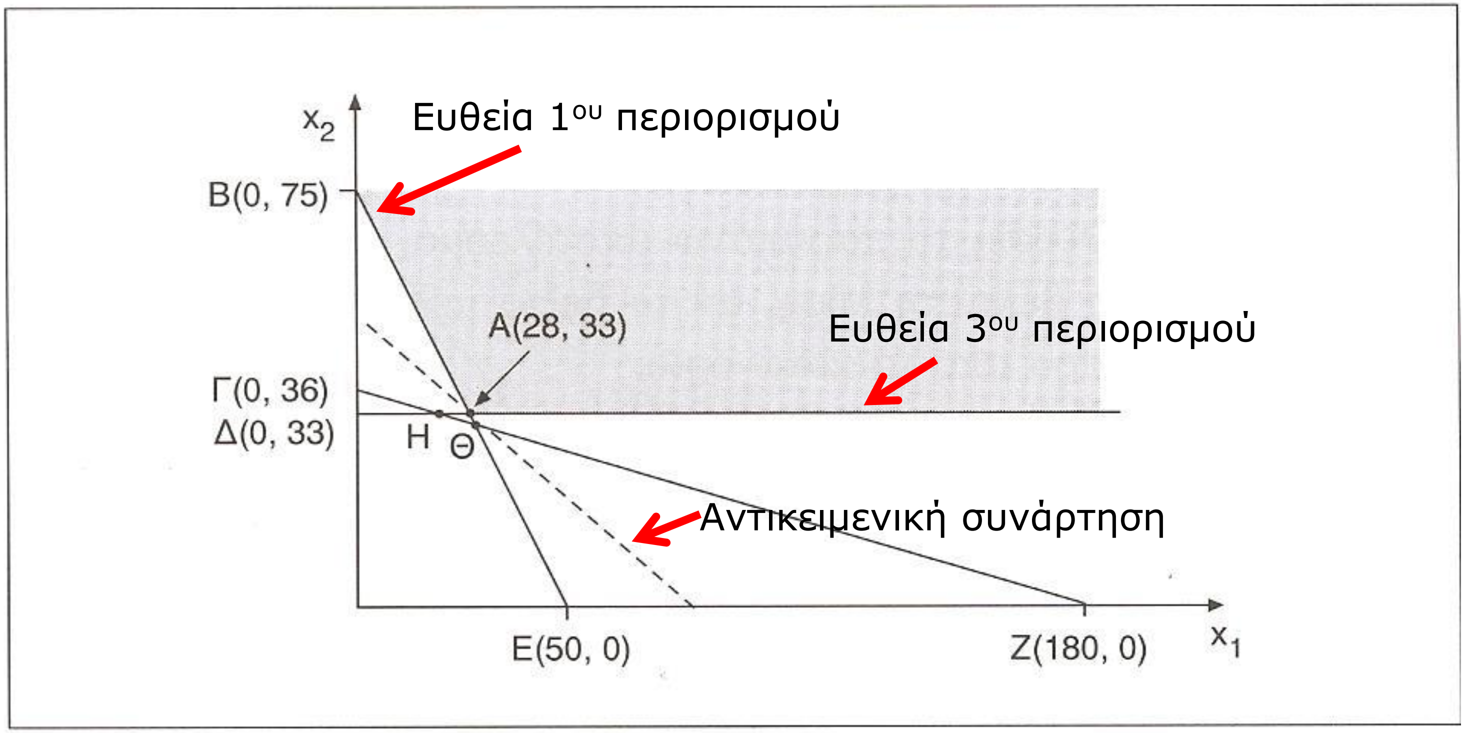
# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση αντικειμενικών συντελεστών**
- Η αντικειμενική συνάρτηση έχει την εξής μορφή
  - $z = c_1x_1+c_2x_2 \Rightarrow$
  - $x_2=(-c_1/c_2)x_1+(1/c_2)z \Rightarrow$
  - $x_2=(-1,5/2,5)x_1+(1/2,5)z \Rightarrow$
  - $x_2=(-3/5)x_1+(1/2,5)z \Rightarrow$
  - Η κλίση της είναι $\lambda=(-3/5)$

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- Η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να περιστραφεί χωρίς να αλλάξει το σημείο της βέλτιστης λύσης προς τα <u>δεξιά</u> μέχρι την ευθεία του 1ου περιορισμού
  - $0,3x_1 + 0,2x_2 = 15$
- Η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να περιστραφεί χωρίς να αλλάξει το σημείο της βέλτιστης λύσης προς τα <u>αριστερά</u> μέχρι την ευθεία του 3ου περιορισμού
  - $x_2 = 33$

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης



# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

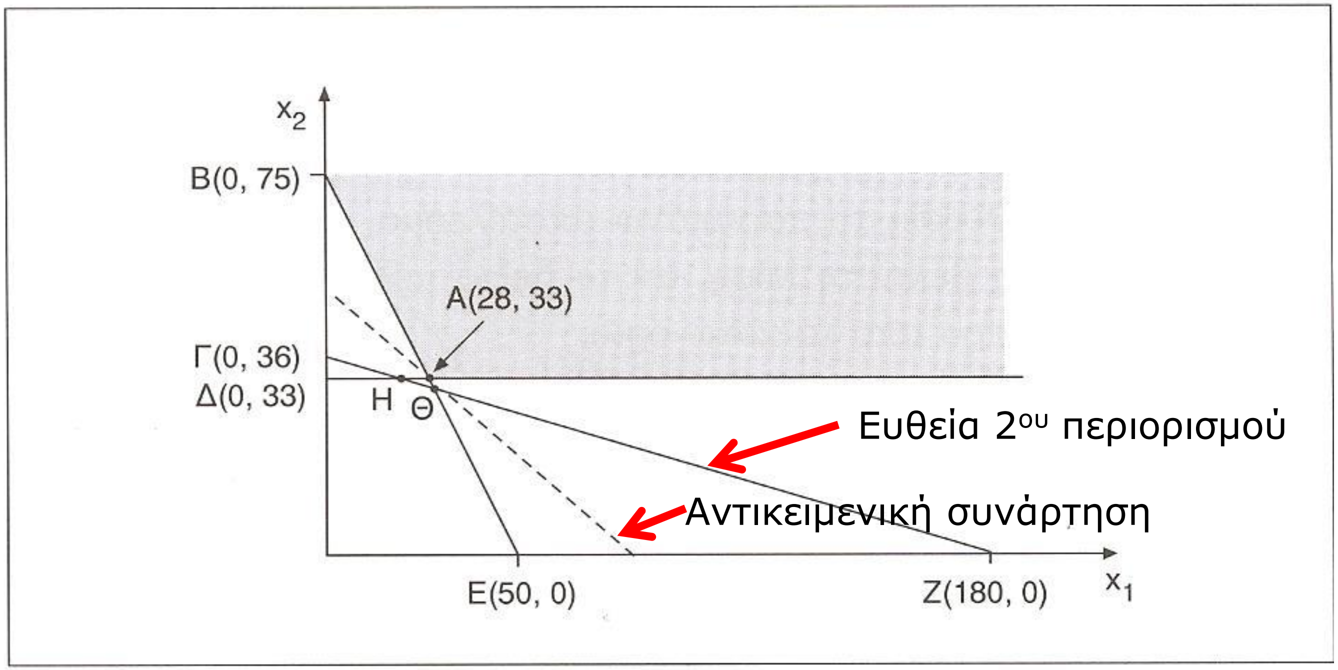
- Άρα το σημείο Α(28,33) παραμένει βέλτιστο για
  - $-(3/2) \le -(c_1/c_2) \le 0$
- Για $c_1=1,5$
  - $-(3/2) \le -(1,5/c_2) \le 0 \Rightarrow \mathbf{1 \le c_2 \le \infty}$
- Για $c_2=2,5$
  - $-(3/2) \le -(c_1/2,5) \le 0 \Rightarrow \mathbf{0 \le c_1 \le 3,75}$

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- Τι θα συμβεί αν το κόστος προβολής στη βραδινή ζώνη γίνει μικρότερο από 100.000€;
  - Το $x_1 = 0$ και το $x_2$ ξεκινάει από 75 και τείνει στο $\infty$
  - Επειδή το κόστος των βραδινών είναι αρκετά χαμηλότερο από το κόστος των πρωινών προβολών η λύση αποτελείται μόνο από βραδινές προβολές
- Γιατί δεν αλλάζει το άριστο διαφημιστικό σχέδιο, όταν το κόστος προβολής στη βραδινή ζώνη τείνει στο άπειρο;
  - Επειδή το $x_2$ έχει παγιωθεί στο 33 λόγω του 3<sup>ου</sup> περιορισμού
  - Δε συμφέρει να έχουμε $x_2$ μεγαλύτερο του 33

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- 2ος περιορισμός (μη δεσμευτικός)



# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

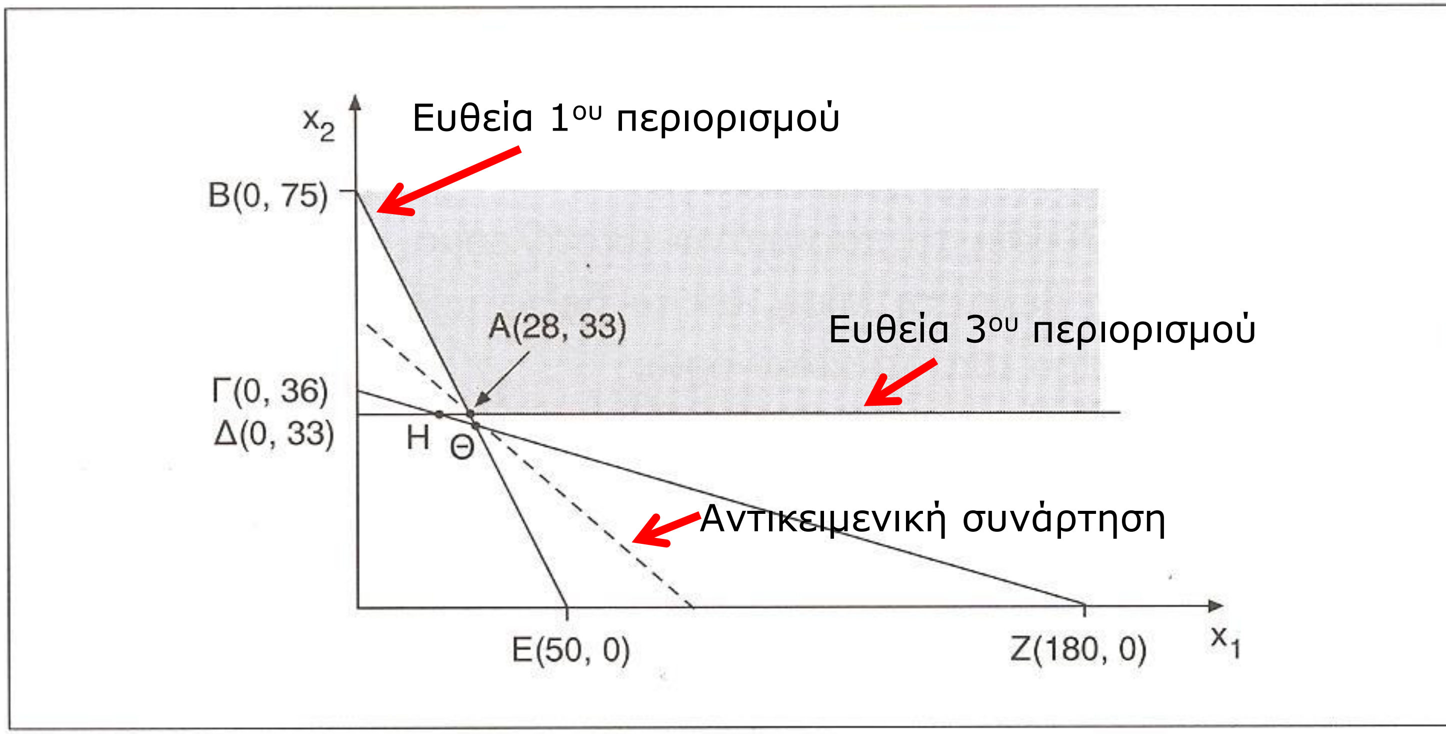
- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- 2ος περιορισμός (μη δεσμευτικός)
  - Η μείωση του $b_2$ δεν αλλάζει το βέλτιστο
  - Η αύξηση του $b_2$ μόλις περάσει το σημείο A(28,33) κάνει τον περιορισμό δεσμευτικό και αλλάζει την εφικτή περιοχή

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- 2ος περιορισμός (μη δεσμευτικός)
  - Άρα αντικαθιστώντας στο 2ο περιορισμό τις συντεταγμένες του σημείου Α έχουμε
    - $b_2 = 0,05x_1 + 0,25x_2 \Leftrightarrow$
    - $b_2=0,05\cdot 28+0,25\cdot 33=9,65$
  - $\mathbf{-\infty < b_2 \leq 9,65}$
  - Η δυϊκή τιμή και επομένως και η σκιώδης τιμή του δεύτερου περιορισμού είναι μηδέν

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- 1ος περιορισμός (δεσμευτικός)

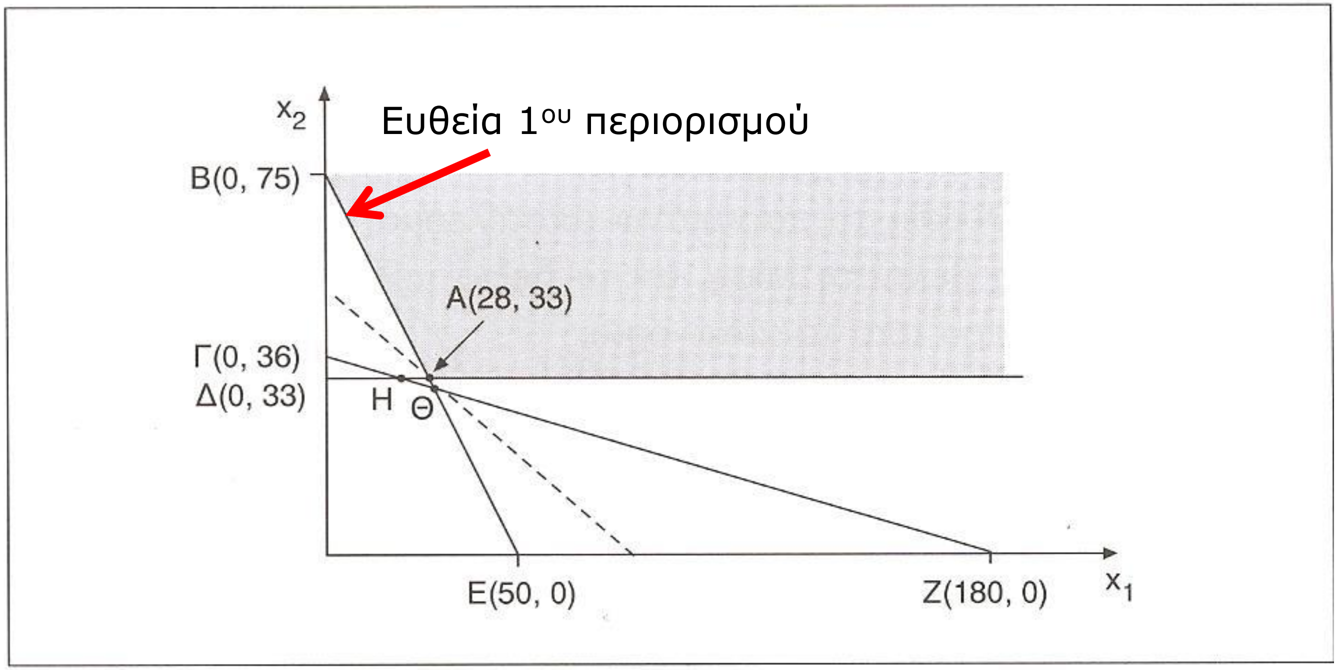


# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- 1ος περιορισμός (δεσμευτικός)
  - Η αύξηση του $b_1$ αλλάζει το βέλτιστο και το μεταφέρει διαδοχικά πάνω στην ευθεία $x_2=33$ προς τα δεξιά
  - Δεν αλλάζει η βάση γιατί η τομή των δεσμευτικών περιορισμών συνεχίζει να βρίσκεται εντός της εφικτής περιοχής και να αποτελεί τη βέλτιστη λύση

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**



# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- 1ος περιορισμός (δεσμευτικός)
  - Η μείωση του $b_1$ ώστε να τέμνει την $x_2=33$ αριστερότερα από το σημείο **H(15,33)** κάνει τον περιορισμό μη δεσμευτικό και επομένως η εφικτή περιοχή καθορίζεται από το 2ο και τον 3ο περιορισμό

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- Άρα αντικαθιστώντας στον 1ο περιορισμό τις συντεταγμένες του σημείου **Η(15,33)** έχουμε
  - $b_1=0,3x_1+0,2x_2 \Leftrightarrow$
  - $b_1=0,3 \cdot 15+0,2 \cdot 33=11,1$
  - $\mathbf{11,1 \leq b_1 < \infty}$
- Επομένως η πιθανή μεταβολή του $b_1$ είναι
  - $11,1 \leq 15+D \leq \infty \Rightarrow \mathbf{-3,9 \leq D < \infty}$

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
  - Μελέτη της επίδρασης της μεταβολής του $b_1$ στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
    - $0,3x_1 + 0,2x_2 = 15 + D$
    - $x_2 = 33$
  - Επιλύουμε ως προς το $x_1$:
    - $x_1=28+(1/0,3)D$
  - Αντικαθιστούμε στην αντικειμενική συνάρτηση και έχουμε
    - $\mathbf{z = 1,5x_1 + 2,5x_2 \Rightarrow}$
      $\mathbf{z = 124,5 + 5 \cdot D}$

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

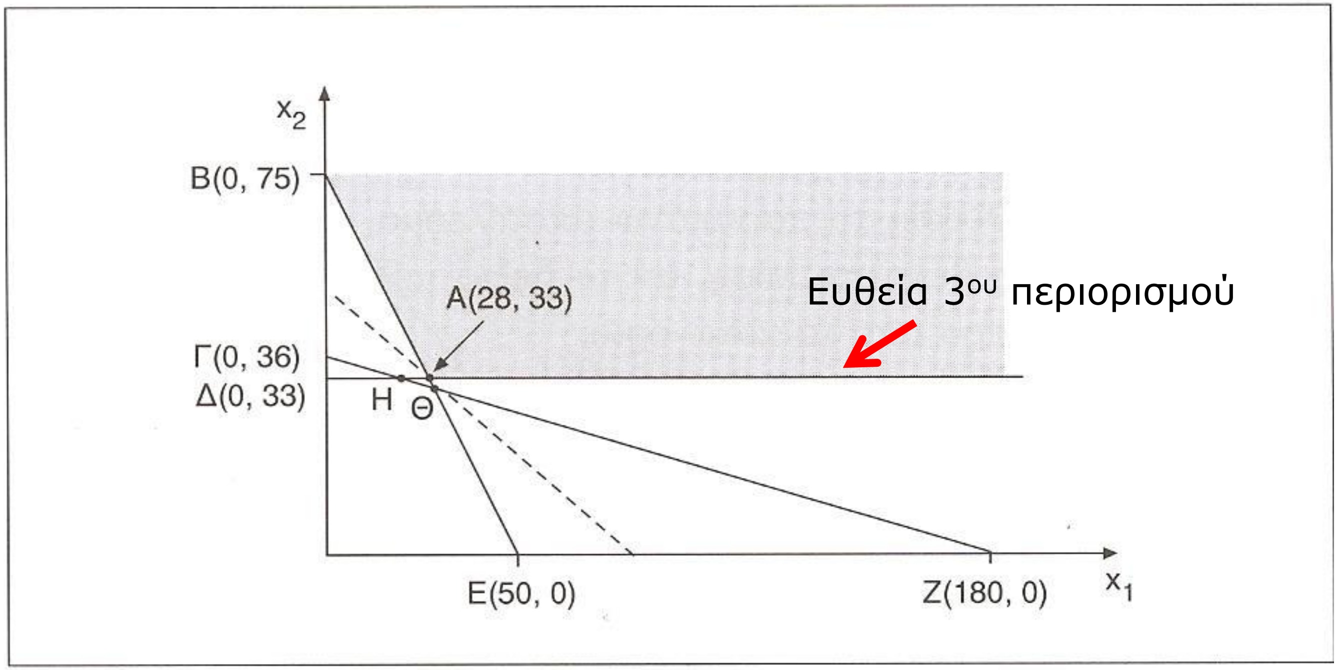
- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- Μελέτη της επίδρασης της μεταβολής του $b_1$
  - Η αύξηση κατά μια μονάδα του $b_1$ αυξάνει το κόστος κατά 5

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
  - Σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης η σκιώδης τιμή ενός περιορισμού (του αντίστοιχου πόρου) είναι αντίθετη στο πρόσημο από τη δυϊκή τιμή
  - Νέα τιμή του z = προηγούμενη τιμή του z - σκιώδης τιμή · (νέα τιμή δεξιού μέλους – προηγούμενη τιμή δεξιού μέλους)

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- 3ος περιορισμός



# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- 3ος περιορισμός
  - Η αύξηση του $b_3$ αλλάζει το βέλτιστο και το μεταφέρει διαδοχικά πάνω στην ευθεία του 1ου περιορισμού προς τα πάνω μέχρι το σημείο **B(0,75)**
  - Δεν αλλάζει η βάση γιατί η τομή των δεσμευτικών περιορισμών συνεχίζει να βρίσκεται εντός της εφικτής περιοχής και αποτελεί τη βέλτιστη λύση

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- 3ος περιορισμός (δεσμευτικός)
  - Η μείωση του $b_3$ ώστε να τέμνει την ευθεία του 1ου περιορισμού κάτω από το σημείο **Θ(30,30)** έχει ως αποτέλεσμα η βέλτιστη λύση να προκύπτει από την τομή του 2ου και του 3ου περιορισμού

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- Άρα αντικαθιστώντας στον 3ο περιορισμό τις συντεταγμένες του σημείου **Θ(30,30)** έχουμε
  - $b_3=30$
  - $\mathbf{30 \leq b_3 \leq 75}$
- Επομένως η πιθανή μεταβολή του $b_3$ είναι
  - $30 \leq 33+D \leq 75 \Rightarrow \mathbf{-3 \leq D \leq 42}$

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- Μελέτη της επίδρασης της μεταβολής του $b_3$
  - $0,3x_1 + 0,2x_2 = 15$
  - $x_2 = 33 + D$
  - Επιλύουμε ως προς το $x_1$:
    - $x_1=28-(2/3)D$
  - Αντικαθιστούμε στην αντικειμενική συνάρτηση και έχουμε
    - $\mathbf{z = 1,5x_1 + 2,5x_2 \Rightarrow}$
      $\mathbf{z = 124,5 + 1,5 \cdot D}$

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- **Ανάλυση σταθερών δεξιού μέλους**
- Μελέτη της επίδρασης της μεταβολής του $b_3$
  - Η αύξηση κατά μια μονάδα του $b_3$ αυξάνει το κόστος κατά 1,5
  - Η σκιώδης τιμή ισούται με 1,5, δηλαδή αν αυξηθεί κατά μία μονάδα το πλήθος των βραδινών προβολών θα αυξηθεί το κόστος κατά 1,5

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- Ερωτήσεις
  1. Γιατί ενώ μια βραδινή προβολή κοστίζει 2,5 η μείωση της απαίτησης κατά μία μονάδα (δηλαδή από 33 σε 32) βελτιώνει το συνολικό κόστος σύμφωνα με τη σκιώδη τιμή (1,5);
  2. Γιατί ενώ μια βραδινή προβολή κοστίζει 2,5 η αύξηση της απαίτησης κατά μία μονάδα (δηλαδή από 33 σε 34) αυξάνει το συνολικό κόστος σύμφωνα με τη σκιώδη τιμή (1,5);

# Ανάλυση ευαισθησίας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- Αυτό το φαινομενικά περίεργο γεγονός οφείλεται στο ότι η μείωση (ή αύξηση) της απαίτησης των βραδινών προβολών αλλάζει ταυτόχρονα και την τιμή της άλλης μεταβλητής απόφασης ($x_1$)