



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Επιχειρησιακή Έρευνα

Ενότητα 6: Εφαρμογές Γραμμικού
Προγραμματισμού (2^ο μέρος)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού (2^ο μέρος)

Υποενότητα 1

Σκοποί 1^{ης} υποενότητας

- Να μάθουν οι φοιτητές το πως μπορεί να εφαρμοστεί ο Γραμμικός Προγραμματισμός για την μοντελοποίηση και την επίλυση των παρακάτω προβλημάτων
 - Το πρόβλημα της δίαιτας
 - Πρόβλημα επιλογής διαφημιστικών μέσων
 - Έρευνα μάρκετινγκ



Περιεχόμενα 1^{ης} υποενότητας

- Το πρόβλημα της δίαιτας
- Πρόβλημα επιλογής διαφημιστικών μέσων
- Έρευνα μάρκετινγκ



Πρόβλημα δίαιτας (1/9)

- Μια επιχείρηση τροφίμων θέλει να εισάγει στην αγορά μία νέα δυναμωτική μπάρα δημητριακών
- Το προϊόν αυτό πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές σε βιταμίνες
- **Ένα κιλό** του νέου αυτού προϊόντος πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 80 μονάδες βιταμίνης Α, 100 μονάδες βιταμίνης Γ, 60 μονάδες βιταμίνης Ε, 260 μονάδες πρωτεϊνών και το πολύ 2300 θερμίδες



Πρόβλημα δίαιτας (2/9)

- Δεδομένα προβλήματος

Απαιτούμενο διατροφικό στοιχείο	Αριθμός διατροφικών στοιχείων ανά μονάδα συστατικού				Διατροφική απαίτηση ανά μονάδα τροφής
	1	2	3	4	
Βιταμίνη Α	80	115	100	90	≥ 80
Βιταμίνη Γ	110	90	85	100	≥ 100
Βιταμίνη Ε	50	70	105	80	≥ 60
Πρωτεΐνες	250	300	210	240	≥ 260
Θερμίδες	480	510	470	530	≤ 2300
Κόστος ανά μονάδα συστατικού	180	160	145	200	



Πρόβλημα δίαιτας (3/9)

- **Αντικειμενικός σκοπός του προβλήματος**
 - ο προσδιορισμός των ποσοτήτων που πρέπει να αναμειχθούν από κάθε συστατικό, ώστε να παρασκευαστεί, με το μικρότερο δυνατό κόστος, η νέα δυναμωτική μπάρα δημητριακών που ικανοποιεί τις συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές



Πρόβλημα δίαιτας (4/9)

- **Μεταβλητές απόφασης**
 - x_j ($j = 1,2,3,4$): η ποσότητα του συστατικού j που πρέπει να αναμειχθεί για την παρασκευή ενός κιλού της νέας δυναμωτικής μπάρας δημητριακών



Πρόβλημα δίαιτας (5/9)

- **Αντικειμενική συνάρτηση**

- $\text{Min } z = 180x_1 + 160x_2 + 145x_3 + 200x_4$



Πρόβλημα δίαιτας (6/9)

- **Περιορισμοί**

- $80x_1 + 115x_2 + 100x_3 + 90x_4 \geq 80$ (βιταμίνη Α)
- $110x_1 + 90x_2 + 85x_3 + 100x_4 \geq 100$ (βιταμίνη Γ)
- $50x_1 + 70x_2 + 105x_3 + 80x_4 \geq 60$ (βιταμίνη Ε)
- $250x_1 + 300x_2 + 210x_3 + 240x_4 \geq 260$ (πρωτεΐνες)
- $480x_1 + 510x_2 + 470x_3 + 530x_4 \leq 2300$ (θερμίδες)
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ (άθροισμα ποσοτήτων ένα κιλό)



Πρόβλημα δίαιτας (7/9)

- **Μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού**

- Αντικειμενική συνάρτηση

- $\text{Min } z = 180x_1 + 160x_2 + 145x_3 + 200x_4$

- Περιορισμοί

- $80x_1 + 115x_2 + 100x_3 + 90x_4 \geq 80$ (βιταμίνη Α)
 - $110x_1 + 90x_2 + 85x_3 + 100x_4 \geq 100$ (βιταμίνη Γ)
 - $50x_1 + 70x_2 + 105x_3 + 80x_4 \geq 60$ (βιταμίνη Ε)
 - $250x_1 + 300x_2 + 210x_3 + 240x_4 \geq 260$ (πρωτεΐνες)
 - $480x_1 + 510x_2 + 470x_3 + 530x_4 \leq 2300$ (θερμίδες)
 - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ (άθροισμα ποσοτήτων ένα κιλό)
 - $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$



Πρόβλημα δίαιτας (8/9)

- Λύση

Μεταβλητή	Τιμή μεταβλητής	Μοναδιαίο μεταβλητό κόστος	Μεταβλητό κόστος
x_1	0,537	180	96,66
x_2	0,317	160	50,72
x_3	0,146	145	21,17
x_4	0,000	200	0,00
Σύνολο	1,000		168,55



Πρόβλημα διαίτας (9/9)

- **Ερμηνεία**

- $e1 = 14,02$ (περισσότερη βιταμίνη)
- $e2 = 0$
- $e3 = 4,39$ (περισσότερη βιταμίνη)
- $e4 = 0$
- $s5 = 1811,95$ (λιγότερες θερμίδες)



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (1/14)

- **Πρόβλημα**

- Προσδιορισμός του αριθμού των προβολών/καταχωρήσεων που πρέπει να γίνουν σε διάφορα διαφημιστικά μέσα (τηλεόραση, ραδιόφωνο, εφημερίδες, κλπ.) ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική ακροαματικότητα μιας διαφημιστικής εκστρατείας



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (2/14)

- **Περιορισμοί**

- Προϋπολογισμός της διαφημιστικής εκστρατείας
- Μέγιστος (ή ελάχιστος) αριθμός προβολών/καταχωρήσεων που μπορούν να γίνουν στα διαφημιστικά μέσα
- Χαρακτηριστικά των ακροατών
- Πολιτική της επιχείρησης



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (3/14)

- Οι υπεύθυνοι του τμήματος διαφήμισης μιας επιχείρησης αποφασίζουν να διαφημίσουν ένα νέο προϊόν της επιχείρησης
- Επιλέγουν, αρχικά, να πραγματοποιήσουν μια δοκιμαστική διαφήμιση στην τηλεόραση σε ένα συγκεκριμένο τριήμερο Παρασκευής-Σαββάτου-Κυριακής



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (4/14)

- Το κόστος μιας προβολής, καθώς και η ακροαματικότητα κάθε προβολής του συγκεκριμένου καναλιού, διαφέρουν ανάλογα με την ώρα και την ημέρα

Διαφημιστικό μέσο	Κόστος μιας προβολής	Μονάδες αναμενόμενης ακροαματικότητας
Παρασκευή – ημέρα	400.000	5000
Σάββατο – ημέρα	450.000	5500
Κυριακή – ημέρα	450.000	5700
Παρασκευή – νύχτα	500.000	7500
Σάββατο – νύχτα	550.000	8200
Κυριακή – νύχτα	550.000	8400



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (5/14)

- **Σκοπός**

- Μεγιστοποίηση της συνολικής ακροαματικότητας

- **Περιορισμοί**

1. Το συνολικό ποσό για όλες τις προβολές να μην υπερβαίνει τα 45.000.000
2. Το ποσό για τις προβολές της Παρασκευής να μην είναι μεγαλύτερο από 11.000.000



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (6/14)

- **Περιορισμοί**

3. Το ποσό για τις προβολές του Σαββάτου να μην υπερβαίνει τα 14.400.000
4. Ο συνολικός αριθμός προβολών την ημέρα να είναι τουλάχιστον 20
5. Ο συνολικός αριθμός των προβολών τη νύχτα να είναι τουλάχιστον το 50% των συνολικών προβολών



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (7/14)

- **Περιορισμοί**

6. Ο μέγιστος αριθμός προβολών την κάθε ημέρα να είναι το πολύ 12
7. Ο μέγιστος αριθμός προβολών την κάθε νύχτα να είναι το πολύ 18



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (8/14)

- **Μεταβλητές απόφασης**
 - x_1 : προβολές Παρασκευή ημέρα
 - x_2 : προβολές Σάββατο ημέρα
 - x_3 : προβολές Κυριακή ημέρα
 - x_4 : προβολές Παρασκευή νύχτα
 - x_5 : προβολές Σάββατο νύχτα
 - x_6 : προβολές Κυριακή νύχτα



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (9/14)

- Αντικειμενική συνάρτηση
 - $\text{Max } z = 5000x_1 + 5500x_2 + 5700x_3 + 7500x_4 + 8200x_5 + 8400x_6$



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (10/14)

- **Περιορισμοί**

1. Προϋπολογισμός διαφήμισης

$$400x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 500x_4 + 550x_5 + 550x_6 \leq 45.000$$

(χιλιάδες €)

2. Προβολές Παρασκευής

$$400x_1 + 500x_4 \leq 11000$$

3. Προβολές Σαββάτου

$$450x_2 + 550x_5 \leq 14400$$



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (11/14)

- **Περιορισμοί**

4. Συνολικός αριθμός προβολών ημέρας

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 20$$

5. Συνολικός αριθμός προβολών νύχτας

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 0,5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \Rightarrow$$

$$-0,5x_1 - 0,5x_2 - 0,5x_3 + 0,5x_4 + 0,5x_5 + 0,5x_6 \geq 0$$



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (12/14)

- Συνολικό μοντέλο

$$\text{Max } z = 5000x_1 + 5500x_2 + 5700x_3 + 7500x_4 + 8200x_5 + 8400x_6$$

$$1. \quad 400x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 500x_4 + 550x_5 + 550x_6 \leq 45.000$$

$$2. \quad 400x_1 + 500x_4 \leq 11000$$

$$3. \quad 450x_2 + 550x_5 \leq 14400$$

$$4. \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 20$$

$$5. \quad -0,5x_1 - 0,5x_2 - 0,5x_3 + 0,5x_4 + 0,5x_5 + 0,5x_6 \geq 0$$

$$6. \quad x_1, x_2, x_3 \leq 12$$

$$7. \quad x_4, x_5, x_6 \leq 18$$

$$8. \quad x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5,6$$



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (13/14)

- Λύση

Μεταβλητή	Αριθμός προβολών	Μονάδες ακροαματικότητας	Συνολική ακροαματικότητα
x_1	5	5000	25.000
x_2	10	5500	55.000
x_3	12	5700	68.400
x_4	18	7500	135.000
x_5	18	8200	147.600
x_6	18	8400	151.200
Σύνολο			582.200



Επιλογή διαφημιστικών μέσων (14/14)

- Ερμηνεία
 - $s_1 = 4300$ (αχρησιμοποίητα χρήματα)
 - $s_2 = 0$
 - $s_3 = 0$
 - $e_4 = 7$ (περισσότερες προβολές ημέρας)
 - $e_5 = 13,5$ (περισσότερες προβολές νύχτας)
 - $s_6 = 7$ (λιγότερες προβολές Παρασκευής ημέρα)
 - $s_7 = 2$ (λιγότερες προβολές Σάββατο ημέρα)
 - $s_8 = s_9 = s_{10} = s_{11} = 0$



Έρευνα μάρκετινγκ (1/12)

- **Πρόβλημα**
 - Διεξαγωγή έρευνας από μία εταιρία έρευνας μάρκετινγκ ώστε να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις ενός πελάτη με το μικρότερο δυνατό κόστος



Έρευνα μάρκετινγκ (2/12)

- Μια εταιρία έρευνας μάρκετινγκ πρόκειται να διεξάγει για λογαριασμό ενός πελάτη μία έρευνα προκειμένου να εκτιμήσει την ανταπόκριση των καταναλωτών σε ένα νέο προϊόν



Έρευνα μάρκετινγκ (3/12)

- Η έρευνα θα γίνει με συνεντεύξεις και το κόστος της δίνεται, ανά κατηγορία συνέντευξης, από τον παρακάτω πίνακα

Κατηγορία νοικοκυριού	Ημέρα	Βράδυ
Με παιδιά	1500	1800
Χωρίς παιδιά	1300	1600
Ενός ατόμου	1000	1200



Έρευνα μάρκετινγκ (4/12)

- **Περιορισμοί**

1. Η έρευνα πρέπει να καλύψει, με το μικρότερο δυνατό κόστος, 800 νοικοκυριά
2. Να ερωτηθούν
 - τουλάχιστον 400 νοικοκυριά με παιδιά
 - τουλάχιστον 200 νοικοκυριά χωρίς παιδιά
 - τουλάχιστον 100 νοικοκυριά ενός ατόμου
3. Ο αριθμός των νοικοκυριών που θα ερωτηθούν τη νύχτα να είναι μεγαλύτερος ίσος του αριθμού που θα ερωτηθούν τη μέρα



Έρευνα μάρκετινγκ (5/12)

- **Περιορισμοί**

4. Τουλάχιστον το 50% των συνεντεύξεων σε νοικοκυριά με παιδιά να γίνει τη νύχτα
5. Τουλάχιστον το 60% των συνεντεύξεων σε νοικοκυριά χωρίς παιδιά να γίνει τη νύχτα
6. Τουλάχιστον το 70% των συνεντεύξεων σε νοικοκυριά ενός ατόμου να γίνει τη νύχτα



Έρευνα μάρκετινγκ (6/12)

- **Μεταβλητές απόφασης**

- x_{11} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών με παιδιά την ημέρα
- x_{12} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών με παιδιά τη νύχτα
- x_{21} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών χωρίς παιδιά την ημέρα
- x_{22} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών χωρίς παιδιά τη νύχτα
- x_{31} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών ενός ατόμου την ημέρα
- x_{32} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών ενός ατόμου τη νύχτα



Έρευνα μάρκετινγκ (7/12)

- Αντικειμενική συνάρτηση

$$\text{Min } z = 1500x_{11} + 1800x_{12} + 1300x_{21} + 1600x_{22} + 1000x_{31} + 1200x_{32}$$



Έρευνα μάρκετινγκ (8/12)

- **Περιορισμοί**

1. Συνολικός αριθμός νοικοκυριών

$$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{32} = 800$$

2. Ελάχιστος αριθμός συνεντεύξεων ανά κατηγορία νοικοκυριού

$$x_{11} + x_{12} \geq 400$$

$$x_{21} + x_{22} \geq 200$$

$$x_{31} + x_{32} \geq 100$$



Έρευνα μάρκετινγκ (9/12)

- **Περιορισμοί**

3. Οι βραδινές συνεντεύξεις θα πρέπει να είναι τουλάχιστον όσες είναι και οι πρωινές

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq x_{11} + x_{21} + x_{31}$$

$$-x_{11} + x_{12} - x_{21} + x_{22} - x_{31} + x_{32} \geq 0$$

4. Ελάχιστος αριθμός βραδινών συνεντεύξεων ανά κατηγορία νοικοκυριού

$$x_{12} \geq 0,5(x_{11} + x_{12}) \Rightarrow -0,5 x_{11} + 0,5x_{12} \geq 0$$

$$x_{22} \geq 0,6(x_{21} + x_{22}) \Rightarrow -0,6 x_{21} + 0,4x_{22} \geq 0$$

$$x_{32} \geq 0,7(x_{31} + x_{32}) \Rightarrow -0,7 x_{31} + 0,3x_{32} \geq 0$$



Έρευνα μάρκετινγκ (10/12)

- Συνολικό μοντέλο
- $\text{Min } z = 1500x_{11} + 1800x_{12} + 1300x_{21} + 1600x_{22} + 1000x_{31} + 1200x_{32}$
 1. $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{32} = 800$
 2. $x_{11} + x_{12} \geq 400$
 3. $x_{21} + x_{22} \geq 200$
 4. $x_{31} + x_{32} \geq 100$
 5. $-x_{11} + x_{12} - x_{21} + x_{22} - x_{31} + x_{32} \geq 0$
 6. $x_{12} \geq 0,5(x_{11} + x_{12}) \Rightarrow -0,5x_{11} + 0,5x_{12} \geq 0$
 7. $x_{22} \geq 0,6(x_{21} + x_{22}) \Rightarrow -0,6x_{21} + 0,4x_{22} \geq 0$
 8. $x_{32} \geq 0,7(x_{31} + x_{32}) \Rightarrow -0,7x_{31} + 0,3x_{32} \geq 0$
 9. $x_{ij} \geq 0, i=1,2,3, j=1,2$



Έρευνα μάρκετινγκ (11/12)

- Λύση

Μεταβλητή	Αριθμός συνεντεύξεων	Κόστος συνέντευξης	Συνολικό κόστος
x_{11}	200	1500	300.000
x_{12}	200	1800	360.000
x_{21}	80	1300	104.000
x_{22}	120	1600	192.000
x_{31}	60	1000	60.000
x_{32}	140	1200	168.000
Σύνολο			1.184.000



Έρευνα μάρκετινγκ (12/12)

- Ερμηνεία

- $e_2 = 0$

- $e_3 = 0$

- $e_4 = 100$ (περισσότερες συνεντεύξεις ενός ατόμου)

- $e_5 = 120$ (περισσότερες συνεντεύξεις βραδινές ώρες)

- $e_6 = 0$

- $e_7 = 0$

- $e_8 = 0$



Τέλος Υποενότητας 1

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Επιχειρησιακή Έρευνα. Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού (2^ο μέρος)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT119>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

