

Γραμμικός Προγραμματισμός

Παράδειγμα – ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Η βιοτεχνία ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ παράγει δύο βασικά προϊόντα: τραπέζια και καρέκλες υψηλής ποιότητας. Η διαδικασία παραγωγής και για τα δύο προϊόντα περιλαμβάνει την επεξεργασία τους στα τρία στάδια της γραμμής παραγωγής: το **ξυλουργείο**, το **βαφείο** και το **στιλβωτήριο**.

Το τμήμα παραγωγής της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ έχει τυποποιήσει τη διαδικασία κατασκευής των προϊόντων της και έχει προσδιορίσει το μέσο χρόνο εργασίας ανά παραγόμενη μονάδα σε κάθε στάδιο.

Η κατασκευή κάθε τραπεζιού απαιτεί 8 ώρες εργασίας στο ξυλουργείο, 4 ώρες στο βαφείο και 4 ώρες στο στιλβωτήριο, ενώ αντίστοιχα οι ώρες που απαιτούνται για κάθε καρέκλα είναι 8 στο ξυλουργείο, 2 στο βαφείο και 3 στο στιλβωτήριο.

Για τον επόμενο μήνα, ο υπεύθυνος παραγωγής έχει προσδιορίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο ξυλουργείο ανέρχονται συνολικά σε 960, στο βαφείο σε 400, ενώ στο στιλβωτήριο σε 420. Από τα στοιχεία που διαθέτει η διεύθυνση οικονομικών υπηρεσιών της εταιρείας, προκύπτει ότι το μικτό κέρδος της επιχείρησης με βάση τις τρέχουσες τιμές πώλησης, ανέρχεται σε 140€ για κάθε τραπέζι, και 100€ για κάθε καρέκλα.

Γ.Π. - ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

- ▶ Καθορισμός του προβλήματος
 - ▶ Μίξη παραγωγής (product mix):
Καθορισμός των ποσοτήτων παραγωγής τραπεζιών και καρεκλών για τον επόμενο μήνα, έτσι ώστε να επιτευχθεί το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος

Στην απλοποιημένη αυτή μορφή του προβλήματος αγνοούμε προς το παρόν τυχόν αποθέματα που μπορεί να υπάρχουν, και υποθέτουμε ότι η ζήτηση για τα προϊόντα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ είναι ικανή να απορροφήσει την οποιαδήποτε ποσότητα θα παραχθεί

Στη γενική περίπτωση ένα πρόβλημα μίξης παραγωγής αφορά πολλά προϊόντα που χρησιμοποιούν κοινούς πόρους (εργασία, πρώτες ύλες, υλικά, αποθηκευτικούς χώρους, κεφάλαια, μέσα διανομής κ.λπ.

Η βασική προσέγγιση μοντελοποίησης παραμένει όμως η ίδια.

Γ.Π. ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

▶ Ερωτήματα για Λήψη Αποφάσεων

- ▶ Ποιοι είναι οι δυνατοί συνδυασμοί ποσοτήτων των δύο προϊόντων που είναι δυνατόν να παραχθούν με τους διαθέσιμους πόρους;
- ▶ Ποιος συνδυασμός δίνει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα π.χ. μέγιστο κέρδος (βελτιστοποίηση / αριστοποίηση);
- ▶ Ποιοι είναι οι περιορισμοί που τίθενται;
 - ▶ Ποιοι από αυτούς είναι δεσμευτικοί;
- ▶ Τι ποσότητα πόρων (ωρών) θα αναλωθούν σε κάθε τμήμα παραγωγής;
- ▶ Αν υπάρχουν διαθέσιμοι πόροι, σε ποιο/ά τμήμα/τα θα πρέπει να ανακατανεμηθούν; Τι ποσό είμαι διατεθειμένος να πληρώσω (π.χ. υπερωρίες) για να αποκτήσω επί πλέον δυναμικό παραγωγής;
- ▶ Τι θα συμβεί αν διαφοροποιηθούν οι συντελεστές κέρδους των προϊόντων μου (π.χ. λόγω ανταγωνισμού);

Γραμμικός Προγραμματισμός

Παράδειγμα – ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Δεδομένα

Τμήμα Παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας		Διαθέσιμες ώρες τον μήνα
	X1 (τραπέζια)	X2 (καρέκλες)	
Ευλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Στιλβωτήριο	4 ώρες	3 ώρες	420 ώρες
Κέρδος ανά Μονάδα Προϊόντος	140€	100 €	

Γ.Π. ΕΠΙΠΛΟΧΥΛ

▶ Μαθηματική Διατύπωση

▶ Μεταβλητές απόφασης

- ▶ *Αν αναθέταμε την επίλυση του προβλήματος σε κάποιον/α τι ακριβώς θα περιμέναμε ως απάντηση;*
 - Ποσότητα τραπεζιών που πρέπει να κατασκευασθούν $\rightarrow X1$
 - Ποσότητα καρεκλών που πρέπει να κατασκευασθούν $\rightarrow X2$

▶ Ο στόχος (αντικειμενική συνάρτηση)

- ▶ Συνήθως είναι η μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση κάποιου κρίσιμου μεγέθους. π.χ. κέρδους, κόστους, χρόνου, φορτίου κ.λπ.
- ▶ Εκφράζεται ως συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης
- ▶ **Κρίσιμο ερώτημα:** Μπορώ να υπολογίσω τη τιμή του στόχου όταν γνωρίζω τις τιμές των μεταβλητών; Αν όχι πίσω στο προηγούμενο βήμα.

$$\text{Συνολικό κέρδος : } 140X1 + 100X2$$

Γ.Π. ΕΠΙΠΛΟΧΥΛ

▶ Μαθηματική Διατύπωση

▶ Περιορισμοί

- ▶ Ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές των μεταβλητών; π.χ. οι διαθέσιμες ώρες παραγωγής στο ξυλουργείο είναι μόνον 960, επομένως δεν είναι δυνατόν να παραχθούν ποσότητες που αθροιστικά απαιτούν περισσότερες ώρες. Αντίστοιχα για το στιλβωτήριο και το βαφείο....
- ▶ **Κρίσιμο ερώτημα:** Μπορώ να υπολογίσω τις παραπάνω σχέσεις όταν γνωρίζω τις τιμές των μεταβλητών; Αν όχι πίσω στον καθορισμό των μεταβλητών

Περιορισμός Ωρών Ξυλουργείου: $8X1+8X2 \leq 960$

Συνέχεια

Μαθηματική διατύπωση Γ.Π.

▶ Παράδειγμα: *ΕΠΙΠΛΟΧΥΛ*

X_1 – Ποσότητα τραπεζιών

X_2 – Ποσότητα καρεκλών

Μεγιστοποίηση κέρδους: $140X_1 + 100X_2$

Υπό τους Περιορισμούς:

Ώρες Ξυλουργείου: $8X_1 + 8X_2 \leq 960$

Ώρες Βαφείου: $4X_1 + 2X_2 \leq 400$

Ώρες Στιλβωτηρίου: $4X_1 + 3X_2 \leq 420$

και $X_1, X_2 \geq 0$

Διαμόρφωση μοντέλου ΓΠ (Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ)

Τμήμα Παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας		Διαθέσιμες ώρες σε κάθε τμήμα
	X1 (τραπέζια)	X2 (καρέκλες)	
Ξυλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Στιλβωτήριο	4 ώρες	3 ώρες	420 ώρες
Κέρδος ανά Μονάδα Προϊόντος	140€	100 €	

Μεταβλητές: X1: η ποσότητα τραπεζιών, X2: ποσότητα καρεκλών

Η αντικειμενική συνάρτηση: Συνολικό κέρδος : $Z = 140X1 + 100X2$

Οι περιορισμοί του προβλήματος:

$$\begin{aligned} \text{Ξυλουργείου (Ξ):} \quad & 8X1 + 8X2 \leq 960 \\ & \text{(απαιτούμενες ώρες)} \leq \text{διαθέσιμες} \end{aligned}$$

$$\text{Βαφείου (Β):} \quad 4X1 + 2X2 \leq 400$$

$$\text{Στιλβωτηρίου (Σ):} \quad 4X1 + 3X2 \leq 420$$

Γραφική Επίλυση (Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ)

► Απεικόνιση των τιμών των μεταβλητών

Μεγιστοποίηση

Συνολικού κέρδους : $Z = 140 X_1 + 100 X_2$

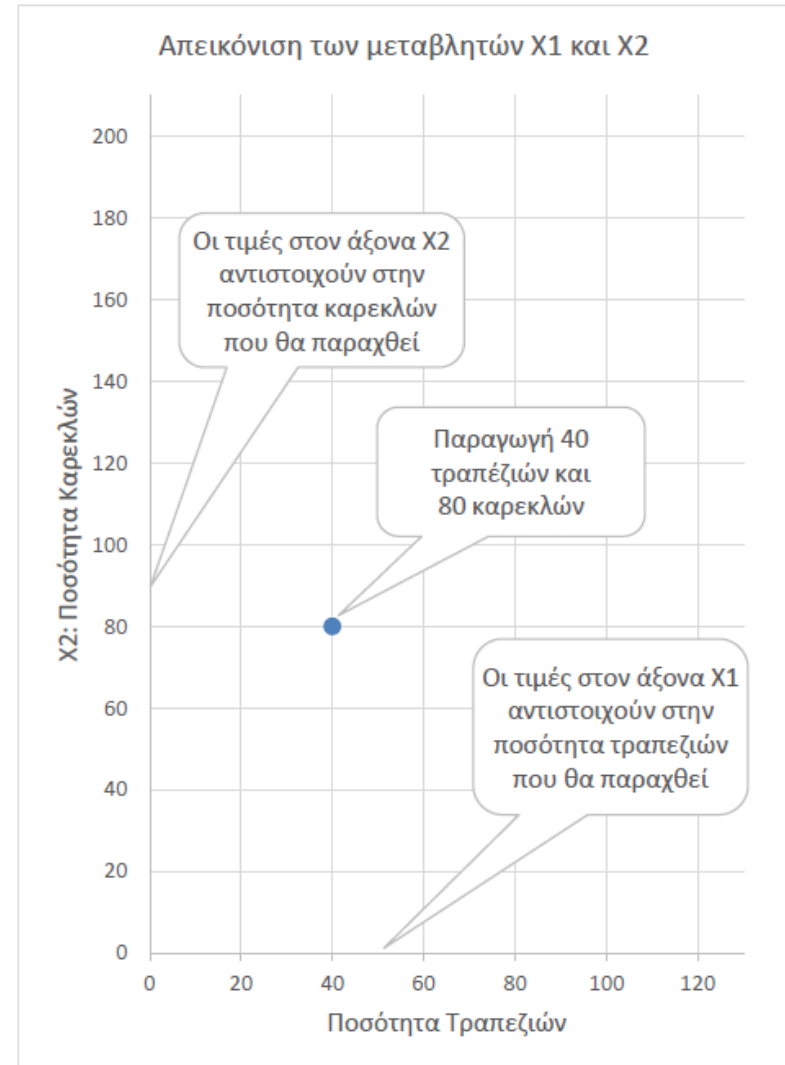
υπό τους περιορισμούς:

$8X_1 + 8X_2 \leq 960$ (Ξυλουργείο)

$4X_1 + 2X_2 \leq 400$ (Βαφείο)

$4X_1 + 3X_2 \leq 420$ (Στιλβωτήριο)

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$



Γραφική Επίλυση (Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ)

► Απεικόνιση των περιορισμών

$$\text{Ξυλουργείο): } 8X_1 + 8X_2 = 960$$

$$X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 120$$

$$X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 120$$

Μεγιστοποίηση

Συνολικού κέρδους : $Z = 140 X_1 + 100 X_2$

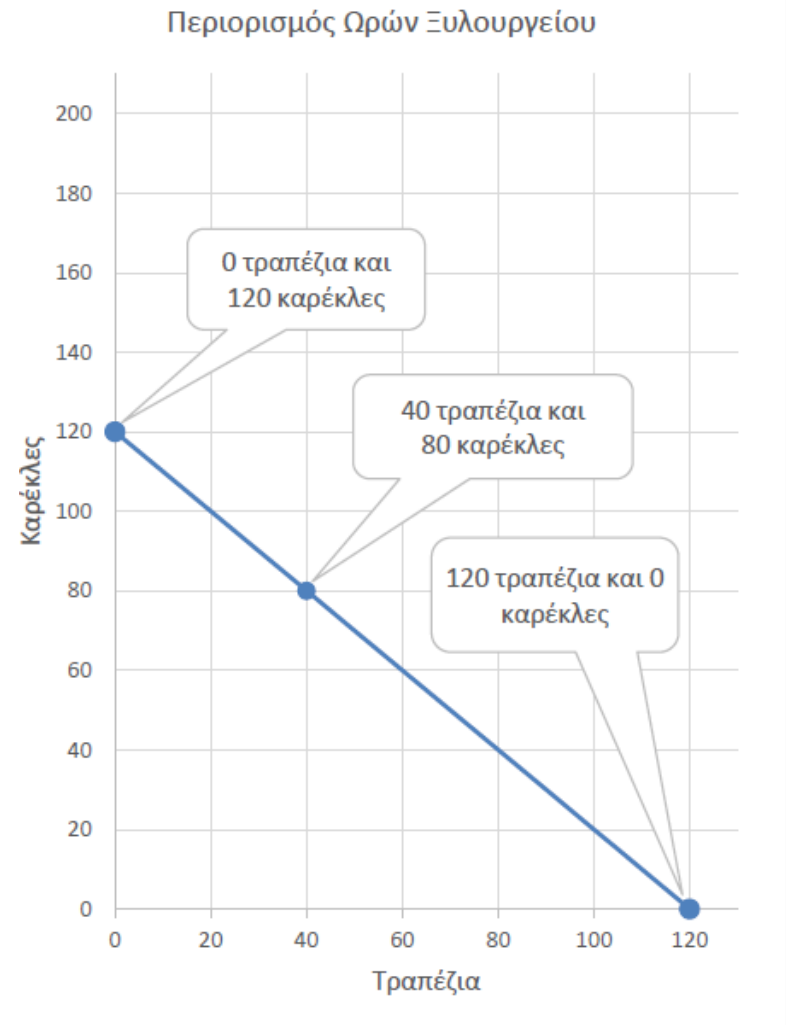
υπό τους περιορισμούς:

$$8X_1 + 8X_2 \leq 960 \quad (\text{Ξυλουργείο})$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 400 \quad (\text{Βαφείο})$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 420 \quad (\text{Στιλβωτήριο})$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$



Γραφική Επίλυση (Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ)

► Απεικόνιση των περιορισμών

$$\text{Βαφείο): } 4X_1 + 2X_2 = 400$$

$$X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 200$$

$$X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 100$$

Μεγιστοποίηση

Συνολικού κέρδους : $Z = 140 X_1 + 100 X_2$

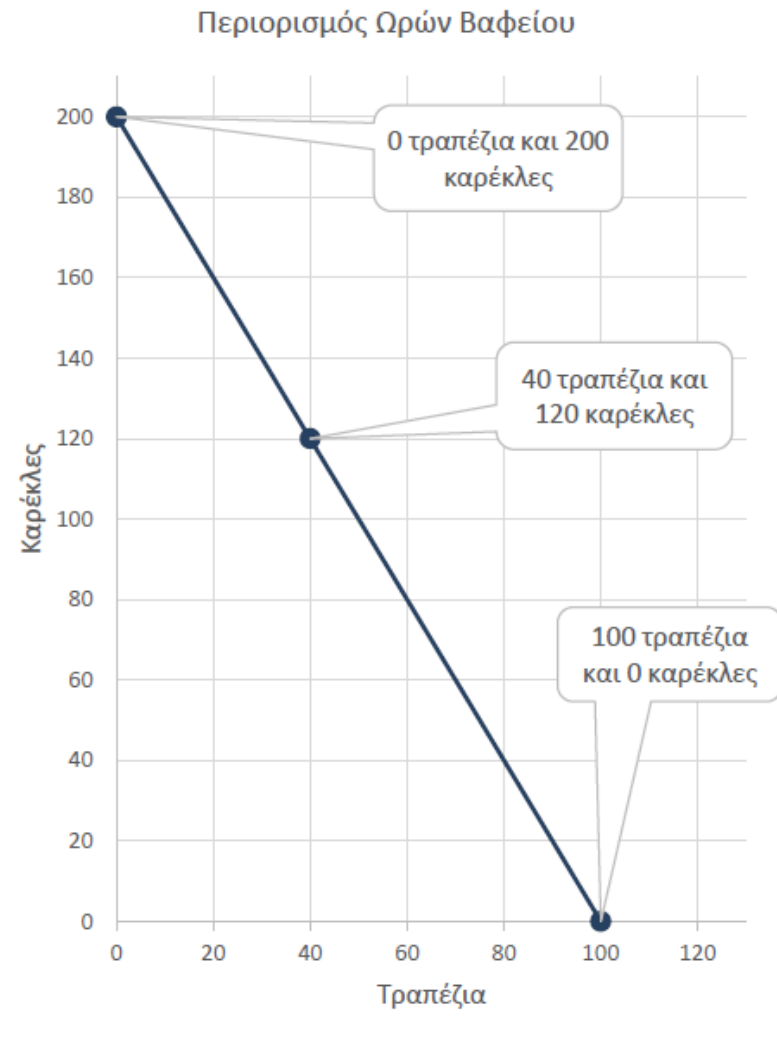
υπό τους περιορισμούς:

$$8X_1 + 8X_2 \leq 960 \quad (\text{Ξυλουργείο})$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 400 \quad (\text{Βαφείο})$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 420 \quad (\text{Στιλβωτήριο})$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$



Γραφική Επίλυση (Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ)

► Απεικόνιση περιοχής εφικτών λύσεων

Περιορισμοί Ξυλουργείου & Βαφείου

Μεγιστοποίηση

Συνολικού κέρδους : $Z = 140 X_1 + 100 X_2$

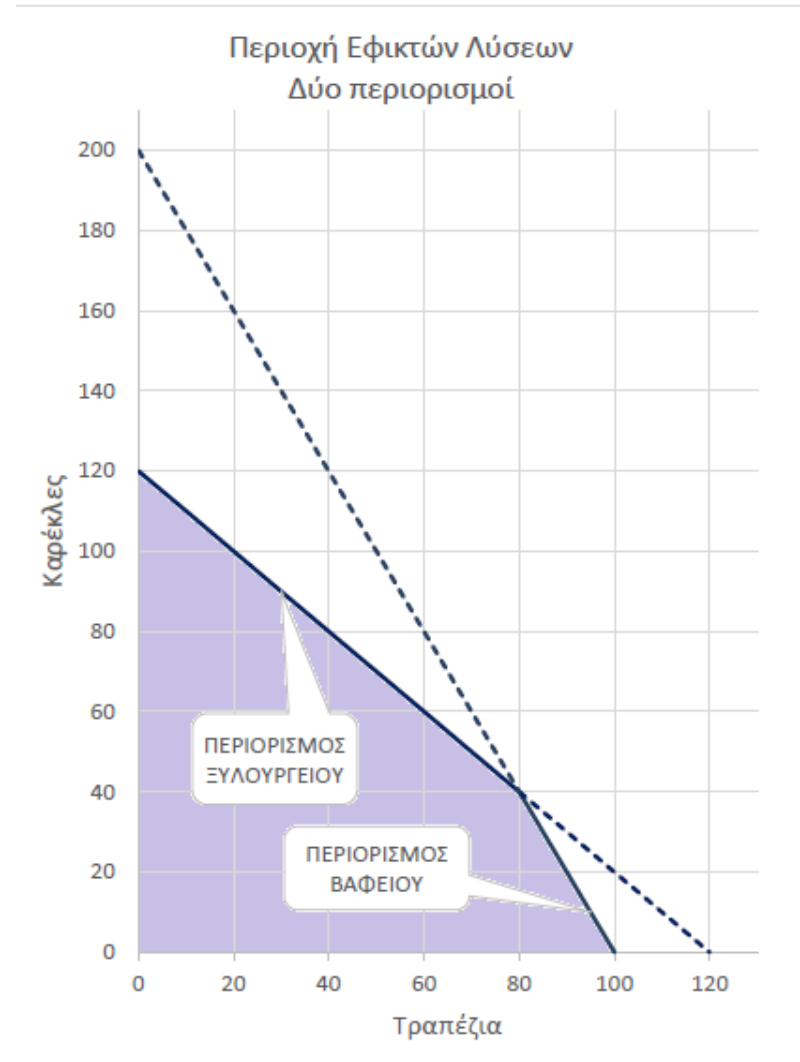
υπό τους περιορισμούς:

$$8X_1 + 8X_2 \leq 960 \quad (\text{Ξυλουργείο})$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 400 \quad (\text{Βαφείο})$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 420 \quad (\text{Στιλβωτήριο})$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$



Γραφική Επίλυση (Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ)

- ▶ Απεικόνιση περιοχής εφικτών λύσεων
 - Κυρτό Πολύγωνο (ΟΑΒΓΔ)
 - Κορυφές: Σημεία τομής των περιορισμών, συμπεριλαμβανομένων και αυτών της μη-αρνητικότητας

Μεγιστοποίηση

Συνολικού κέρδους: $Z = 140 X_1 + 100 X_2$

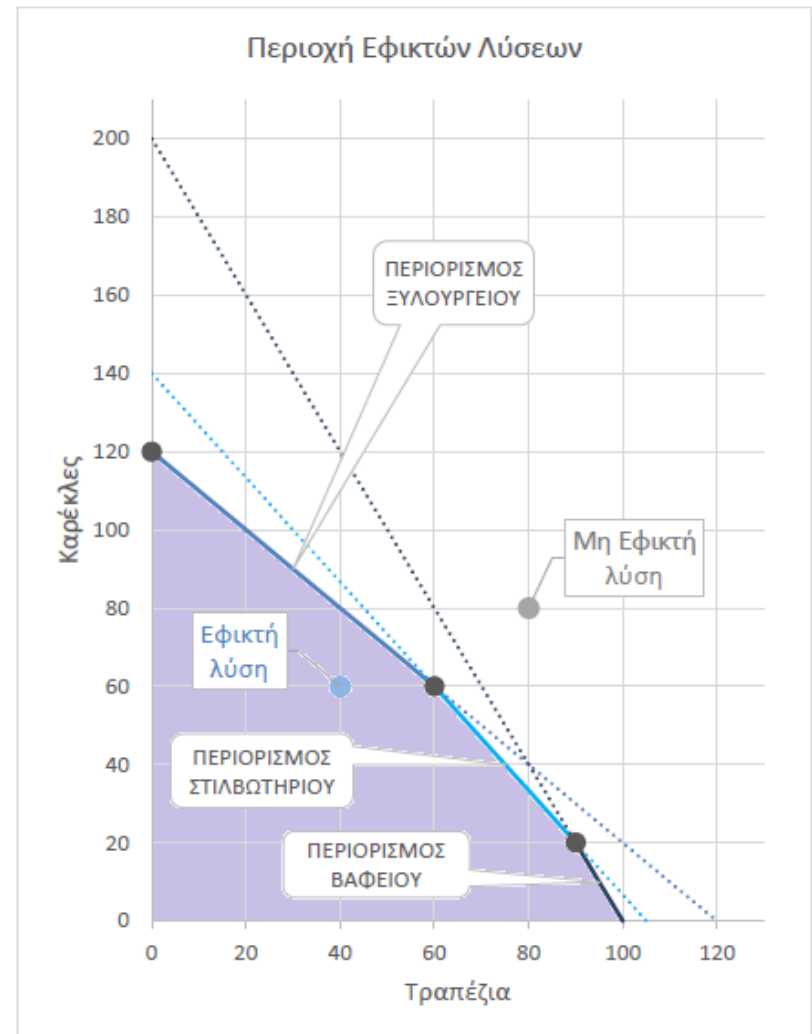
υπό τους περιορισμούς:

$$8X_1 + 8X_2 \leq 960 \quad (\text{Ξυλουργείο})$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 400 \quad (\text{Βαφείο})$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 420 \quad (\text{Στιλβωτήριο})$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$



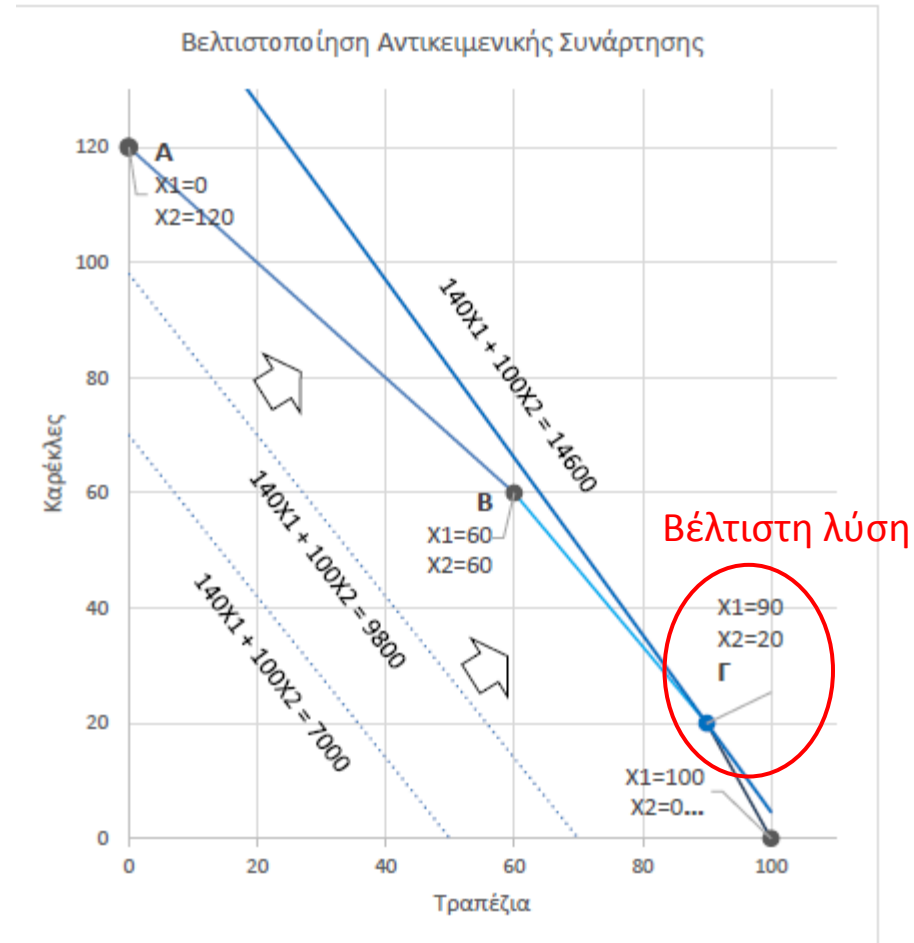
Γραφική Επίλυση (Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ)

Μέγιστο κέρδος επιτυγχάνεται μόνον σε ένα από τα ακραία σημεία.

A(0,120) B(60,60) Γ(90,20) Δ(100,0)

Μέγιστο Κέρδος στο Γ(90,20):

$$140(90) + 100(20) = 146000$$



Γραφική Επίλυση (Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ)

- ▶ Ποιος είναι ο μηχανισμός βελτιστοποίησης;
 - ▶ Τα ακραία σημεία

Κορυφή περιοχής εφικτών λύσεων	Εξισώσεις περιορισμών	Σημείο Τομής (X1, X2)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
Ο (αρχή αξόνων)	X1=0 X2=0	(0, 0)	140(0)+100(0) = 0
A	X1=0 8X1+8X2=960 (Ξ),	(0, 120)	140(0)+100(120) = 12000
B	8X1+8X2=960 (Ξ) 4X1+3X2=420 (Σ)	(60, 60)	140(60)+100(60) = 14400
Γ	4X1+3X2=420 (Σ) 4X1+2X2=400 (B)	(90, 20)	140(90)+100(20) = 14600
Δ	4X1+2X2=400 (B) X2=0	(100, 0)	140(100)+100(0) = 14000

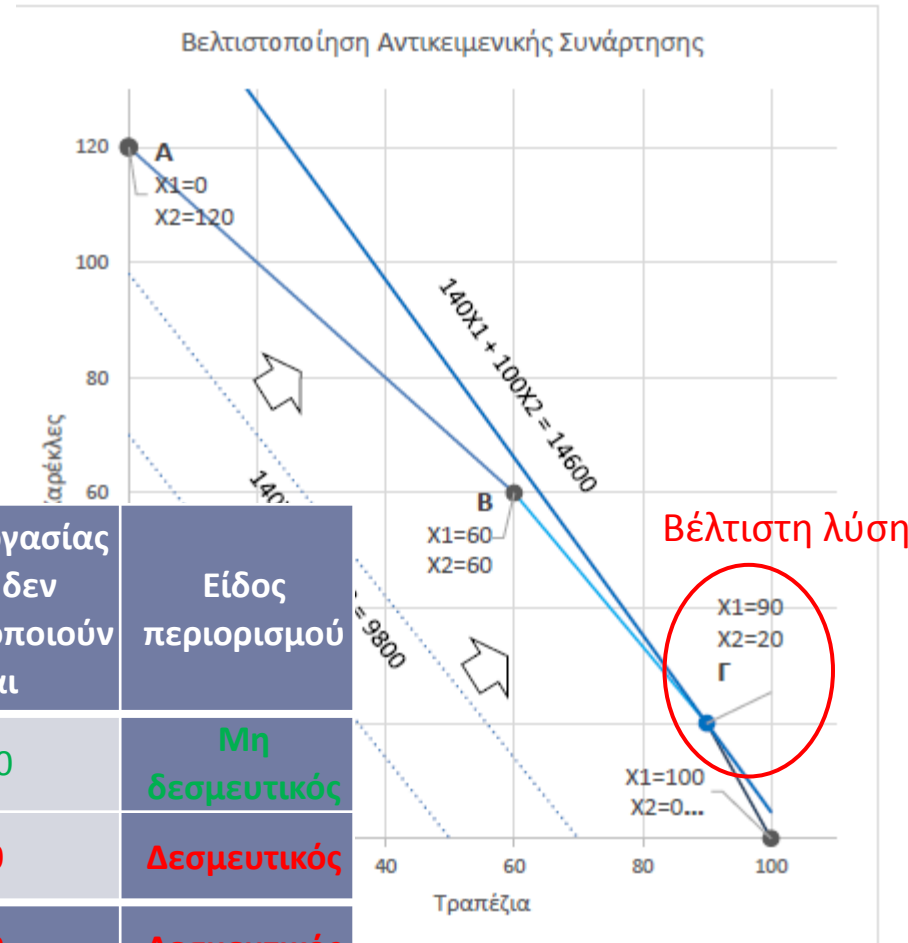
Δεσμευτικοί Περιορισμοί: (Σ) και (B)

- Εξαντλούνται όλοι οι διαθέσιμοι πόροι
- Περιορίζουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

Γραφική Επίλυση (Δεσμευτικοί περιορισμοί)

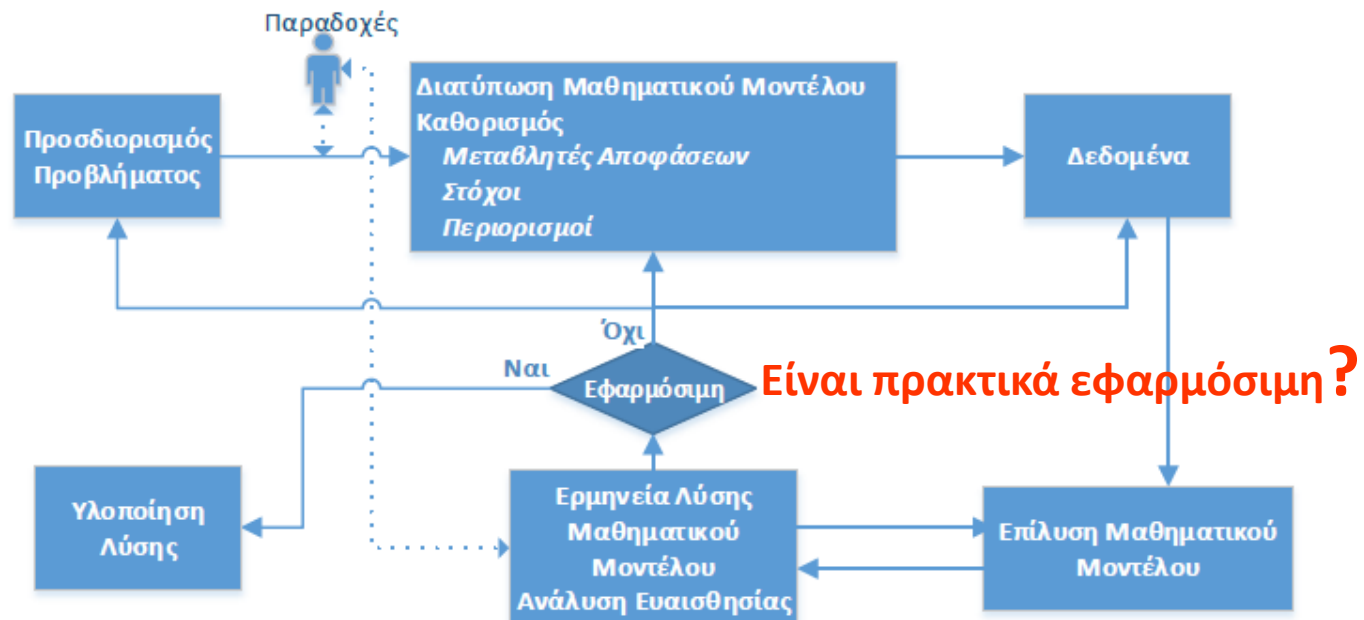
- ▶ Το σημείο Γ είναι η τομή των ευθειών που απεικονίζουν τους περιορισμούς Βαφείου και Στιλβωτηρίου
- ▶ Τι συμβαίνει στις ποσότητες των διαθέσιμων πόρων;

Περιορισμός	Απαιτούμενες ώρες εργασίας	Διαθέσιμες ώρες εργασίας	Ώρες εργασίας που δεν χρησιμοποιούνται	Είδος περιορισμού
Ξυλουργείου	$8(90) + 8(20) = 880$	960	80	Μη δεσμευτικός
Βαφείου	$4(90) + 2(20) = 400$	400	0	Δεσμευτικός
Στιλβωτηρίου	$4(90) + 3(20) = 420$	420	0	Δεσμευτικός



Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ

- ▶ Οι απαντήσεις στα ερωτήματα μας έως τώρα...
 - ▶ Τι ποσότητες τραπεζιών και καρεκλών θα πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος για την ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ?
 - ▶ Ποιοι είναι οι περιορισμοί που τίθενται;
 - ▶ Ποιοι από αυτούς είναι δεσμευτικοί;
 - ▶ Πόσες ώρες χρειαζόμαστε σε κάθε τμήμα;



Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ

Η πραγματικότητα Είναι η λύση εφαρμόσιμη?

- ▶ Το να παραχθούν 90 τραπέζια και 20 καρέκλες δεν είναι λογικό σύμφωνα με τα δεδομένα της αγοράς
 - ▶ Ο αριθμός καρεκλών δεν πρέπει να είναι μικρότερος από 2 ανά τραπέζι ούτε μεγαλύτερος από 6 ανά τραπέζι
- ▶ Ποιες θα είναι οι επιπτώσεις:
 - ▶ Πως νομίζεται ότι θα μεταβληθεί η βέλτιστη λύση?
 - ▶ Το νομίζεται ότι θα συμβεί στο κέρδος?
- ▶ Ποια θα είναι η αναθεωρημένη Μαθηματική Διατύπωση του προβλήματος. Τι πρέπει να αλλάξει:
 - ▶ Μεταβλητές;
 - ▶ Αντικειμενική Συνάρτηση;
 - ▶ Περιορισμοί;και πως;

Γ.Π. (Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ)

► Αναθεωρημένη Μαθηματική Διατύπωση

X_1 – Ποσότητα τραπεζιών

X_2 – Ποσότητα καρεκλών

Μεγιστοποίηση κέρδους:

$$Z = 140X_1 + 100X_2$$

Υπό τους Περιορισμούς:

Ώρες Ξυλουργείου: $8X_1 + 8X_2 \leq 960$

Ώρες Βαφείου: $4X_1 + 2X_2 \leq 400$

Ώρες Στιλβωτηρίου: $4X_1 + 3X_2 \leq 150$

Ελάχιστος αριθμός καρεκλών: $X_2 \geq 2X_1$ ή $2X_1 - X_2 \leq 0$

Μέγιστος αριθμός καρεκλών: $X_2 \leq 6X_1$ ή $-6X_1 + X_2 \leq 0$

και $X_1, X_2 \geq 0$