

Επιχειρησιακή Έρευνα

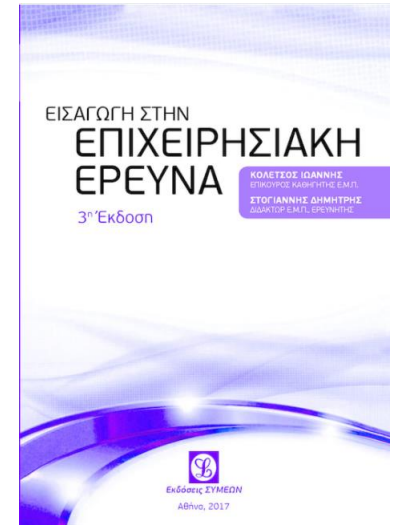
Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων και Τροφίμων,
Πανεπιστήμιο Πατρών



Διάλεξη 9-10η

Το πρόβλημα της μεταφοράς
Μέθοδος της βορειοδυτικής γωνίας
Μέθοδος ελαχίστου κόστους
Μέθοδος Vogel
Μέθοδος ανακατανομής των εκχωρήσεων



9.1-9.2

Το γενικό πρόβλημα της μεταφοράς

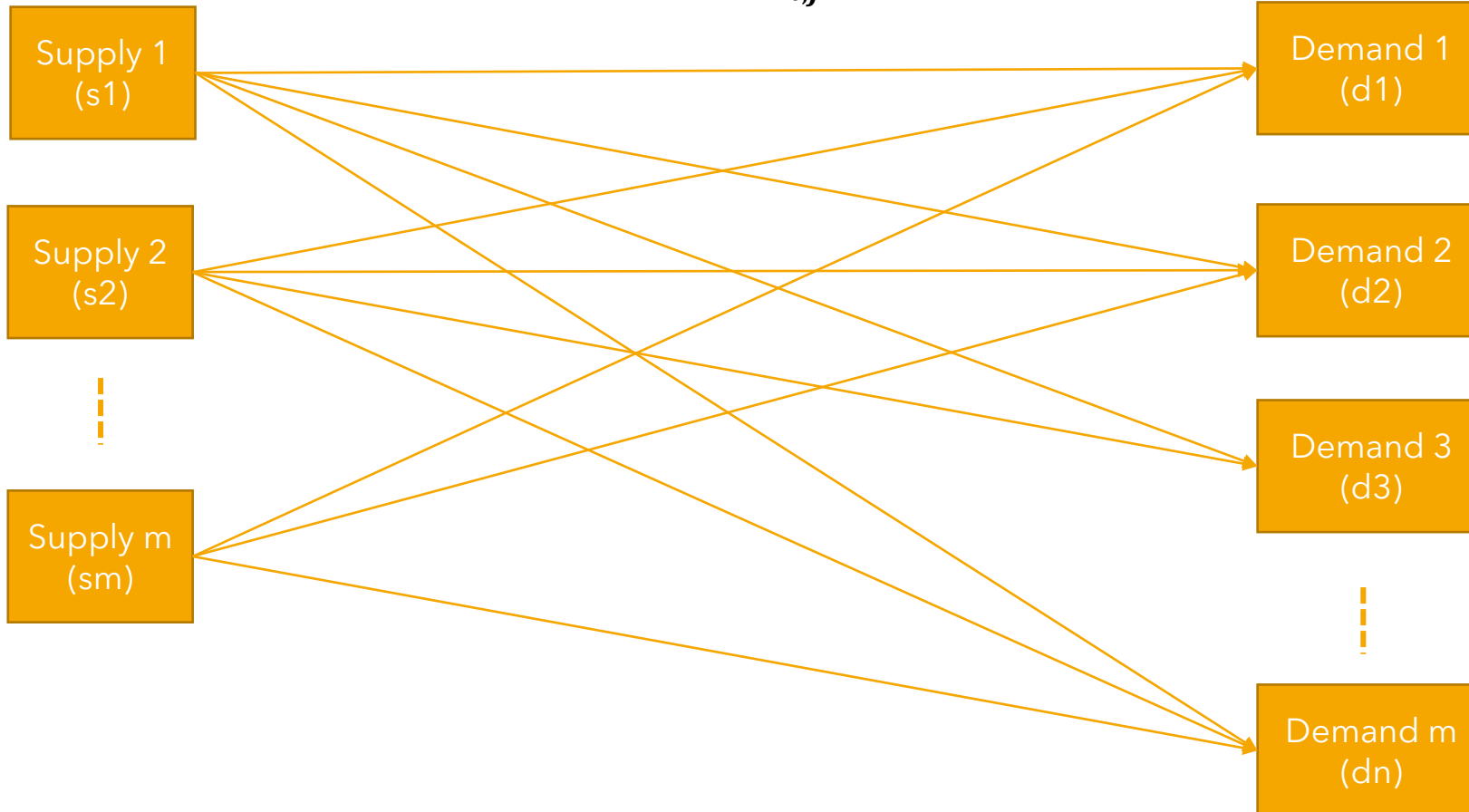
Πηγές προϊόντων
 S_i

Προορισμοί προϊόντων
 D_j

Μεταβλητές

$x_{i,j}$ ποσότητα από
της πηγή S_i στον
προορισμό D_j

Κόστος $c_{i,j}$



Αντικειμενική συνάρτηση

$$\min cost = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} x_{i,j}$$

Περιορισμοί

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \leq s_i, i = 1 \dots m$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} \geq d_j, j = 1 \dots n$$

Υπόθεση: $\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$



Παράδειγμα

- Βιομηχανία εμφιάλωσης νερού.
- 3 εργοστάσια (Έδεσσα, Λουτράκι, Λ. Όρη)
- 4 διαμετακομιστικό κέντρα (Ηράκλειο, Κερατσίνι, Βόλος, Θεσσαλονίκη)
- Στήλη προσφοράς: η μέγιστη δυνατότητα παραγωγή σε χιλιάδες κιβώτια
- Γραμμή ζήτησης: η ζήτηση σε χιλιάδες κιβώτια
- Κόστος μεταφοράς: ευρώ/χίλια κιβώτια
- Ποια είναι η οικονομικότερη στρατηγική;

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				ΠΡΟΣΦΟΡΑ
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	850
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
ΖΗΤΗΣΗ		150	700	250	500	1600



Παράδειγμα (συν.)

Διατυπώνουμε τις μεταβλητές (μεταβλ. αποφάσεων)

- Οι μεταβλητές x_i αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες που παράγονται και μεταφέρονται στα διαμετακομιστικό κέντρα (σε χιλιάδες κιβώτια)

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ			
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	x_1	x_2	x_3	x_4
	Λουτράκι	x_5	x_6	x_7	x_8
	Λ. Όρη	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ			
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$	$x_{1,4}$
	Λουτράκι	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$	$x_{2,4}$
	Λ. Όρη	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	$x_{3,3}$	$x_{3,4}$

Παράδειγμα (συν.)

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ			
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160
	Λουτράκι	180	80	240	300
	Λ. Όρη	120	300	500	440

Διατύπωση του κριτηρίου και της αντικειμενικής συνάρτησης

- Επειδή πρόκειται για κόστος \rightarrow ελαχιστοποίηση
- Αντικειμενική συνάρτηση:

$$z = 540 * x_{1,1} + 420 * x_{1,2} + 340 * x_{1,3} + 160 * x_{1,4} + 180 * x_{2,1} + 80 * x_{2,2} + 240 * x_{2,3} + 300 * x_{2,4} + 120 * x_{3,1} + 300 * x_{3,2} + 500 * x_{3,3} + 440 * x_{3,4}$$



Παράδειγμα (συν.)

Διατύπωση των περιορισμών

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} \leq 400$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} \leq 850$$

$$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} \leq 350$$

$$x_i \geq 0, i = 1 \dots 12$$

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				ΠΡΟΣΦΟΡΑ
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	x_1	x_2	x_3	x_4	400
	Λουτράκι	x_5	x_6	x_7	x_8	850
	Λ. Όρη	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	350
ΖΗΤΗΣΗ		150	700	250	500	1600

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} = 150$$

$$x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} = 700$$

$$x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} = 250$$

$$x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} = 500$$

Ή εναλλακτικά \geq

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ			
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160
	Λουτράκι	180	80	240	300
	Λ. Όρη	120	300	500	440



Παράδειγμα (συν.)

Πλήρες μαθηματικό μοντέλο

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \min z = & 540 * x_{1,1} + 420 * x_{1,2} + 340 * x_{1,3} + 160 * x_{1,4} + \\ & 180 * x_{2,1} + 80 * x_{2,2} + 240 * x_{2,3} + 300 * x_{2,4} + \\ & 120 * x_{3,1} + 300 * x_{3,2} + 500 * x_{3,3} + 440 * x_{3,4} \end{aligned}$$

Υπό των περιορισμών:

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} \leq 400$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} \leq 850$$

$$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} \leq 350$$

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} = 150$$

$$x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} = 700$$

$$x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} = 250$$

$$x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} = 500$$

$$x_{i,j} \geq 0$$

Εύρεση αρχικής εφικτής λύσης

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας (Northwest-Corner method)

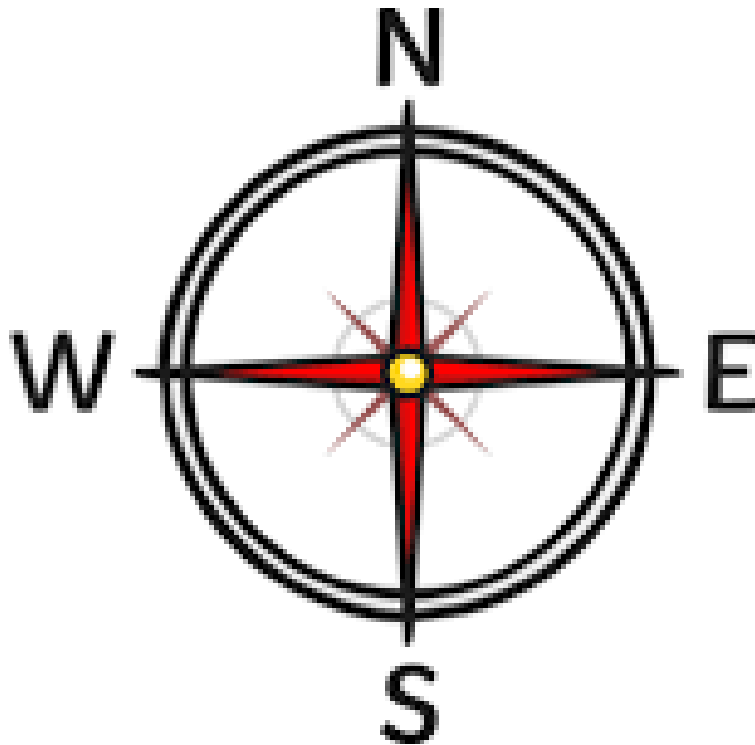


Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας (Northwest-Corner method)

Χαρακτηριστικά:

- Λαμβάνει υπόψη μόνο τους περιορισμούς προσφοράς και ζήτησης
- Δεν λαμβάνει υπόψη την αντικειμενική συνάρτηση.

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας (Northwest-Corner method)



- Επιλέγουμε το πιο βορειοδυτικό κελί του πίνακα και του αποδίδουμε την μεγαλύτερη ποσότητα που μπορεί να δώσει η πηγή στον προορισμό αυτό.
- Υπολογίζουμε τις εναπομείνουσες ποσότητες για την γραμμή και την στήλη.
- Διαγράφουμε την αντίστοιχη γραμμή ή στήλη που έχει μηδενική προσφορά/ζήτηση (αλλά όχι και τις δυο ταυτόχρονα, επιλέγουμε μια από τις 2. Εξαίρεση το τελευταίο βήμα)
- Επαναλαμβάνουμε έως ότου διαγράψουμε όλες στις γραμμές και στήλες.



Δεδομένα Προβλήματος



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	850
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		150	700	250	500	1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Εκχώρηση 150 μονάδων στο πλέον βορειοδυτικό κελί <Έδεσσα - Ηράκλειο>



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	540	420	340	160	250
	Λουτράκι		180	80	240	300	850
	Λ. Όρη		120	300	500	440	350
Ζήτηση		0	700	250	500	1600	

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση του Ηρακλείου



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	540	420	340	160	250
	Λουτράκι		180	80	240	300	850
	Λ. Όρη		120	300	500	440	350
Ζήτηση		0	700	250	500	1600	

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Εκχώρηση 250 μονάδων στο πλέον βορειοδυτικό κελί <Έδεσσα - Κερατσίνι>



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ							
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	540	250	420	340	160	0	
	Λουτράκι		180		80	240	300	850	
	Λ. Όρη		120		300	500	440	350	
Ζήτηση		0		450		250	500	1600	

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Εξαντλήθηκε η προσφορά της Έδεσσας



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	540	420	340	160	0
	Λουτράκι		180	80	240	300	850
	Λ. Όρη		120	300	500	440	350
Ζήτηση		0	450	250	500		1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Εκχώρηση 450 μονάδων στο πλέον βορειοδυτικό κελί <Λουτράκι - Κερατσίνι>



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	250	250	160	0
	Λουτράκι	180	450	240	300	400
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		0	0	250	500	1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση του Κερασινίου



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	250	340	160	0
	Λουτράκι		450	240	300	400
	Λ. Όρη		300	500	440	350
Ζήτηση		0	0	250	500	1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Εκχώρηση 250 μονάδων στο πλέον βορειοδυτικό κελί <Λουτράκι - Βόλος>



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	250	340	160	0
	Λουτράκι	180	450	240	300	150
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		0	0	0	500	1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση του Βόλου



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	250	250	160	0
	Λουτράκι		450	250	300	150
	Λ. Όρη		300	500	440	350
Ζήτηση		0	0	0	500	1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Εκχώρηση 150 μονάδων στο πλέον βορειοδυτικό κελί <Λουτράκι - Θεσσαλονίκη>



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη		Προσφορά
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	540	250	420	250	340	150	160	
	Λουτράκι		180	450	80	250	240	150	300	0
	Λ. Όρη		120		300		500		440	350
Ζήτηση		0		0		0		350		1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Εξαντλήθηκε η προσφορά του Λουτρακίου



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	250	250	160	0
	Λουτράκι	180	450	250	300	0
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		0	0	0	350	1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Εκχώρηση 350 μονάδων στο πλέον βορειοδυτικό κελί <Λευκά Όρη - Θεσσαλονίκη>

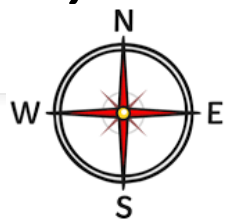


		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	250	250	160	0
	Λουτράκι	180	450	250	300	0
	Λ. Όρη	120	300	500	440	0
Ζήτηση		0	0	0	0	1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση της Θεσσαλονίκης Εξαντλήθηκε η προσφορά των Λευκών Ορέων

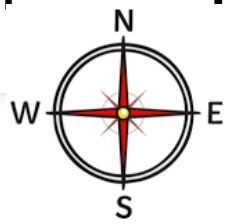


		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	250	340	160	0
	Λουτράκι	180	450	240	150	0
	Λ. Όρη	120	300	500	350	0
Ζήτηση		0	0	0	0	1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας



Βασική αρχική εφικτή λύση για το πρόβλημα μεταφοράς



		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη		Προσφορά
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	540	250	420	250	340	150	160	0
	Λουτράκι		180	450	80	250	240	150	300	0
	Λ. Όρη		120		300		500	350	440	0
Ζήτηση		0		0		0		0		1600

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας

Ικανοποιεί τους περιορισμούς με κόστος

$$150*540+250*420+80*450+250*240+150*300+350*440 = 481000$$

Η μέθοδος Ελαχίστου Κόστους (Least Cost method)



Η μέθοδος Ελαχίστου Κόστους (Least Cost method)

- Εντοπίζει την λύση με κριτήριο την επιλογή των διαδρομών με το μικρότερο κόστος
- Επιλέγουμε το κελί με το μικρότερο συνολικά κόστος και αποδίδουμε την μέγιστη τιμή σύμφωνα με την προσφορά/ζήτηση $x_{i,j} = \min\{s_i, d_j\}$
- Υπολογίζουμε τις εναπομείνουσες προσφορές/ζητήσεις :
 $s_i = s_i - x_{ij}$ και $d_j = d_j - x_{ij}$
- Διαγράφουμε την γραμμή ή στήλη όπου s_i ή/και d_j είναι μηδέν. Όταν μηδενίζονται ταυτόχρονα διαγράφουμε μόνο μία
- Επαναλαμβάνουμε έως να απομείνει μόνο μια γραμμή ή στήλη όπου και ικανοποιούμε την ζήτηση βάση της προσφοράς



Δεδομένα Προβλήματος

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	850
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		150	700	250	500	1600



Εκχώρηση 700 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς <Λουτράκι - Κερατσίνι>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	700	240	300	150
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		150	0	250	500	1600



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση του Κερασινίου

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	700	420	340	160	400
	Λουτράκι	180		80	240	300	150
	Λ. Όρη	120		300	500	440	350
Ζήτηση		150	0	250	500	1600	



Εκχώρηση 150 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς <Λευκά Όρη - Ηράκλειο>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	150
	Λ. Όρη	120	300	500	440	200
Ζήτηση		0	0	250	500	1600



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση του Ηρακλείου

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη		Προσφορά
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	540	700	420		340		160	400
	Λουτράκι		180		80		240		300	150
	Λ. Όρη		120		300		500		440	200
Ζήτηση		0		0		250		500		1600



Εκχώρηση 400 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς <Έδεσσα- Θεσσαλονίκη>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη		Προσφορά
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	150	540	700	420	340	400	160	0	
	Λουτράκι		180		80	240		300		150
	Λ. Όρη		120		300	500		440		200
Ζήτηση		0		0	250	100		1600		



Εξαντλήθηκε η προσφορά της Έδεσσας

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0
	Λουτράκι	180	80	240	300	150
	Λ. Όρη	120	300	500	440	200
Ζήτηση		0	0	250	100	1600

Additional data from the table:

- Red vertical line at 150 in the Ηράκλειο column.
- Blue vertical line at 700 in the Κερ/νι column.
- Green horizontal line at 400 in the Θεσ/νίκη column.



Εκχώρηση 150 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς <Λουτράκι - Βόλος>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ							
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400		0	
	Λουτράκι	180	80	240	300	700		0	
	Λ. Όρη	120	300	500	440	150		200	
Ζήτηση		0	0	100	100			1600	



Εξαντλήθηκε η προσφορά του Λουτρακίου

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0
	Λουτράκι	180	80	240	300	0
	Λ. Όρη	120	300	500	440	200
Ζήτηση		0	0	100	100	1600

Additional data from the table:

- Vertical red line at Ηράκλειο: 150
- Vertical blue line at Κερ/νι: 700
- Horizontal green line: 400 (from Ηράκλειο to Θεσ/νίκη)
- Horizontal yellow line: 150 (from Κερ/νι to Βόλος)



Εκχώρηση 100 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς <Λευκά Όρη - Θεσσαλονίκη>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0
	Λουτράκι	180	80	240	300	0
	Λ. Όρη	120	300	500	440	100
Ζήτηση		0	0	100	0	1600

Additional data from the table:

- Vertical red line: 150 (at Ηράκλειο), 400 (at Θεσ/νίκη)
- Vertical blue line: 700 (at Κερ/νι), 150 (at Βόλος)
- Horizontal green line: 400 (between Ηράκλειο and Θεσ/νίκη)
- Horizontal yellow line: 700 (between Κερ/νι and Βόλος), 150 (between Βόλος and Θεσ/νίκη)



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση της Θεσσαλονίκης

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη		Προσφορά
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400			0	
	Λουτράκι	180	80	240	300		700	150		0
	Λ. Όρη	120	300	500	440			100		
Ζήτηση		0	0	100	0				1600	



Εκχώρηση 100 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς <Λευκά Όρη - Βόλος>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ							
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0			
	Λουτράκι	180	80	240	300	0			
	Λ. Όρη	120	300	500	440	0			
Ζήτηση		0	0	0	0	0	0	0	1600

Additional data from the table:

- Vertical red line at Ηράκλειο: 150
- Vertical blue line at Κερ/νι: 700
- Vertical black line at Θεσ/νίκη: 100
- Horizontal green line: 400
- Horizontal yellow line: 150
- Red '0' in the 'Προσφορά' column for 'Λ. Όρη'.



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση του Βόλου Εξαντλήθηκε η προσφορά των Λευκών Ορέων

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ							
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400	0	0	0
	Λουτράκι	180	80	240	300	700	150	0	0
	Λ. Όρη	120	300	500	440	150	100	100	0
Ζήτηση		0	0	0	0	0	0	0	1600



Βασική αρχική εφικτή λύση για το πρόβλημα μεταφοράς

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη		Προσφορά
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα		540		420		340		160	0
								400		
	Λουτράκι		180		80		240		300	
				700		150				0
Λ. Όρη		120		300		500		440	0	
	150				100		100			
Ζήτηση		0		0		0		0	1600	

Ικανοποιεί τους περιορισμούς με κόστος

$$150*120+700*80+150*240+100*500+400*160+100*440 = 268000$$

Ικανοποιεί τους περιορισμούς με κόστος

$$150*540+250*420+80*450+250*240+150*300+350*440 = 481000$$

Η μέθοδος Vogel (Vogel's Approximation method)



Η μέθοδος Vogel (Vogel's Approximation method)

- Λαμβάνει υπόψη το κόστος μεταφοράς
- Σε κάθε επανάληψη εντοπίζουμε τα δύο μικρότερα κόστη σε κάθε γραμμή και στήλη και υπολογίζουμε την διαφορά τους.
- Επιλέγουμε την γραμμή ή στήλη με την μεγαλύτερη διαφορά.
- Στην επιλογή αυτή, εντοπίζουμε το κελί με το μικρότερο κόστος και εκχωρούμε την μεγαλύτερη επιτρεπτή ποσότητα.
- Ενημερώνουμε τις στήλες προσφοράς και ζήτησης και προχωρούμε σε διαγραφή στήλης ή γραμμής.



Δεδομένα Προβλήματος

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	850
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		150	700	250	500	1600



Υπολογίζουμε για κάθε γραμμή και κάθε στήλη τη διαφορά ανάμεσα στα δύο μικρότερα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος και διαλέγουμε την μεγαλύτερη

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400	180
	Λουτράκι	180	80	240	300	850	100
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350	180
Ζήτηση		150	700	250	500	1600	
Διαφορά		60	220	100	140		



Εκχώρηση 700 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς στην επιλεγμένη στήλη <Λουτράκι - Κερ/νι>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400	180
	Λουτράκι	180	80	240	300	150	100
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350	180
Ζήτηση		150	0	250	500	1600	
Διαφορά		60	220	100	140		



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση του Κερασινίου

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά	
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη			
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	700	420	340	160	400	180
	Λουτράκι	180		80	240	300	150	100
	Λ. Όρη	120		300	500	440	350	180
Ζήτηση		150	0	250	500	1600		
Διαφορά		60	220	100	140			



Υπολογίζουμε για κάθε γραμμή και κάθε στήλη τη διαφορά ανάμεσα στα δύο μικρότερα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος

και διαλέγουμε την μεγαλύτερη

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά	
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη			
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	700	420	340	160	400	180
	Λουτράκι	180		80	240	300	150	60
	Λ. Όρη	120		300	500	440	350	320
Ζήτηση		150	0	250	500	1600		
Διαφορά		60	-	100	140			



Εκχώρηση 150 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς στην επιλεγμένη γραμμή <Λ. Όρη - Ηράκλειο>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά	
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη			
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	700	420	340	160	400	180
	Λουτράκι	180		80	240	300	150	60
	Λ. Όρη	120		300	500	440	200	320
Ζήτηση		0	0	250	500	1600		
Διαφορά		60	-	100	140			



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση του Ηρακλείου

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400	180
	Λουτράκι	180	80	240	300	150	60
	Λ. Όρη	120	300	500	440	200	320
	150		700				
Ζήτηση		0	0	250	500	1600	
Διαφορά		60	-	100	140		



Υπολογίζουμε για κάθε γραμμή και κάθε στήλη τη διαφορά ανάμεσα στα δύο μικρότερα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος

και διαλέγουμε την μεγαλύτερη

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400	180
	Λουτράκι	180	80	240	300	150	60
	Λ. Όρη	120	300	500	440	200	60
Ζήτηση		0	0	250	500	1600	
Διαφορά		-	-	100	140		



Εκχώρηση 400 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς στην επιλεγμένη γραμμή <Έδεσσα - Θεσ/νίκη>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	180
	Λουτράκι	180	80	240	300	150	60
	Λ. Όρη	120	300	500	440	200	60
	150		700				
Ζήτηση		0	0	250	100	1600	
Διαφορά		-	-	100	140		



Εξαντλήθηκε η προσφορά της Έδεσσας

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	180
	Λουτράκι	180	80	240	300	150	60
	Λ. Όρη	120	300	500	440	200	60
Ζήτηση		0	0	250	100	1600	
Διαφορά		-	-	100	140		



Υπολογίζουμε για κάθε γραμμή και κάθε στήλη τη διαφορά ανάμεσα στα δύο μικρότερα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος

και διαλέγουμε την μεγαλύτερη

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	-
	Λουτράκι	180	80	240	300		
	Λ. Όρη	120	300	500	440		
		150	700	400		200	60
Ζήτηση		0	0	250	100	1600	
Διαφορά		-	-	260	140		



Εκχώρηση 150 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς στην επιλεγμένη στήλη <Λουτράκι - Βόλος>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	-
	Λουτράκι	180	80	240	300	0	60
	Λ. Όρη	120	300	500	440	200	60
Ζήτηση		0	0	100	100	1600	
Διαφορά		-	-	260	140		



Εξαντλήθηκε η προσφορά του Λουτρακίου

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	-
	Λουτράκι	180	80	240	300	0	60
	Λ. Όρη	120	300	500	440	200	60
Ζήτηση		0	0	100	100	1600	
Διαφορά		-	-	260	140		



Υπολογίζουμε για κάθε γραμμή και κάθε στήλη τη διαφορά ανάμεσα στα δύο μικρότερα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος

και διαλέγουμε την μεγαλύτερη

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	-
	Λουτράκι	180	80	240	300	0	-
	Λ. Όρη	120	300	500	440	200	60
Ζήτηση		0	0	100	100	1600	
Διαφορά		-	-	500	440		



Εκχώρηση 100 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς στην επιλεγμένη στήλη <Λευκά Όρη - Βόλος>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	-
	Λουτράκι	180	80	240	300	0	-
	Λ. Όρη	120	300	500	440	100	60
Ζήτηση		0	0	0	100	1600	
Διαφορά		-	-	500	440		



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση του Βόλου

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	-
	Λουτράκι	180	80	240	300	0	-
	Λ. Όρη	120	300	500	440	100	60
	150		100				
Ζήτηση		0	0	0	100	1600	
Διαφορά		-	-	500	440		



Υπολογίζουμε για κάθε γραμμή και κάθε στήλη τη διαφορά ανάμεσα στα δύο μικρότερα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος και διαλέγουμε τη μεγαλύτερη

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	-
	Λουτράκι	180	80	240	300	0	-
	Λ. Όρη	120	300	500	440	100	440
Ζήτηση		0	0	0	100	1600	
Διαφορά		-	-	-	440		



Εκχώρηση 100 μονάδων στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς <Λευκά Όρη - Θεσσαλονίκη>

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	-
	Λουτράκι	180	80	240	300	0	-
	Λ. Όρη	120	300	500	440	0	440
Ζήτηση		0	0	0	0	1600	
Διαφορά		-	-	-	440		



Ικανοποιήθηκε η ζήτηση της Θεσσαλονίκης Εξαντλήθηκε η προσφορά των Λευκών Ορέων

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	-
	Λουτράκι	180	80	240	300	0	-
	Λ. Όρη	120	300	500	440	0	-
Ζήτηση		0	0	0	0	1600	
Διαφορά		-	-	-	-		



Βασική αρχική εφικτή λύση για το πρόβλημα μεταφοράς

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Διαφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	0	-
				400			
	Λουτράκι	180	80	240	300	0	-
		700	150				
Λ. Όρη	120	300	500	440	0	-	
	150		100	100			
Ζήτηση		0	0	0	0	1600	
Διαφορά		-	-	-	-		

Ικανοποιεί τους περιορισμούς με κόστος

$$150*120+700*80+150*240+100*500+400*160+440*100 = 268000$$

Ικανοποιεί τους περιορισμούς με κόστος

$$150*120+700*80+150*240+100*500+400*160+100*440 = 268000$$

Το κύριο βήμα της μεθόδου της Μεταφοράς



Η μέθοδος ανακατανομής των
εκχωρήσεων
(Modified Distribution Method - MODI)



Εύρεση της εισερχόμενης μεταβλητής

Μόνο για τα **κατειλημμένα** κελιά του πίνακα:

- υπολογίζουμε βοηθητικές τιμές $u_i, i = 1, 2, \dots, m$ για κάθε γραμμή.
- υπολογίζουμε βοηθητικές τιμές $v_j, j = 1, 2, \dots, n$ για κάθε στήλη.

Ο υπολογισμός των τιμών αυτών προκύπτει από το σύστημα των εξισώσεων

$$u_i + v_j = c_{ij},$$

όπου c_{ij} είναι το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς από την πηγή i στον προορισμό j .
Επειδή, το σύστημα αυτό έχει πάντα μια μεταβλητή παραπάνω από τις εξισώσεις,
θέτουμε αυθαίρετα $u_1 = 0$.

Εύρεση της εισερχόμενης μεταβλητής

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								ΠΡΟΣΦΟΡΑ	u_i
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη			
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα		540		420		340		160	400	u_1
								400			
	Λουτράκι		180		80		240		300	850	u_2
				700		150					
	Λ. Όρη		120		300		500		440	350	u_3
		150				100		100			
ΖΗΤΗΣΗ		150		700		250		500		1600	
v_j		v_1		v_2		v_3		v_4			

Εύρεση της εισερχόμενης μεταβλητής

Σχηματίζουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{rcl} u_1 + v_4 & = & 160 \\ u_2 + v_2 & = & 80 \\ u_2 + v_3 & = & 240 \\ u_3 + v_1 & = & 120 \\ u_3 + v_3 & = & 500 \\ u_3 + v_4 & = & 440 \end{array} \right\} (\Sigma)$$

Θέτουμε $u_1 = 0$ και λύνοντας το σύστημα υπολογίζουμε τις βοηθητικές τιμές:

$$u_2 = 20, u_3 = 280, v_1 = -160, v_2 = 60, v_3 = 220, v_4 = 160.$$

Εύρεση της εισερχόμενης μεταβλητής

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	u_i
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400	0
	Λουτράκι	180	80	240	300		
	Λ. Όρη	120	300	500	440		
Ζήτηση		150	700	250	500	1600	
v_j		-160	60	220	160		

Εύρεση της εισερχόμενης μεταβλητής

- Υπολογίζουμε για κάθε κενό - **μη-κατειλημμένο κελί** (μη βασική μεταβλητή) το αντίστοιχο κόστος ευκαιρίας e_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j=1,2,\dots,n$ από τη σχέση:

$$e_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

- Αν όλα τα e_{ij} είναι **μη αρνητικά**, έχουμε βέλτιστη λύση (κριτήριο τερματισμού).
- Αν δεν υπάρχει κάποιο αρνητικό κόστος ευκαιρίας αλλά υπάρχει κάποιο μηδενικό κόστος ευκαιρίας, τότε έχουμε εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.

Υπολογισμός των ποσοτήτων e_{ij} (κόστη ευκαιρίας)

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								Προσφορά	u_i
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη			
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	700	540	360	420	120	340		160	400	0
	Λουτράκι	320	180		80		240	120	300	850	20
	Λ. Όρη		120	-40	300		500		440	350	280
Ζήτηση		150		700		250		500		1600	
v_j		-160		60		220		160			

Βασική αρχική εφικτή λύση για το πρόβλημα μεταφοράς

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	Αιχμή
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	543	420	340	160	0	-
	Λουτράκι	180	80	240	300	0	-
	Λ. Όρη	123	330	500	440	0	-
	Ζήτηση	150		700	500	1600	
Αιχμή		-	-	-	-		

Εύρεση της εισερχόμενης μεταβλητής

Επιλέγουμε το μικρότερο αρνητικό e_{ij} , δηλαδή το αρνητικό e_{ij} με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Το κελί στο οποίο βρίσκεται αυτό το πιο αρνητικό κόστος ευκαιρίας, αντιστοιχεί στην **εισερχόμενη** μεταβλητή. Σε περίπτωση που υπάρχουν ισοδύναμες επιλογές, τότε η επιλογή είναι αυθαίρετη.

Εύρεση της εξερχόμενης μεταβλητής

- Ξεκινάμε από το κελί που έχει επιλεγεί να εισέλθει στη λύση. Κατασκευάζουμε ένα **κλειστό μονοπάτι** που ξεκινά από το εισερχόμενο κελί και καταλήγει πίσω σ' αυτό πραγματοποιώντας άλματα **μόνο πάνω σε κατειλημμένα κελιά**, κινούμενοι οριζόντια ή κάθετα, αλλά όχι διαγώνια και κάνοντας μία μόνο στάση σε κάθε γραμμή ή στήλη που επιλέγουμε.
- Δίνουμε διαδοχικά θετικά και αρνητικά πρόσημα στα διάφορα κελιά του μονοπατιού ξεκινώντας με "+" για το εισερχόμενο.

Ανακατανομή των εκχωρήσεων - δημιουργία κλειστού μονοπατιού

MODI		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								Προσφορά	u_i
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη			
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	700	540	360	420	120	340		160	400	0
							400				
	Λουτράκι	320	180		80		240	120	300	850	20
				700 (-)	150 (+)						
Λ. Όρη		120	-40	300		500		440	350	280	
		150			(+)	100 (-)	100				
Ζήτηση		150		700		250		500		1600	
v_j		-160		60		220		160			

Εύρεση της εξερχόμενης μεταβλητής

- Επιλέγουμε ως **εξερχόμενο** το κελί με τη μικρότερη τρέχουσα εκχώρηση μεταξύ αυτών που έχουν "-". Το κελί αυτό θα δώσει όλη την ποσότητά του στο εισερχόμενο. Στην περίπτωση που υπάρχουν υποψήφια για έξοδο κελιά με ισοδύναμες αρνητικές εκχωρήσεις, η επιλογή είναι αυθαίρετη.
- Στα κελιά του μονοπατιού με θετικό πρόσημο προσθέτουμε την ποσότητα του εξερχόμενου κελιού και αντίστοιχα την αφαιρούμε από τα κελιά με αρνητικό πρόσημο. Η λύση που προκύπτει είναι η νέα τρέχουσα.

Ανακατανομή των εκχωρήσεων - δημιουργία κλειστού μονοπατιού

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								Προσφορά	u_i
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη			
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	700	540	360	420	120	340		160	400	0
	Λουτράκι	320	180		80		240	120	300	850	20
	Λ. Όρη		120	-40	300		500		440	350	280
	Ζήτηση	150		700		250		500		1600	
	v_j	-160		60		220		160			

Additional annotations in the table:

- Arrows indicate flow adjustments:
 - From Έδεσσα to Λουτράκι: 80
 - From Έδεσσα to Λ. Όρη: 100
 - From Λουτράκι to Βόλος: 240
 - From Λ. Όρη to Βόλος: 100
- Red annotations in the middle section:
 - ~~700~~ 600 (-)
 - ~~150~~ 250 (+)
 - ~~100~~ 0 (-)

Βασική εφικτή λύση καλύτερη της προηγούμενης

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	850
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		150	700	250	500	1600

Υπολογισμός των νέων βοηθητικών τιμών u_i και v_j

Νέα επανάληψη

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	u_i
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400	0
	Λουτράκι	180	80	240	300	850	60
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350	280
Ζήτηση		150	700	250	500	1600	
v_j		-160	20	180	160		

Υπολογισμός των νέων ποσοτήτων e_{ij} (κόστη ευκαιρίας) -
 Βέλτιστη λύση, αφού δεν περιέχει αρνητικά κόστη ευκαιρίας.

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								Προσφορά	u_i
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη			
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	700	540	400	420	160	340		160	400	0
	Λουτράκι	280	180		80		240	80	300	850	60
	Λ. Όρη		120		300	40	500		440	350	280
Ζήτηση		150		700		250		500		1600	
v_j		-160		20		180		160			

Βέλτιστη εφικτή λύση από την εφαρμογή της μεθόδου της Μεταφοράς - ανακατανομής των εκχωρήσεων (MODI Method)

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	850
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		150	700	250	500	1600

Βέλτιστη εφικτή λύση από την εφαρμογή της μεθόδου της Μεταφοράς - ανακατανομής των εκχωρήσεων (MODI Method)

- Η Έδεσσα παράγει **400** χιλιο-κιβώτια και τα αποστέλλει όλα στη Θεσσαλονίκη.
- Το Λουτράκι παράγει **850** χιλιο-κιβώτια και αποστέλλει **600** στο Κερατσίνι και τα υπόλοιπα **250** στο Βόλο.
- Το εργοστάσιο στα Λευκά Όρη παράγει **350** χιλιο-κιβώτια και αποστέλλει **150** στο Ηράκλειο Κρήτης, **100** στο Κερατσίνι και **100** στη Θεσσαλονίκη.
- Η λύση αυτή δίνει βέλτιστο κόστος **264,000 € βελτιωμένο σε σχέση με το κόστος των 268,000 € της λύσης που προέκυψε από τη μέθοδο .**

Backup