

Επιχειρησιακή Έρευνα

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων και Τροφίμων,
Πανεπιστήμιο Πατρών

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Αποτελεί πρόβλημα χρηματοοικονομικής το οποίο αντιμετωπίζουν τα αρμόδια διευθυντικά στελέχη τραπεζών, εταιρειών επενδύσεων, εταιρειών αμοιβαίων κεφαλαίων, κ.ά.
- Αφορά στην επιλογή ενός πακέτου χρεωγράφων (μετοχών, ομολόγων, κ.ά.) από ένα σύνολο εναλλακτικών επενδύσεων

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Αντικειμενικός σκοπός
 - Η μεγιστοποίηση της προσδοκώμενης απόδοσης (ή του ποσοστού αυτής) των χρεωγράφων ή η ελαχιστοποίηση του αντίστοιχου κινδύνου
- Περιορισμοί
 - Διαθέσιμο κεφάλαιο προς επένδυση
 - Πολιτική της εταιρείας
 - Διάρκεια οικονομικής ζωής των επενδύσεων
 - Δυνητικός ρυθμός ανάπτυξης επενδύσεων
 - Κίνδυνος
 - Ρευστότητα κεφαλαίου κίνησης

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Έστω μια εταιρεία επενδύσεων η οποία ενδιαφέρεται να επενδύσει σε χρεώγραφα ένα μέρος από τα ρευστά διαθέσιμά της, το οποίο ανέρχεται σε 90 εκατομμύρια €
- Ο χρηματοοικονομικός αναλυτής της εταιρείας προτείνει να επενδυθεί το ποσό αυτό σε μετοχές δύο συγκεκριμένων κλάδων καθώς και σε αμοιβαία κεφάλαια

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Προτεινόμενες μετοχές
 - Α και Β (κατασκευαστικού κλάδου)
 - Γ και Δ (κλάδου τροφίμων και ποτών)
- Αμοιβαία κεφάλαια
 - Εταιρειών Ε και Ζ
- Η προσδοκώμενη ετήσια απόδοσή των μετοχών και των αμοιβαίων δίνεται από τον πίνακα της επόμενης διαφάνειας

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

Επένδυση	Προσδοκώμενο ετήσιο ποσοστό απόδοσης (%)
Μετοχή Α	15.4
Μετοχή Β	19.2
Μετοχή Γ	18.7
Μετοχή Δ	13.5
Αμοιβαίο κεφάλαιο Ε	17.8
Αμοιβαίο κεφάλαιο Ζ	16.3

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Οδηγίες οικονομικού διευθυντή
 1. Το ποσό που θα επενδυθεί στις μετοχές ενός κλάδου να μην υπερβαίνει το μισό του συνολικού διαθέσιμου ποσού
 2. Το ποσό που θα επενδυθεί στη μετοχή με τη μεγαλύτερη απόδοση σε κάθε κλάδο, να μην υπερβαίνει το 80% του συνολικού ποσού που θα επενδυθεί στον κλάδο αυτό

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Οδηγίες οικονομικού διευθυντή
 3. Το ποσό που θα επενδυθεί στη μετοχή B να μην υπερβαίνει το 10% του ποσού που θα επενδυθεί σε όλες τις μετοχές
 4. Το ποσό που θα επενδυθεί σε αμοιβαία κεφάλαια να είναι το πολύ 25% του ποσού που θα επενδυθεί στις μετοχές των εταιρειών του κατασκευαστικού κλάδου

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Μεταβλητές απόφασης
 - \mathbf{x}_1 : ποσό επένδυσης στη μετοχή A
 - \mathbf{x}_2 : ποσό επένδυσης στη μετοχή B
 - \mathbf{x}_3 : ποσό επένδυσης στη μετοχή Γ
 - \mathbf{x}_4 : ποσό επένδυσης στη μετοχή Δ
 - \mathbf{x}_5 : ποσό επένδυσης στο αμοιβαίο κεφάλαιο E
 - \mathbf{x}_6 : ποσό επένδυσης στο αμοιβαίο κεφάλαιο Z

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Αντικειμενική συνάρτηση
 - **Max z = 0,154x₁ + 0,192x₂ + 0,187x₃ + 0,135x₄ + 0,178x₅ + 0,163x₆**

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Περιορισμοί
 1. Το συνολικό ποσό επένδυσης να μην υπερβαίνει τα 90 εκατομμύρια €
 - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 90000$ (χιλ. €)

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Περιορισμοί
 2. Το ποσό που θα επενδυθεί στις μετοχές κάθε κλάδου να μην υπερβαίνει το μισό του συνολικού ποσού
 - $x_1 + x_2 \leq 45000$ (χιλ. €)
 - $x_3 + x_4 \leq 45000$ (χιλ. €)

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Περιορισμοί
 2. Το ποσό που θα επενδυθεί στη μετοχή με τη μεγαλύτερη απόδοση σε κάθε κλάδο να μην υπερβαίνει το 80% του συνολικού ποσού που θα επενδυθεί στον κλάδο αυτό
 - $x_2 \leq 0,8(x_1+x_2) \Rightarrow -0,8x_1 + 0,2x_2 \leq 0$
 - κατασκευαστικός κλάδος
 - $x_3 \leq 0,8(x_3+x_4) \Rightarrow 0,2x_3 - 0,8x_4 \leq 0$
 - κλάδος τροφίμων και ποτών

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Περιορισμοί
 3. Το ποσό που θα επενδυθεί στη μετοχή B να μην υπερβαίνει το 10% του συνολικού ποσού που θα επενδυθεί σε όλες τις μετοχές
 - $x_2 \leq 0,1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \Rightarrow$
 - $-0,1x_1 + 0,9x_2 - 0,1x_3 - 0,1x_4 \leq 0$

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Περιορισμοί
 4. Το ποσό που θα επενδυθεί σε αμοιβαία κεφάλαια να είναι το πολύ 25% του συνολικού ποσού που θα επενδυθεί στις μετοχές του κατασκευαστικού κλάδου
- $x_5 + x_6 \leq 0,25(x_1 + x_2) \Rightarrow$
- $-0,25x_1 - 0,25x_2 + x_5 + x_6 \leq 0$

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Περιορισμοί
 5. Μη αρνητικότητα
 - $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6$

Επιλογή Χαρτοφυλακίου

- Λύση

Χρεόγραφο	Επενδυόμενο ποσό	Προσδοκώμενη απόδοση	Συνολική προσδοκώμενη απόδοση
Μετοχή Α	27900	15,4	4296,6
Μετοχή Β	8100	19,2	1555,2
Μετοχή Γ	36000	18,7	6732
Μετοχή Δ	9000	13,5	1215
Αμοιβαίο κεφάλαιο Ε	9000	17,8	1602
Αμοιβαίο κεφάλαιο Ζ	0	16,3	0
Σύνολο	90000	17,11	15400,8

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός

1. Μεγιστοποίηση της συνολικής απόδοσης των επενδύσεων κατά την περίοδο προγραμματισμού
2. Ελαχιστοποίηση του συνολικού ποσού που απαιτείται για την κάλυψη μελλοντικών υποχρεώσεων της επιχείρησης
3. Βελτιστοποίηση κάποιας συγκεκριμένης συνάρτησης που εκφράζει το στόχο της επιχείρησης

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός

- Πρόβλημα
 - Επένδυση 80 εκατομμυρίων € ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση κατά τους επόμενους τέσσερις μήνες
- 2 εναλλακτικές επενδύσεις
 1. Διμηνιαία ομόλογα δημοσίου με απόδοση 3% για περίοδο 2 μηνών
 2. Τριμηνιαία γραμμάτια δημοσίου με απόδοση 6,5% για περίοδο τριών μηνών

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός

- Τα ποσά που δε θα επενδυθούν στις δύο παραπάνω επενδύσεις μπορούν να κατατεθούν σε τράπεζα με μηνιαία απόδοση 1%
- Οι επενδύσεις γίνονται στην αρχή κάθε μήνα
- Στην αρχή του 5^{ου} μήνα η επιχείρηση θα πρέπει να επενδύσει 40 εκατομμύρια € σε άλλη επένδυση
- Απόφαση του οικονομικού διευθυντή
 - Να μην είναι επενδυμένο οποιαδήποτε στιγμή ποσό μεγαλύτερο από 32 εκατομμύρια € είτε σε διμηνιαία ομόλογα είτε σε τριμηνιαία γραμμάτια (για διαφοροποίηση στο χαρτοφυλάκιο)

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός

- Μεταβλητές απόφασης
 - B_j : επενδυόμενο ποσό σε διμηνιαία ομόλογα στην αρχή του μήνα j
 - Γ_j : επενδυόμενο ποσό σε τριμηνιαία γραμμάτια στην αρχή του μήνα j
 - Δ_j : επενδυόμενο ποσό στην τράπεζα στην αρχή του μήνα j
 - $j=1,2,3,4$

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός

- Αντικειμενική συνάρτηση

- **Max z =**

$$\begin{aligned} & 0,03B_1 + 0,03B_2 + 0,03B_3 + 0,03B_4 + 0,065\Gamma_1 + \\ & 0,065\Gamma_2 + 0,065\Gamma_3 + 0,065\Gamma_4 + 0,01\Delta_1 + 0,01\Delta_2 + \\ & 0,01\Delta_3 + 0,01\Delta_4 \end{aligned}$$

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός

- Περιορισμοί
 - Επενδυόμενο ποσό στην αρχή κάθε μήνα = Διαθέσιμο ποσό στην αρχή κάθε μήνα
 - 1^{ος} μήνας
 - $B_1 + \Gamma_1 + \Delta_1 = 80000$ (χιλιάδες €)
 - 2^{ος} μήνας
 - $B_2 + \Gamma_2 + \Delta_2 = \Delta_1 + 0,01 \Delta_1 \Rightarrow$
 $B_2 + \Gamma_2 - 1,01 \Delta_1 + \Delta_2 = 0$

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός

- Περιορισμοί

- Επενδυόμενο ποσό στην αρχή κάθε μήνα = Διαθέσιμο ποσό στην αρχή κάθε μήνα

- 3^{ος} μήνας

- $B_3 + \Gamma_3 + \Delta_3 = B_1 + 0,03 B_1 + \Delta_2 + 0,01 \Delta_2$

- $\Rightarrow -1,03 B_1 + B_3 + \Gamma_3 - 1,01 \Delta_2 + \Delta_3 = 0$

- 4^{ος} μήνας

- $B_4 + \Gamma_4 + \Delta_4 = B_2 + 0,03 B_2 + \Gamma_1 + 0,065 \Gamma_1 + \Delta_3 + 0,01 \Delta_3 \Rightarrow$

- $-1,03 B_2 + B_4 + -0,065 \Gamma_1 + \Gamma_4 - 1,01 \Delta_3 + \Delta_4 = 0$

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός

- Περιορισμοί

- Διαθέσιμο ποσό στην αρχή του 5^{ου} μήνα = 40 εκατομμύρια €

- $B_3 + 0,03B_3 + \Gamma_2 + 0,065\Gamma_2 + \Delta_4 + 0,01\Delta_4 \geq 40000 \Rightarrow$

- $1,03B_3 + 1,065\Gamma_2 + 1,01\Delta_4 \geq 40000$

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός

- Περιορισμοί

- Να μην είναι οποιαδήποτε στιγμή επενδυμένο ποσό μεγαλύτερο από 32 εκατομμύρια € είτε σε ομόλογα είτε σε γραμμάτια

- $B_1 \leq 32000$

- $B_1 + B_2 \leq 32000$

- $B_2 + B_3 \leq 32000$

- $B_3 + B_4 \leq 32000$

- $\Gamma_1 \leq 32000$

- $\Gamma_1 + \Gamma_2 \leq 32000$

- $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 \leq 32000$

- $\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \leq 32000$

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός

- Λύση

Επένδυση	Ποσό	Απόδοση	Συνολική απόδοση
B ₁	32.000.000	0,03	960.000
B ₃	19.557.842	0,03	586.735
B ₄	12.442.157	0,03	373.265
Γ ₁	32.000.000	0,065	2.080.000
Γ ₄	32.000.000	0,065	2.080.000
Δ ₁	16.000.000	0,01	160.000
Δ ₂	16.160.000	0,01	161.600
Δ ₃	29.723.750	0,01	297.237
Δ ₄	19.658.834	0,01	196.588
Σύνολο			6.895.425

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

- Πρόβλημα
 - Επιλογή από μια επιχείρηση, μεταξύ 5 ανεξάρτητων επενδύσεων, εκείνες που μεγιστοποιούν τη συνολική καθαρή παρούσα αξία των κεφαλαίων της και συγχρόνως ικανοποιούν τους περιορισμούς του προϋπολογισμού της
 - Κάθε επένδυση είναι διαιρετή, που σημαίνει ότι επιτρέπεται η μερική αποδοχή της, πλην όμως δεν επιτρέπεται να αναληφθεί περισσότερο από μία φορά

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

- Χρηματικές εισροές προβλήματος (σε εκατομμύρια €)

Έτος	Επένδυση				
	1	2	3	4	5
1	38	11	17	8	25
2	41	16	24	11	28
3	54	15	29	13	35
4	-	20	-	19	46

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

- Χρηματικές εκροές προβλήματος (σε εκατομμύρια €)

Έτος	Επένδυση					Διαθέσιμο ποσό
	1	2	3	4	5	
0	34	10	16	9	31	55
1	13	5	8	4	10	28
2	14	6	10	6	13	30
3	17	6	11	7	12	37
4	-	8	-	5	16	30

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

- Χρηματικές ροές προβλήματος (σε εκατ. €)
 - **ΚΠΑ:** Καθαρή Παρούσα Αξία
 - **ΣΠΕ:** Συντελεστής Προεξόφλησης Επιτοκίου

Έτος	Επένδυση					ΣΠΕ
	1	2	3	4	5	10%
0	-34	-10	-16	-9	-31	1,000
1	25	6	9	4	15	0,909
2	27	10	14	5	15	0,826
3	37	9	18	6	23	0,751
4	-	12	-	14	30	0,683
ΚΠΑ	38,14	18,67	17,26	12,83	32,79	

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

- Μεταβλητές απόφασης
 - x_j : το ποσοστό της επένδυσης j ($j=1,2,3,4,5$) που γίνεται αποδεκτό στη βέλτιστη λύση

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

- Χρηματικές ροές προβλήματος (σε εκατ. €)
- ΚΠΑ: Καθαρή Παρούσα Αξία
- ΣΠΕ: Συντελεστής Προεξόφλησης Επιτοκίου

Έτος	Επένδυση					ΣΠΕ
	1	2	3	4	5	
0	-34	-10	-16	-9	-31	1,000
1	25	6	9	4	15	0,909
2	27	10	14	5	15	0,826
3	37	9	18	6	23	0,751
4	-	12	-	14	30	0,683
ΚΠΑ	38,14	18,67	17,26	12,83	32,79	

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

31

- Αντικειμενική συνάρτηση

$$\bullet \text{Max } z = 38,14x_1 + 18,67x_2 + 17,26x_3 + 12,83x_4 + 32,79x_5$$

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

- Περιορισμοί
 - Χρηματικές εκροές των επενδύσεων των περιόδων μέχρι το διαθέσιμο ποσό κάθε έτους
 - $34x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 9x_4 + 31x_5 \leq 55$
 - $13x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 10x_5 \leq 28$
 - $14x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 13x_5 \leq 30$
 - $17x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 7x_4 + 12x_5 \leq 37$
 - $8x_2 + 5x_4 + 16x_5 \leq 30$

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

- Χρηματικές εκροές προβλήματος (σε εκατομμύρια €)

Έτος	Επένδυση					Διαθέσιμο ποσό
	1	2	3	4	5	
0	34	10	16	9	31	55
1	13	5	8	4	10	28
2	14	6	10	6	13	30
3	17	6	11	7	12	37
4	-	8	-	5	16	30

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

30

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

- Περιορισμοί
 - $x_j \leq 1, j=1,2,3,4,5$
 - $x_j \geq 0, j=1,2,3,4,5$
- Επεξηγήσεις
 - $x_j = 1$: η επένδυση j γίνεται αποδεκτή στο σύνολό της
 - $x_j = 0$: η επένδυση j απορρίπτεται
 - $x_j = 0.6$: η επένδυση j θα γίνει αποδεκτή κατά 60%, εφόσον κάποιος τρίτος την αναλάβει κατά το υπόλοιπο 40%

Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων

- Λύση

Μεταβλητή	Τιμή	ΚΠΑ	Συνολική ΚΠΑ
x_1	1	38,14	38,14
x_2	1	18,67	18,67
x_3	0,125	17,26	2,1575
x_4	1	12,83	12,83
x_5	0	32,79	0
		Σύνολο	71,7975

Πρόβλημα διαίτας =>

- Μια επιχείρηση τροφίμων θέλει να εισάγει στην αγορά μία νέα δυναμωτική μπάρα δημητριακών
- Το προϊόν αυτό πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές σε βιταμίνες
- Ένα κιλό του νέου αυτού προϊόντος πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 80 μονάδες βιταμίνης Α, 100 μονάδες βιταμίνης Γ, 60 μονάδες βιταμίνης Ε, 260 μονάδες πρωτεϊνών και το πολύ 2300 θερμίδες

Πρόβλημα διαίτας

- **Δεδομένα προβλήματος**

Απαιτούμενο διατροφικό στοιχείο	Αριθμός διατροφικών στοιχείων ανά μονάδα συστατικού				Διατροφική απαίτηση ανά κιλό προϊόντος
	1	2	3	4	
Βιταμίνη Α	80	115	100	90	≥ 80
Βιταμίνη Γ	110	90	85	100	≥ 100
Βιταμίνη Ε	50	70	105	80	≥ 60
Πρωτεΐνες	250	300	210	240	≥ 260
Θερμίδες	480	510	470	530	≤ 2300
Κόστος ανά μονάδα συστατικού	180	160	145	200	

Πρόβλημα διαίτας

- **Αντικειμενικός σκοπός του προβλήματος**
 - ο προσδιορισμός των ποσοτήτων που πρέπει να αναμειχθούν από κάθε συστατικό, ώστε να παρασκευαστεί, με το **μικρότερο δυνατό κόστος**, η νέα δυναμωτική μπάρα δημητριακών που **ικανοποιεί τις συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές**

Πρόβλημα διαίτας

- **Μεταβλητές απόφασης**

- x_j ($j = 1, 2, 3, 4$): η ποσότητα του συστατικού j που πρέπει να αναμειχθεί για την παρασκευή ενός κιλού της νέας δυναμωτικής μπάρας δημητριακών

Πρόβλημα διαίτας

Πρόβλημα διαίτας

• Δεδομένα προβλήματος

Απαιτούμενα διατροφικά στοιχεία	Αριθμός διατροφικών στοιχείων ανά μονάδα συστατικού				Διατροφική απαιτήση ανά κιλό πρόϊοντος
	1	2	3	4	
Βιταμίνη Α	80	115	100	90	≥ 80
Βιταμίνη Γ	110	90	85	100	≥ 100
Βιταμίνη Ε	50	70	105	80	≥ 60
Πρωτεΐνες	250	300	210	240	≥ 260
Θερμίδες	480	510	470	530	≤ 2300
Κόστος ανά μονάδα συστατικού	180	160	145	200	

- **Αντικειμενική συνάρτηση**

- $\text{Min } z = 180x_1 + 160x_2 + 145x_3 + 200x_4$

Πρόβλημα διαίτας

• Περιορισμοί

- $80x_1 + 115x_2 + 100x_3 + 90x_4 \geq 80$ (βιταμίνη Α)
- $110x_1 + 90x_2 + 85x_3 + 100x_4 \geq 100$ (βιταμίνη Γ)
- $50x_1 + 70x_2 + 105x_3 + 80x_4 \geq 60$ (βιταμίνη Ε)
- $250x_1 + 300x_2 + 210x_3 + 240x_4 \geq 260$ (πρωτεΐνες)
- $480x_1 + 510x_2 + 470x_3 + 530x_4 \leq 2300$ (θερμίδες)

- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ (άθροισμα ποσοτήτων ένα κιλό)

Πρόβλημα διαίτας

• Δεδομένα προβλήματος

Απαιτούμενο διατροφικό στοιχείο	Αριθμός διατροφικών στοιχείων ανά μονάδα συστατικού				Διατροφική απαιτήτηση ανά κιλό προϊόντος
	1	2	3	4	
Βιταμίνη Α	80	115	100	90	≥ 80
Βιταμίνη Γ	110	90	85	100	≥ 100
Βιταμίνη Ε	50	70	105	80	≥ 60
Πρωτεΐνες	250	300	210	240	≥ 260
Θερμίδες	480	510	470	530	≤ 2300
Κόστος ανά μονάδα συστατικού	180	160	145	200	

Πρόβλημα διαίτας

- **Μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού**

- Αντικειμενική συνάρτηση

- **$\text{Min } z = 180x_1 + 160x_2 + 145x_3 + 200x_4$**

- Περιορισμοί

- **$80x_1 + 115x_2 + 100x_3 + 90x_4 \geq 80$ (βιταμίνη Α)**

- **$110x_1 + 90x_2 + 85x_3 + 100x_4 \geq 100$ (βιταμίνη Γ)**

- **$50x_1 + 70x_2 + 105x_3 + 80x_4 \geq 60$ (βιταμίνη Ε)**

- **$250x_1 + 300x_2 + 210x_3 + 240x_4 \geq 260$ (πρωτεΐνες)**

- **$480x_1 + 510x_2 + 470x_3 + 530x_4 \leq 2300$ (θερμίδες)**

- **$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ (άθροισμα ποσοτήτων ένα κιλό)**

- **$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$**

Πρόβλημα διαίτας

- Λύση

Μεταβλητή	Τιμή μεταβλητής	Μοναδιαίο μεταβλητό κόστος	Μεταβλητό κόστος
x_1	0,537	180	96,66
x_2	0,317	160	50,72
x_3	0,146	145	21,17
x_4	0	200	0
Σύνολο	1		168,55

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- **Πρόβλημα**

- Προσδιορισμός του αριθμού των προβολών/καταχωρήσεων που πρέπει να γίνουν σε διάφορα διαφημιστικά μέσα (τηλεόραση, ραδιόφωνο, εφημερίδες, κλπ.) ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική ακροαματικότητα μιας διαφημιστικής εκστρατείας

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- **Περιορισμοί**

- Προϋπολογισμός της διαφημιστικής εκστρατείας
- Μέγιστος (ή ελάχιστος) αριθμός προβολών/καταχωρήσεων που μπορούν να γίνουν στα διαφημιστικά μέσα
- Χαρακτηριστικά των ακροατών
- Πολιτική της επιχείρησης

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- Οι υπεύθυνοι του τμήματος διαφήμισης μιας επιχείρησης αποφασίζουν να διαφημίσουν ένα νέο προϊόν της επιχείρησης
- Επιλέγουν, αρχικά, να πραγματοποιήσουν μια δοκιμαστική διαφήμιση στην τηλεόραση σε ένα συγκεκριμένο τριήμερο Παρασκευής-Σαββάτου-Κυριακής

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- Το κόστος μιας προβολής, καθώς και η ακροαματικότητα κάθε προβολής του συγκεκριμένου καναλιού, διαφέρουν ανάλογα με την ώρα και την ημέρα

Διαφημιστικό μέσο	Κόστος μιας προβολής	Μονάδες αναμενόμενης ακροαματικότητας
Παρασκευή - ημέρα	400.000	5000
Σάββατο - ημέρα	450.000	5500
Κυριακή - ημέρα	450.000	5700
Παρασκευή - νύχτα	500.000	7500
Σάββατο - νύχτα	550.000	8200
Κυριακή - νύχτα	550.000	8400

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- **Σκοπός**

- Μεγιστοποίηση της συνολικής ακροαματικότητας

- **Περιορισμοί**

1. Το συνολικό ποσό για όλες τις προβολές να μην υπερβαίνει τα 45000000
2. Το ποσό για τις προβολές της Παρασκευής να μην είναι μεγαλύτερο από 11000000

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- **Περιορισμοί**

3. Το ποσό για τις προβολές του Σαββάτου να μην υπερβαίνει τα 14400000
4. Ο συνολικός αριθμός προβολών την «ημέρα» να είναι τουλάχιστον 20, όπως ορίζεται στον πίνακα
5. Ο συνολικός αριθμός των προβολών τη νύχτα να είναι τουλάχιστον το 50% των συνολικών προβολών

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- **Περιορισμοί**

6. Ο μέγιστος αριθμός προβολών την κάθε ημέρα να είναι το πολύ 12
7. Ο μέγιστος αριθμός προβολών την κάθε νύχτα να είναι το πολύ 18

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- **Μεταβλητές απόφασης**

- \mathbf{x}_1 : προβολές Παρασκευή ημέρα
- \mathbf{x}_2 : προβολές Σάββατο ημέρα
- \mathbf{x}_3 : προβολές Κυριακή ημέρα
- \mathbf{x}_4 : προβολές Παρασκευή νύχτα
- \mathbf{x}_5 : προβολές Σάββατο νύχτα
- \mathbf{x}_6 : προβολές Κυριακή νύχτα

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- Αντικειμενική συνάρτηση
 - **Max z = 5000x₁ + 5500x₂ + 5700x₃ + 7500x₄ + 8200x₅ + 8400x₆**

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- Το κόστος μιας προβολής, καθώς και η ακροαματικότητα κάθε προβολής του συγκεκριμένου καναλιού, διαφέρουν ανάλογα με την ώρα και την ημέρα

Διαφημιστικό μέσο	Κόστος μιας προβολής	Μονάδες αναμενόμενης ακροαματικότητας
Παρασκευή - ημέρα	400.000	5000
Σάββατο - ημέρα	450.000	5500
Κυριακή - ημέρα	450.000	5700
Παρασκευή - νύχτα	500.000	7500
Σάββατο - νύχτα	550.000	8200
Κυριακή - νύχτα	550.000	8400

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- **Περιορισμοί**

1. Προϋπολογισμός διαφήμισης

$$400x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 500x_4 + 550x_5 + 550x_6 \leq 45000$$

(χιλιάδες €)

2. Προβολές Παρασκευής

$$400x_1 + 500x_4 \leq 11000$$

3. Προβολές Σαββάτου

$$450x_2 + 550x_5 \leq 14400$$

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- **Περιορισμοί**

4. Συνολικός αριθμός προβολών ημέρας

$$\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 \geq 20}$$

5. Συνολικός αριθμός προβολών νύχτας

$$\mathbf{x_4 + x_5 + x_6 \geq 0,5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \Rightarrow}$$
$$\mathbf{-0,5x_1 - 0,5x_2 - 0,5x_3 + 0,5x_4 + 0,5x_5 + 0,5x_6 \geq 0}$$

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- Συνολικό μοντέλο

$$\text{Max } z = 5000x_1 + 5500x_2 + 5700x_3 + 7500x_4 + 8200x_5 + 8400x_6$$

$$1. \quad 400x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 500x_4 + 550x_5 + 550x_6 \leq 45000$$

$$2. \quad 400x_1 + 500x_4 \leq 11000$$

$$3. \quad 450x_2 + 550x_5 \leq 14400$$

$$4. \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 20$$

$$5. \quad -0,5x_1 - 0,5x_2 - 0,5x_3 + 0,5x_4 + 0,5x_5 + 0,5x_6 \geq 0$$

$$6. \quad x_1, x_2, x_3 \leq 12$$

$$7. \quad x_4, x_5, x_6 \leq 18$$

$$8. \quad x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Επιλογή διαφημιστικών μέσων

- Λύση

Μεταβλητή	Αριθμός προβολών	Μονάδες ακροαματικότητας	Συνολική ακροαματικότητα
x_1	5	5000	25000
x_2	10	5500	55000
x_3	12	5700	68400
x_4	18	7500	135000
x_5	18	8200	147600
x_6	18	8400	151200
Σύνολο			582200

Έρευνα μάρκετινγκ

- **Πρόβλημα**

- Διεξαγωγή έρευνας από μία εταιρία έρευνας μάρκετινγκ ώστε να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις ενός πελάτη με το **μικρότερο δυνατό κόστος**

Έρευνα μάρκετινγκ

- Μια εταιρία έρευνας μάρκετινγκ πρόκειται να διεξάγει για λογαριασμό ενός πελάτη μία έρευνα προκειμένου να εκτιμήσει την ανταπόκριση των καταναλωτών σε ένα νέο προϊόν

Έρευνα μάρκετινγκ

- Η έρευνα θα γίνει με συνεντεύξεις και το **κόστος** της δίνεται, ανά κατηγορία συνέντευξης, από τον παρακάτω πίνακα

Κατηγορία νοικοκυριού	Ημέρα	Βράδυ
Με παιδιά	1500	1800
Χωρίς παιδιά	1300	1600
Ενός ατόμου	1000	1200

Έρευνα μάρκετινγκ

- **Περιορισμοί**

1. Η έρευνα πρέπει να καλύψει, με το μικρότερο δυνατό κόστος, 800 νοικοκυριά
2. Να ερωτηθούν
 - τουλάχιστον 400 νοικοκυριά με παιδιά
 - τουλάχιστον 200 νοικοκυριά χωρίς παιδιά
 - τουλάχιστον 100 νοικοκυριά ενός ατόμου
3. Ο αριθμός των νοικοκυριών που θα ερωτηθούν τη νύχτα να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού που θα ερωτηθούν τη μέρα

Έρευνα μάρκετινγκ

- **Περιορισμοί**

4. Τουλάχιστον το 50% των συνεντεύξεων σε νοικοκυριά με παιδιά να γίνει τη νύχτα
5. Τουλάχιστον το 60% των συνεντεύξεων σε νοικοκυριά χωρίς παιδιά να γίνει τη νύχτα
6. Τουλάχιστον το 70% των συνεντεύξεων σε νοικοκυριά ενός ατόμου να γίνει τη νύχτα

Έρευνα μάρκετινγκ

- **Μεταβλητές απόφασης**

- x_{11} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών με παιδιά την ημέρα
- x_{12} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών με παιδιά τη νύχτα
- x_{21} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών χωρίς παιδιά την ημέρα
- x_{22} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών χωρίς παιδιά τη νύχτα
- x_{31} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών ενός ατόμου την ημέρα
- x_{32} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών ενός ατόμου τη νύχτα

Έρευνα μάρκετινγκ

- Αντικειμενική συνάρτηση

$$\text{Min } z = 1500x_{11} + 1800x_{12} + 1300x_{21} + 1600x_{22} + 1000x_{31} + 1200x_{32}$$

Έρευνα μάρκετινγκ

- Η έρευνα θα γίνει με συνεντεύξεις και το **κόστος** της δίνεται, ανά κατηγορία συνέντευξης, από τον παρακάτω πίνακα

Κατηγορία νοικοκυριού	Ημέρα	Βράδυ
Με παιδιά	1500	1800
Χωρίς παιδιά	1300	1600
Ενός ατόμου	1000	1200

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού 60

Έρευνα μάρκετινγκ

Έρευνα μάρκετινγκ

• Μεταβλητές απόφασης

- x_{11} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών με παιδιά την ημέρα
- x_{12} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών με παιδιά τη νύχτα
- x_{21} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών χωρίς παιδιά την ημέρα
- x_{22} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών χωρίς παιδιά τη νύχτα
- x_{31} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών ενός ατόμου την ημέρα
- x_{32} : αριθμός συνεντεύξεων νοικοκυριών ενός ατόμου τη νύχτα

• Περιορισμοί

1. Συνολικός αριθμός νοικοκυριών

$$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{32} = 800$$

2. Ελάχιστος αριθμός συνεντεύξεων ανά κατηγορία νοικοκυριού

$$x_{11} + x_{12} \geq 400$$

$$x_{21} + x_{22} \geq 200$$

$$x_{31} + x_{32} \geq 100$$

Έρευνα μάρκετινγκ

- **Περιορισμοί**

3. Οι βραδινές συνεντεύξεις θα πρέπει να είναι τουλάχιστον όσες είναι και οι πρωινές

$$\mathbf{x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq x_{11} + x_{21} + x_{31} \Leftrightarrow -x_{11} + x_{12} - x_{21} + x_{22} - x_{31} + x_{32} \geq 0}$$

4. Ελάχιστος αριθμός βραδινών συνεντεύξεων ανά κατηγορία νοικοκυριού

$$\mathbf{x_{12} \geq 0,5(x_{11} + x_{12}) \Leftrightarrow -0,5 x_{11} + 0,5x_{12} \geq 0}$$

$$\mathbf{x_{22} \geq 0,6(x_{21} + x_{22}) \Leftrightarrow -0,6 x_{21} + 0,4x_{22} \geq 0}$$

$$\mathbf{x_{32} \geq 0,7(x_{31} + x_{32}) \Leftrightarrow -0,7 x_{31} + 0,3x_{32} \geq 0}$$

Έρευνα μάρκετινγκ

- Συνολικό μοντέλο
- **Min $z = 1500x_{11} + 1800x_{12} + 1300x_{21} + 1600x_{22} + 1000x_{31} + 1200x_{32}$**
 1. **$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{32} = 800$**
 2. **$x_{11} + x_{12} \geq 400$ (με παιδιά)**
 3. **$x_{21} + x_{22} \geq 200$ (χωρίς παιδιά)**
 4. **$x_{31} + x_{32} \geq 100$ (ενός ατόμου)**
 5. **$-x_{11} + x_{12} - x_{21} + x_{22} - x_{31} + x_{32} \geq 0$**
 6. **$x_{12} \geq 0,5(x_{11} + x_{12}) \Rightarrow -0,5x_{11} + 0,5x_{12} \geq 0$**
 7. **$x_{22} \geq 0,6(x_{21} + x_{22}) \Rightarrow -0,6x_{21} + 0,4x_{22} \geq 0$**
 8. **$x_{32} \geq 0,7(x_{31} + x_{32}) \Rightarrow -0,7x_{31} + 0,3x_{32} \geq 0$**
 9. **$x_{ij} \geq 0, i=1,2,3, j=1,2$**

Έρευνα μάρκετινγκ

- Λύση

Μεταβλητή	Αριθμός συνεντεύξεων	Κόστος συνέντευξης	Συνολικό κόστος
x_{11}	200	1500	300.000
x_{12}	200	1800	360.000
x_{21}	80	1300	104.000
x_{22}	120	1600	192.000
x_{31}	60	1000	60.000
x_{32}	140	1200	168.000
Σύνολο			1.184.000