Επιχειρησιακή Έρευνα

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων,

Πανεπιστήμιο Πατρών

Ακαδημαϊκό έτος: 2021-2022

Διάλεξη 4η

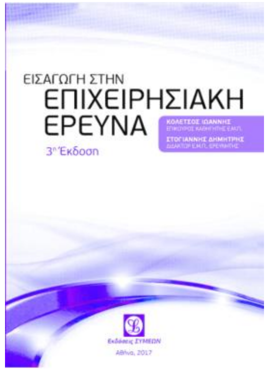
Ιστορική αναδρομή της μεθόδου Simplex

Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Βασικοί ορισμοί

Βασικά θεωρήματα

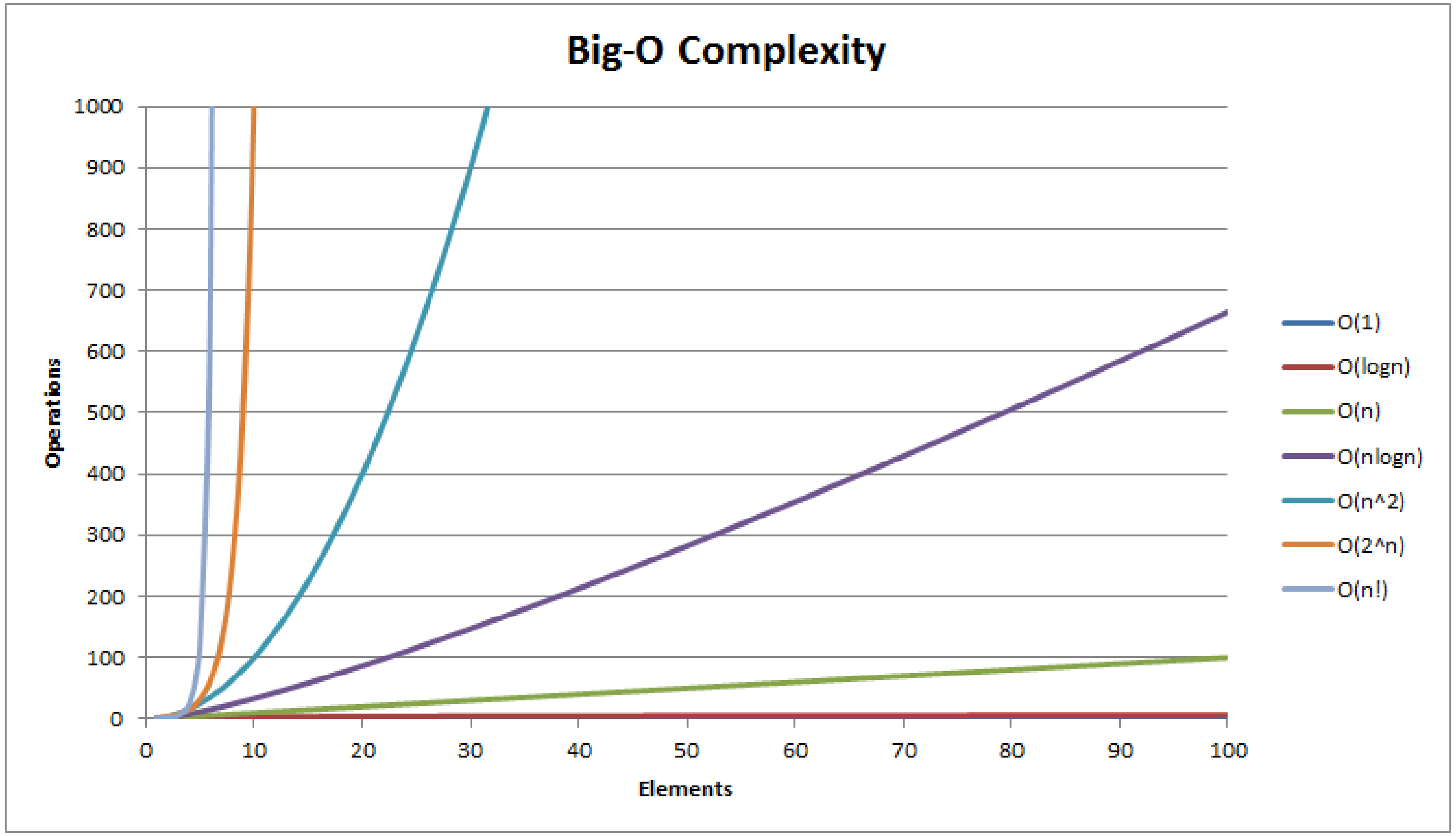
Αλγόριθμος Simplex



5.1 έως 5.14

Ιστορική αναδρομή της μεθόδου Simplex

- ο G. Danzting ανακαλύπτει την μέθοδο το 1947
- Στην χειρότερη περίπτωση απαιτεί εκθετικό χρόνο



CSE 373

Algorithm Analysis and Runtime Complexity

slides created by Marty Stepp
http://www.cs.washington.edu/373/

Complexity classes

- **complexity class** : A category of algorithm efficiency based on the algorithm's relationship to the input size *N*.

Class	Big-Oh	If you double *N*, ...	Example
constant	$O(1)$	unchanged	10ms
logarithmic	$O(\log_2 N)$	increases slightly	175ms
linear	$O(N)$	doubles	3.2 sec
log-linear	$O(N \log_2 N)$	slightly more than doubles	6 sec
quadratic	$O(N^2)$	quadruples	1 min 42 sec
cubic	$O(N^3)$	multiplies by 8	55 min
...	...	...	...
exponential	$O(2^N)$	multiplies drastically	$5 * 10^{61}$ years

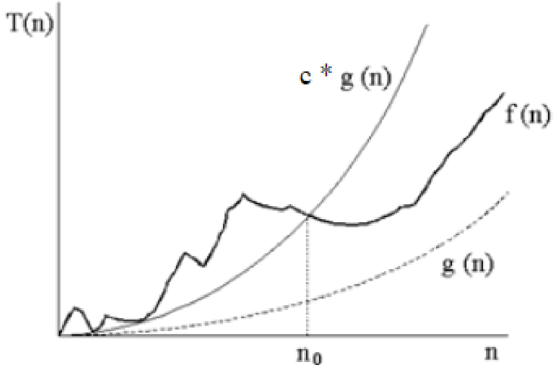
Big-Oh defined

- Big-Oh is about finding an *asymptotic upper bound*.
- Formal definition of Big-Oh:

  $f(N) = O(g(N))$, if there exists positive constants c , N_0 such that

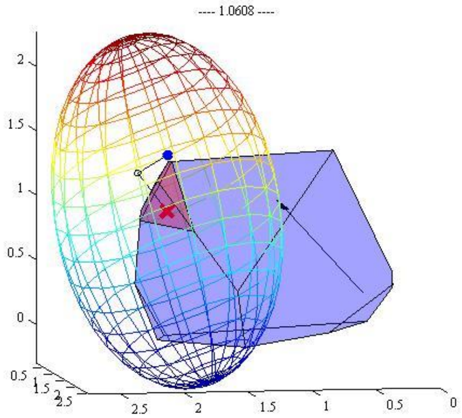
  $f(N) \leq c \cdot g(N)$ for all $N \geq N_0$.

  - We are concerned with how *f* grows when *N* is large.
    - not concerned with small *N* or constant factors
  - Lingo: "$f(N)$ grows no faster than $g(N)$."

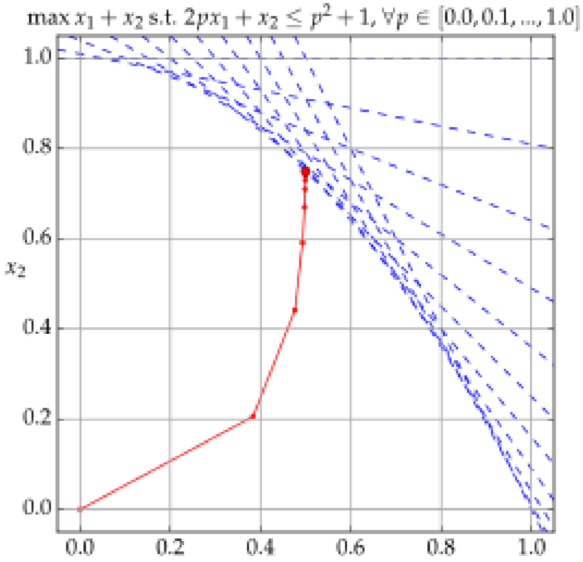


Ιστορική αναδρομή της μεθόδου Simplex (συν)

- Το 1979 ο L. Khachiyan ανακαλύπτει πολυωνυμικό αλγόριθμο.
  - Καλή αριθμητική συμπεριφορά και απόδοση χρόνου στην μέση περίπτωση.



- Το 1984 ο N. Karmakar ανακαλύπτει πολυωνυμικό αλγόριθμο με καλή απόδοση χρόνου στην μέση περίπτωση.



Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Αντικειμενική συνάρτηση: Να **βελτιστοποιηθεί** (μεγιστοποιηθεί ή ελαχιστοποιηθεί):

$$\text{optimize } z = f\left(\boldsymbol{x}\right) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \{\leq,=,\geq\} & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \{\leq,=,\geq\} & b_2 \\
\vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \{\leq,=,\geq\} & b_m
\end{array}$$

και $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots n$

Τα $a_{ij}, b_i, c_j, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n$ υποθέτουμε πως είναι γνωστές σταθερές.

Θεωρούμε πως για κάθε ένα περιορισμό μπορεί να ισχύει μόνο μία από τις σχέσεις $\leq, =, \geq$.

Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Προς χάριν της τυποποίησης της διαδικασίας επίλυσης, η αλγεβρική αναπαράσταση του χώρου των λύσεων προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι κατασκευασμένη υπό τις εξής δύο συνθήκες:

- Όλοι οι περιορισμοί (με εξαίρεση των περιορισμών μη - αρνητικότητας) είναι ισότητες με μη - αρνητικό δεξιό μέλος.
- Όλες οι μεταβλητές είναι μη - αρνητικές.

Η μορφή που λαμβάνει οποιοδήποτε πρόβλημα Γ.Π. μετά την επιβολή των παραπάνω συνθηκών, καλείται **κανονική μορφή** ή **τυποποιημένη** (**standard form**).

Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Προκειμένου οι περιορισμοί να αναχθούν σε ισότητες, εισάγονται νέες μη-αρνητικές μεταβλητές οι **περιθώριες** μεταβλητές.

Ένας περιορισμός ανισότητας της μορφής "≤":

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \ ,$$

μετατρέπεται σε ισότητα με μια μη-αρνητική περιθώρια μεταβλητή *s*, στην οποία αναφερόμαστε με την ονομασία **χαλαρή μεταβλητή** (**slack variable**):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s = b_i \ , \quad s \ge 0$$

Για παράδειγμα, ο περιορισμός - ανισότητα $3x_1 + 4x_2 \le 12$ είναι ισοδύναμος με την εξής ισότητα:

$$3x_1 + 4x_2 + s = 12 \, , \quad s \ge 0$$

Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Ένας περιορισμός της μορφής $" \geq "$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \ ,$$

μετατρέπεται σε ισότητα με την αφαίρεση μιας μη-αρνητικής περιθώριας μεταβλητής *s*, την **πλεονασματική μεταβλητή** (**surplus variable**):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - s = b_i \ , \quad s \geq 0$$

Για παράδειγμα, ο περιορισμός-ανισότητα $x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 24$ είναι ισοδύναμος με την εξής ισότητα,

$$x_1 + 4x_2 + 6x_3 - s = 24 \, , \quad s \geq 0$$

Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Επιτυγχάνουμε το δεξιό μέλος να είναι μη-αρνητικό, πολλαπλασιάζοντας και τις 2 πλευρές με (-1), όποτε αυτό είναι απαραίτητο.

Παραδείγματος χάριν, ο περιορισμός

$$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq -13$$

είναι ισοδύναμος με την ισότητα

$$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + s = -13, \quad s \geq 0,$$

που με τη σειρά της, αφού πολλαπλασιαστεί με (-1) παίρνει την τελική της μορφή

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - s = 13,$$

όπου έχει προκύψει ένα μη-αρνητικό δεξιό μέλος, όπως ήταν επιθυμητό.

Μεταβλητές χωρίς πρόσημο

Αν μία μεταβλητή μπορεί να λαμβάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή (θετική, μηδέν ή αρνητική) την εκφράζουμε ως διαφορά δύο θετικών μεταβλητών.

Για παράδειγμα, ο περιορισμός $25x_1 + 2x_2 + x_3 = 200$ όπου x_3 δεν έχει καθορισμένο πρόσημο, μετατρέπεται στον $25x_1 + 2x_2 + x_3^+ - x_3^- = 200$ με $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, όπου $x_3^+, x_3^- \geq 0$.

Αν $x_3^+ > 0$ και $x_3^- = 0$, τότε η x_3^+ αντιπροσωπεύει έλλειμμα, αλλιώς αν $x_3^- > 0$ και $x_3^+ = 0$, τότε η x_3^- αντιπροσωπεύει πλεόνασμα. Η λύση του προβλήματος δε μπορεί να πάρει θετικές τιμές για τις x_3^+ και x_3^- ταυτόχρονα.

Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Το μοντέλο του γενικού προβλήματος Γ.Π. στην κανονική του μορφή υπό μορφή πινάκων γράφεται:

$$\max\ (\text{ή}\ \min)\ z = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\ , \quad (\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0})$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

Ορισμοί των λύσεων του προβλήματος:

- **Λύση** του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε λύση του συστήματος, δηλαδή κάθε διάνυσμα $\boldsymbol{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ που ικανοποιεί το σύστημα αυτό.

- **Δυνατή** ή **εφικτή λύση** του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε λύση του συστήματος που ικανοποιεί τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας.

- **Βέλτιστη εφικτή λύση** του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε εφικτή λύση αυτού που **βελτιστοποιεί** την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.

$$\max\ (\acute{\eta} \min)\ \mathrm{z} = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\ , \quad (\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0})$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

Βάση του συστήματος των περιορισμών

Σε ένα σύνολο από *m* εξισώσεις με *n* μεταβλητές $\left(\boldsymbol{m}<\boldsymbol{n}\right)$, αν θέσουμε $\left(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}\right)$ μεταβλητές ίσες με το μηδέν και στη συνέχεια λύσουμε τις *m* εξισώσεις για τις εναπομείνασες *m* μεταβλητές, τότε η λύση που προκύπτει, αν είναι μοναδική, αντιστοιχει σε ακρότατο σημείο του χώρου των λύσεων.

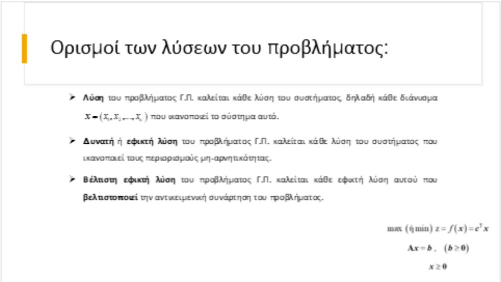
Βασικές και μη βασικές μεταβλητές

- Ο τετραγωνικός $m \times m$ πίνακας που προκύπτει από τον **A** και έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες καλείται βάση του συστήματος και θα συμβολίζεται με **B**.

- Οι m μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες μίας βάσης **B** καλούνται **βασικές (**ή εξαρτημένες) **μεταβλητές** ως προς τη βάση αυτή.

- Οι υπόλοιπες $(n-m)$ μεταβλητές που αντιστοιχούν στις $(n-m)$ στήλες του **A** που δεν περιλαμβάνονται στη βάση **B** καλούνται **μη βασικές** (ή ανεξάρτητες) **μεταβλητές** ως προς τη βάση αυτή.

Βασικές λύσεις



Ορισμοί των λύσεων του προβλήματος:

- **Λύση** του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε λύση του συστήματος, δηλαδή κάθε διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ που ικανοποιεί το σύστημα αυτό.
- **Δυνατή** ή **εφικτή λύση** του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε λύση του συστήματος που ικανοποιεί τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας.
- **Βέλτιστη εφικτή λύση** του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε εφικτή λύση αυτού που **βελτιστοποιεί** την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.

$$\max\ (\acute{\eta}\ \min)\ z = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad (\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0})$$
$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

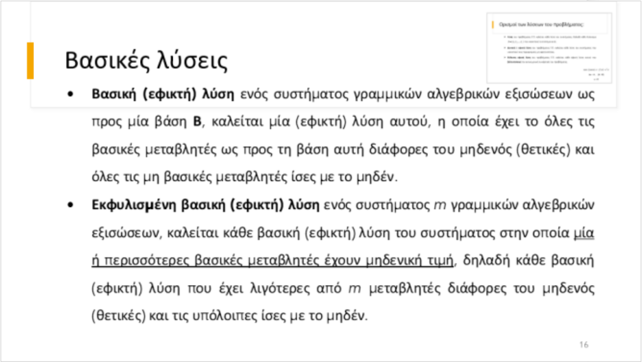
- **Βασική (εφικτή) λύση** ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς μία βάση **B**, καλείται μία (εφικτή) λύση αυτού, η οποία έχει το όλες τις βασικές μεταβλητές ως προς τη βάση αυτή διάφορες του μηδενός (θετικές) και όλες τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με το μηδέν.
- **Εκφυλισμένη βασική (εφικτή) λύση** ενός συστήματος *m* γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, καλείται κάθε βασική (εφικτή) λύση του συστήματος στην οποία μία ή περισσότερες βασικές μεταβλητές έχουν μηδενική τιμή, δηλαδή κάθε βασική (εφικτή) λύση που έχει λιγότερες από *m* μεταβλητές διάφορες του μηδενός (θετικές) και τις υπόλοιπες ίσες με το μηδέν.

Βασικά θεωρήματα

Θεώρημα 1: Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων είναι πεπερασμένος.

Θεώρημα 2: Η αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος Γ.Π. λαμβάνει τη βέλτιστη τιμή της σε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων.

Βασικά της μεθόδου Simplex

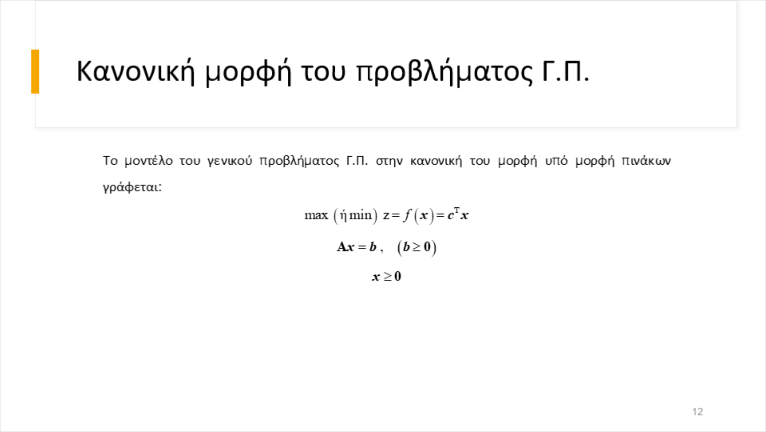


- Οι περιορισμοί μετατρέπονται σε ισότητες και το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι όλες μη αρνητικές λύσεις του συστήματος των m εξισώσεων με τις n μεταβλητές όπου $m \leq n$.
- Προσδιορίζουμε τις βασικές εφικτές λύσεις του παραπάνω συστήματος.
- Επιλέγουμε την βασική εφικτή λύση που βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Ο Αλγόριθμος Simplex

Πρόβλημα μεγιστοποίησης

- **Βήμα 1ο** : Υπολογίζουμε μια αρχική λύση x_B επιλέγοντας την βάση B από τις στήλες του πίνακα A και για την λύση αυτή, την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

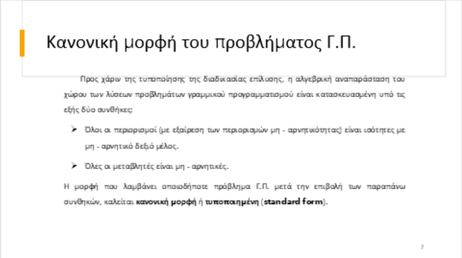


Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Το μοντέλο του γενικού προβλήματος Γ.Π. στην κανονική του μορφή υπό μορφή πινάκων γράφεται:

$$\max\ (\text{ή} \min)\ z = f(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\quad (\mathbf{b} \geq 0)$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

12



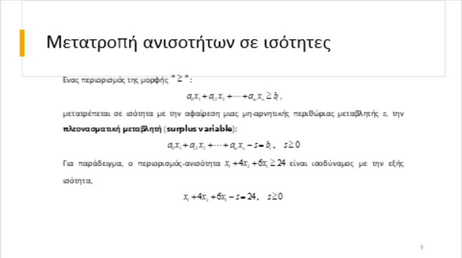
Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Προς χάριν της τυποποίησης της διαδικασίας επίλυσης, η αλγεβρική αναπαράσταση του χώρου των λύσεων προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι κατασκευασμένη υπό τις εξής δύο συνθήκες:

- Όλοι οι περιορισμοί (με εξαίρεση των περιορισμών μη - αρνητικότητας) είναι ισότητες με μη - αρνητικό δεξιό μέλος.
- Όλες οι μεταβλητές είναι μη - αρνητικές.

Η μορφή που λαμβάνει οποιοδήποτε πρόβλημα Γ.Π. μετά την επιβολή των παραπάνω συνθηκών, καλείται **κανονική μορφή** ή **τυποποιημένη** (**standard form**).

7



Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Ενας περιορισμός της μορφής "≥":

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

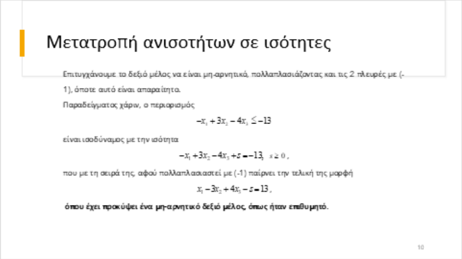
μετατρέπεται σε ισότητα με την αφαίρεση μιας μη-αρνητικής περιθώριας μεταβλητής s, την **πλεονασματική μεταβλητή** (**surplus variable**):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - s = b_i,\quad s \geq 0$$

Για παράδειγμα, ο περιορισμός-ανισότητα $x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 24$ είναι ισοδύναμος με την εξής ισότητα,

$$x_1 + 4x_2 + 6x_3 - s = 24,\quad s \geq 0$$

9



Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Επιτυγχάνουμε το δεξιό μέλος να είναι μη-αρνητικό, πολλαπλασιάζοντας και τις 2 πλευρές με (-1), όποτε αυτό είναι απαραίτητο.

Παραδείγματος χάριν, ο περιορισμός

$$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq -13$$

είναι ισοδύναμος με την ισότητα

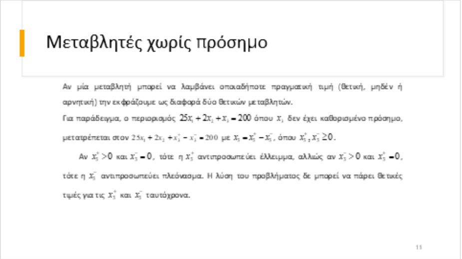
$$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + s = -13,\quad s \geq 0,$$

που με τη σειρά της, αφού πολλαπλασιαστεί με (-1) παίρνει την τελική της μορφή

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - s = 13,$$

όπου έχει προκύψει ένα μη-αρνητικό δεξιό μέλος, όπως ήταν επιθυμητό.

10



Μεταβλητές χωρίς πρόσημο

Αν μία μεταβλητή μπορεί να λαμβάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή (θετική, μηδέν ή αρνητική) την εκφράζουμε ως διαφορά δύο θετικών μεταβλητών.

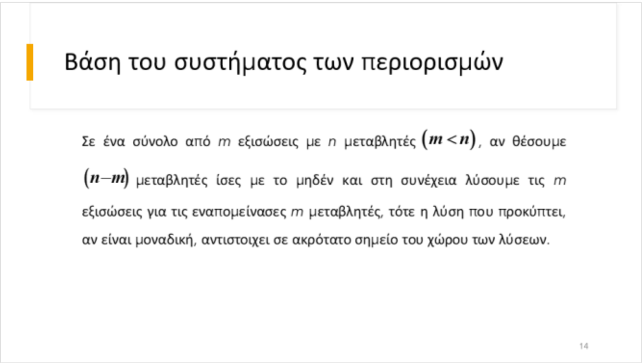
Για παράδειγμα, ο περιορισμός $25x_1 + 2x_2 + x_3 = 200$ όπου x_3 δεν έχει καθορισμένο πρόσημο, μετατρέπεται στον $25x_1 + 2x_2 + x_3^+ - x_3^- = 200$ με $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, όπου $x_3^+, x_3^- \geq 0$.

Αν $x_3^+ > 0$ και $x_3^- = 0$, τότε η x_3^+ αντιπροσωπεύει έλλειμμα, αλλιώς αν $x_3^- > 0$ και $x_3^+ = 0$, τότε η x_3^- αντιπροσωπεύει πλεόνασμα. Η λύση του προβλήματος δε μπορεί να πάρει θετικές τιμές για τις x_3^+ και x_3^- ταυτόχρονα.

11

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 2ο :** Εκφράζουμε τα διανύσματα του πίνακα A που δεν ανήκουν στην βάση, συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ποσότητες y_j έτσι ώστε $a_j = By_j$ (δηλαδή τα διανύσματα με στοιχεία $y_{ij} = B^{-1}a_j$)



Βάση του συστήματος των περιορισμών

Σε ένα σύνολο από m εξισώσεις με n μεταβλητές $(m<n)$, αν θέσουμε $(n-m)$ μεταβλητές ίσες με το μηδέν και στη συνέχεια λύσουμε τις m εξισώσεις για τις εναπομείνασες m μεταβλητές, τότε η λύση που προκύπτει, αν είναι μοναδική, αντιστοιχει σε ακρότατο σημείο του χώρου των λύσεων.

14

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 3ο :** Υπολογίζουμε τις τιμές z_j για τα διανύσματα εκτός βάσης κάνοντας χρήση της σχέσης $z_j = c_B^T y_j$

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 4ο :** Υπολογίζουμε τις ποσότητες $z_j - c_j$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

A. Αν για όλα τα j ισχύει ότι $z_j - c_j \geq 0$, τότε έχουμε βέλτιστη λύση

B. Αν ένα ή περισσότερα $z_j - c_j < 0$, επιλέγουμε το μη βασικό διάνυσμα α_k να εισέλθει στην βάση εφαρμόζοντας το κριτήριο $c_k - z_j = \min_i \{z_j - c_j | z_j - c_j < 0\}$

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 5ο :**
  A. Αν όλα τα $y_{ik} \leq 0$, τότε υπάρχει μια μη φραγμένη λύση.
  B. Αν ένα τουλάχιστον $y_{ik} > 0$, επιλέγουμε το διάνυσμα b_r που θα εγκαταλείψει την βάση, σύμφωνα με το κριτήριο:

$$\theta = \frac{x_{b_r}}{y_{rj}} = \min_i \left\{ \frac{x_{b_r}}{y_{rj}}, y_{ij} > 0 \right\}$$

Μη φραγμένη λύση: όταν οι τιμές των μεταβλητών μπορούν να αυξηθούν απεριόριστα, χωρίς να παραβιάζουν κάποιον από τους περιορισμούς. Δηλαδή ο χώρος των λύσεων είναι μη φραγμένος προς τουλάχιστον μια κατεύθυνση.

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 6ο :** Υπολογίζουμε

A. την νέα βάση B αντικαθιστώντας τα διανύσματα b_r με το μη-βασικό διάνυσμα a_k

B. Τη νέα βασική εφικτή λύση από τις σχέσεις

$$\widehat{x_{Bi}} = x_{Bi} - x_{Br}\frac{y_{ij}}{y_{rj}} \text{ για } i = 1,2,\dots,m \text{ και } i \neq r$$

$$\widehat{x_{Br}} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$$

C. τις νέες τιμές των y_{ij}, $z_i - c_j$ και z

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- Επιστρέφουμε στο 2ο βήμα και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Παράδειγμα

Αντικειμενική συνάρτηση:

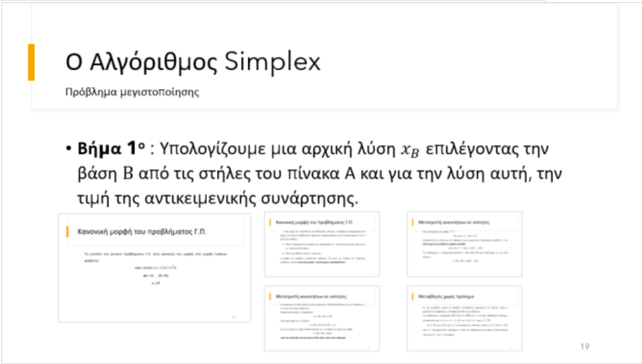
$$\max z = x_1 + 2 * x_2 + 3 * x_3$$

Υπό των περιορισμών:

$$x_1 + 2 * x_2 + x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



Παράδειγμα (βήμα 1ο)

- Μετατροπή σε κανονική μορφή

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = x_1 + 2 * x_2 + 3 * x_3 + 0 * s_1$$

Υπό των περιορισμών:

$$x_1 + 2 * x_2 + x_3 + s_1 = 40$$

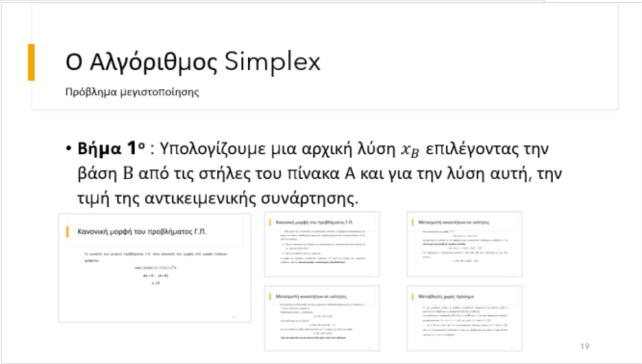
$$x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1 \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα (βήμα 1ο)

- Επιλέγουμε ως αρχική βάση τα διανύσματα α_1 και α_4.

  Οπότε $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Η αρχική λύση προκύπτει από την επίλυση του συστήματος

  $\mathrm{B}x_b = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$

- Συνεπώς η λύση είναι $[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{s}_1] = [30{,}0{,}0{,}10]$ και η αντικ. συνάρτηση $z = 1 * 30 + 2 * 0 + 3 * 0 + 0 * 10 = 30$.

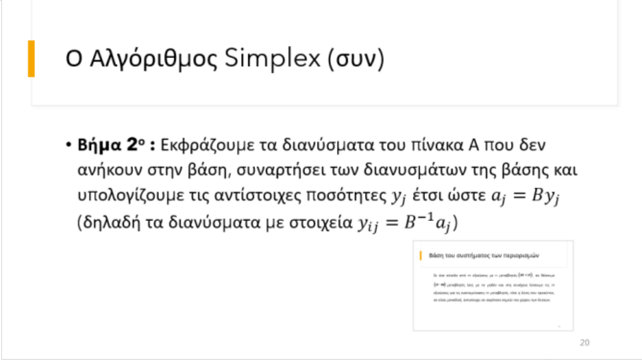
- Η αρχική εφικτή λύση είναι $x_b = [30, 10]^{\mathrm{T}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

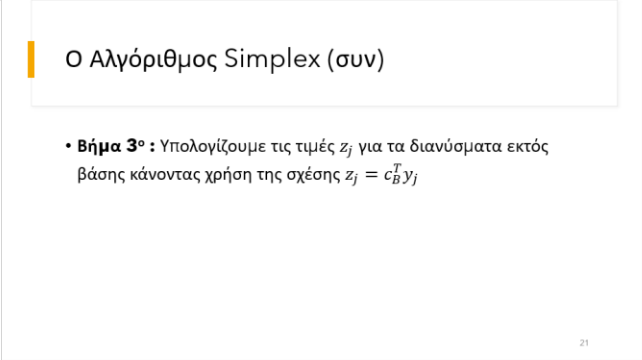
$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (βήμα 2ο)



- $a_2 = By_2 \rightarrow y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $a_3 = By_3 \rightarrow y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$


Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 3ο :** Υπολογίζουμε τις τιμές z_j για τα διανύσματα εκτός βάσης κάνοντας χρήση της σχέσης $z_j = c_B^T y_j$

Παράδειγμα (βήμα 3ο)

- Από τον τύπο $z_j = c_B^T y_j$ και λόγω του ότι η βάση αποτελείται τα x_1 και s_1

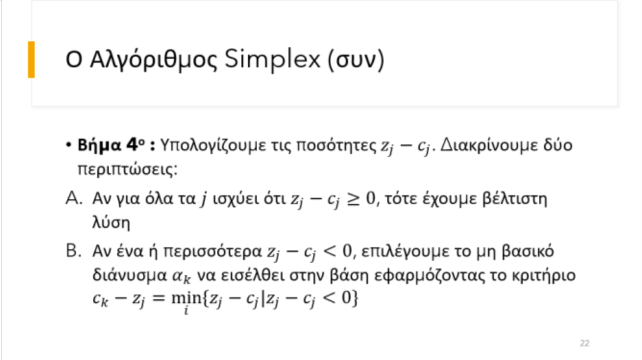
$$x_1 + 2 * x_2 + 3 * x_3 + 0 * s_1 \longrightarrow c_b = [1,0]^{\mathrm{T}}$$

- Από το 2ο βήμα ξέρουμε:

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_b = [1,0]^{\mathrm{T}} \longrightarrow z_2 = c_B^T y_2 = [1,0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_b = [1,0]^{\mathrm{T}} \longrightarrow z_3 = c_B^T y_3 = [1,0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Παράδειγμα (βήμα 4ο)


Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 4ο :** Υπολογίζουμε τις ποσότητες $z_j - c_j$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

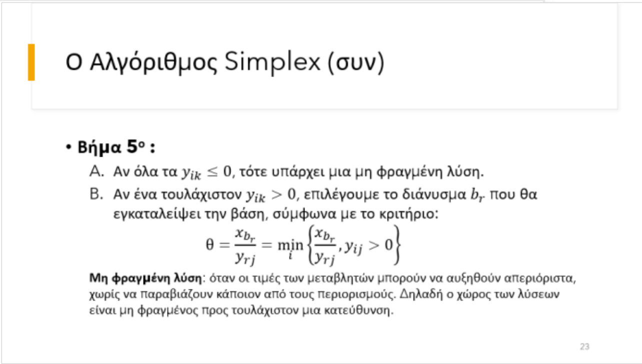
A. Αν για όλα τα j ισχύει ότι $z_j - c_j \geq 0$, τότε έχουμε βέλτιστη λύση

B. Αν ένα ή περισσότερα $z_j - c_j < 0$, επιλέγουμε το μη βασικό διάνυσμα α_k να εισέλθει στην βάση εφαρμόζοντας το κριτήριο $c_k - z_j = \min_i\{z_j - c_j | z_j - c_j < 0\}$

22

- Υπολογίζουμε τις ποσότητες $z_j - c_j$
  - $z_2 - c_2 = 1 - 2 = -1 < 0$
  - $z_3 - c_3 = 1 - 3 = -2 < 0$
- Το διάνυσμα α_3 εισέρχεται στην βάση

Παράδειγμα (βήμα 5ο)


Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 5ο :**
  A. Αν όλα τα $y_{ik} \leq 0$, τότε υπάρχει μια μη φραγμένη λύση.
  B. Αν ένα τουλάχιστον $y_{ik} > 0$, επιλέγουμε το διάνυσμα b_r που θα εγκαταλείψει την βάση, σύμφωνα με το κριτήριο:

$$\theta = \frac{x_{b_r}}{y_{rj}} = \min_i \left\{\frac{x_{b_r}}{y_{rj}}, y_{ij} > 0\right\}$$

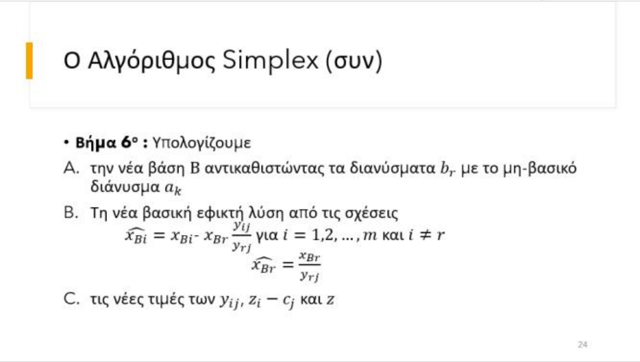
Μη φραγμένη λύση: όταν οι τιμές των μεταβλητών μπορούν να αυξηθούν απεριόριστα, χωρίς να παραβιάζουν κάποιον από τους περιορισμούς. Δηλαδή ο χώρος των λύσεων είναι μη φραγμένος προς τουλάχιστον μια κατεύθυνση.

23

$$y_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad y_3 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad x_b = [30, 10]^{\mathrm{T}}$$

- Υπολογίζουμε ποιο διάνυσμα θα δώσει την θέση του στο α_3 σύμφωνα με το κριτήριο $\theta = \frac{x_{b_r}}{y_{rj}} = \min_i \left\{\frac{x_{b_r}}{y_{rj}}, y_{ij} > 0\right\}$
- Δηλαδή $\min_{i=1,2} \left\{\frac{x_{b_1}}{y_{13}}, \frac{x_{b_2}}{y_{23}}\right\} = \left\{\frac{30}{1}, \frac{10}{0}\right\} \rightarrow \mathrm{i} = 1$
- Το διάνυσμα α_1εγκαταλείπει την βάση.

Παράδειγμα (βήμα 6ο)



Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 6ο :** Υπολογίζουμε

A. την νέα βάση B αντικαθιστώντας τα διανύσματα b_r με το μη-βασικό διάνυσμα a_k

B. Τη νέα βασική εφικτή λύση από τις σχέσεις

$$\widehat{x_{Bi}} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \text{ για } i = 1,2,\dots,m \text{ και } i \neq r$$

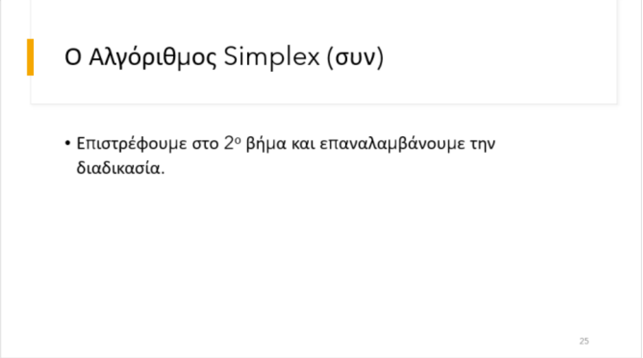
$$\widehat{x_{Br}} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$$

C. τις νέες τιμές των y_{ij}, $z_i - c_j$ και z

24

- Νέα βάση $\widehat{\mathrm{B}} = (\alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Νέα τιμή της αντικ. συνάρτησης $\hat{z} = z + \frac{x_{b_1}}{y_{13}} (c_3 - z_3) = 30 + 30 * 2 = 90$

Παράδειγμα (βήμα 7^o)



- Επιστρέφουμε στο 2^o βήμα για μια ακόμη επανάληψη