

# Επιχειρησιακή Έρευνα

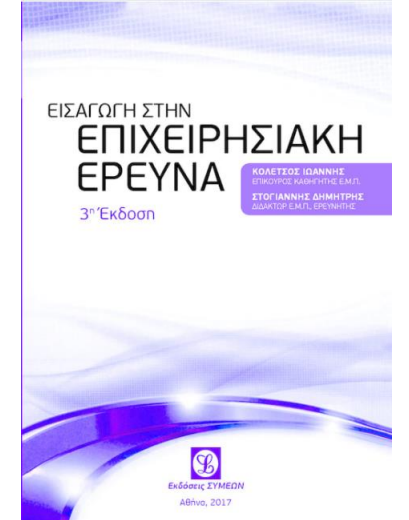
Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών  
Προϊόντων και Τροφίμων,  
Πανεπιστήμιο Πατρών



# Διάλεξη 3η

Γραφική επίλυση γραμμικού προγραμματισμού  
Εναλλακτικά βέλτιστα σημεία  
Ανάλυση ευαισθησίας περιορισμών



# Γραμμικός προγραμματισμός (Linear Programming LP)

- Η αντικειμενική συνάρτηση καθώς και οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις και ανισότητες.

**Αντικειμενική συνάρτηση:**

$$\text{maximize Profit} = \max z = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \quad \text{Μεγιστοποίηση κέρδους}$$


**Υπό των περιορισμών:**

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 480 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 360 \\ 3x_1 + \quad \quad + x_3 \leq 240 \end{array} \right\} \text{Περιορισμοί διαθεσιμότητας του ημερήσιου χρόνου των μηχανών}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad \text{Περιορισμοί μη αρνητικότητας}$$

# Επίλυση και κατανόηση του συστήματος

- Η επίλυση (συνήθως με ΗΥ) καθορίζει την βέλτιστη στρατηγική
- Συμβάλει στην κατανόηση του συστήματος μέσω της ανάλυσης ευαισθησίας, δηλαδή την αλλαγή της στρατηγικής σε διαταραχές του υπό μελέτη συστήματος.



# Γραφική επίλυση



## 2d παράδειγμα γραφικής επίλυσης LP

- Γραμμής παραγωγής 2 προϊόντων: A και B σε δύο διαφορετικές μηχανές M1 και M2.
- Διαθεσιμότητα M1: 20 ώρες/ημέρα και M2: 12 ώρες/ημέρα
- Απαιτούμενες ώρες ανά μονάδα A: 2 ώρες M1 και 1 ώρα M2
- Απαιτούμενες ώρες ανά μονάδα B: 4 ώρες M1 και 3 ώρες M2
- Κέρδος ανά μονάδα A: 40 ευρώ
- Κέρδος ανά μονάδα B: 100 ευρώ
- Όλο τα παραγόμενα προϊόντα απορροφώνται από την αγορά
- Σκοπός: μεγιστοποίηση του κέρδους

# Ορισμός του μοντέλου

**Μεγιστοποίησε την:**

$$z = 40x_1 + 100x_2$$

**Υπό τους περιορισμούς:**

$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

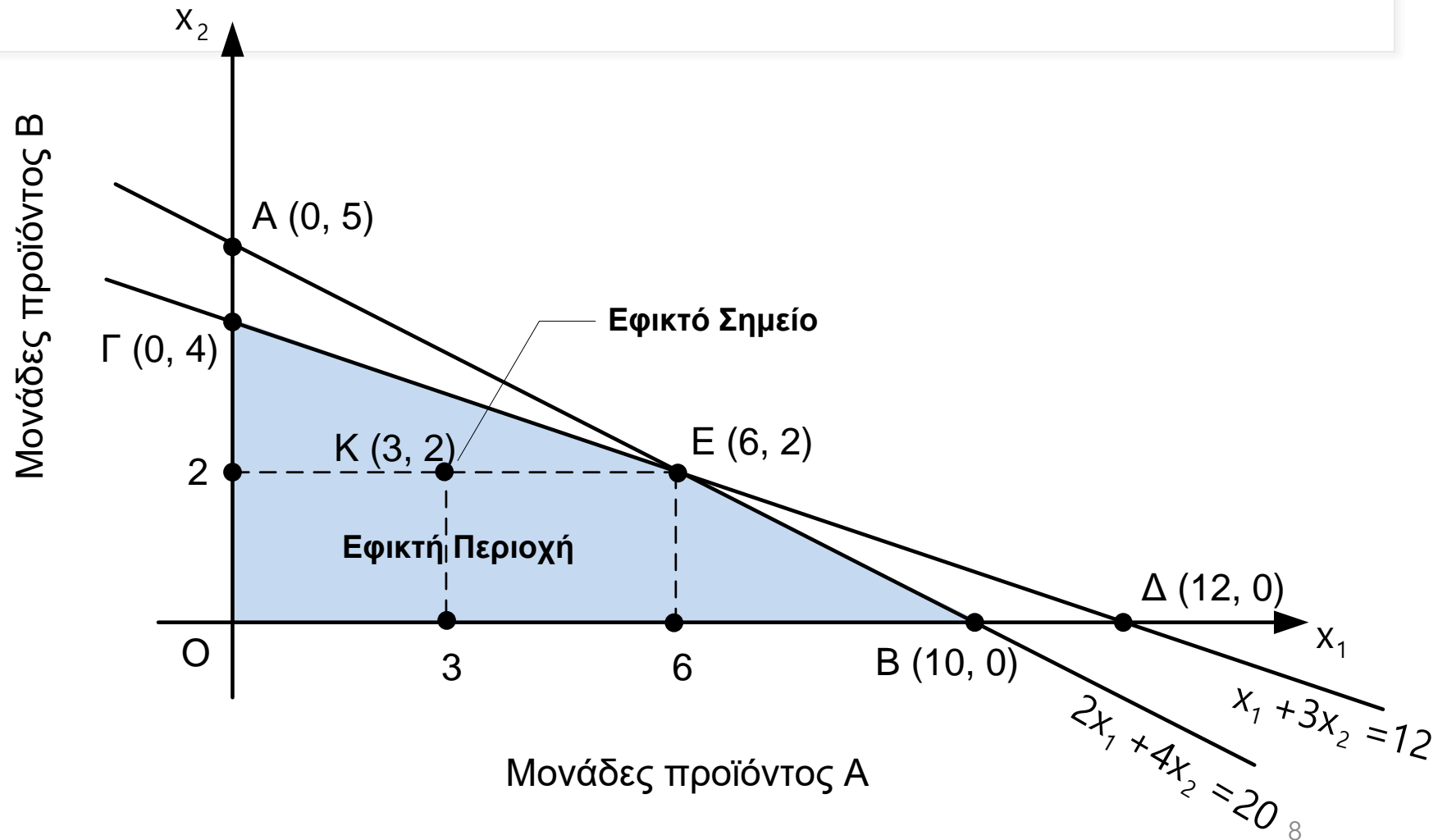
$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Γραφική αναπαράσταση των περιορισμών

$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$

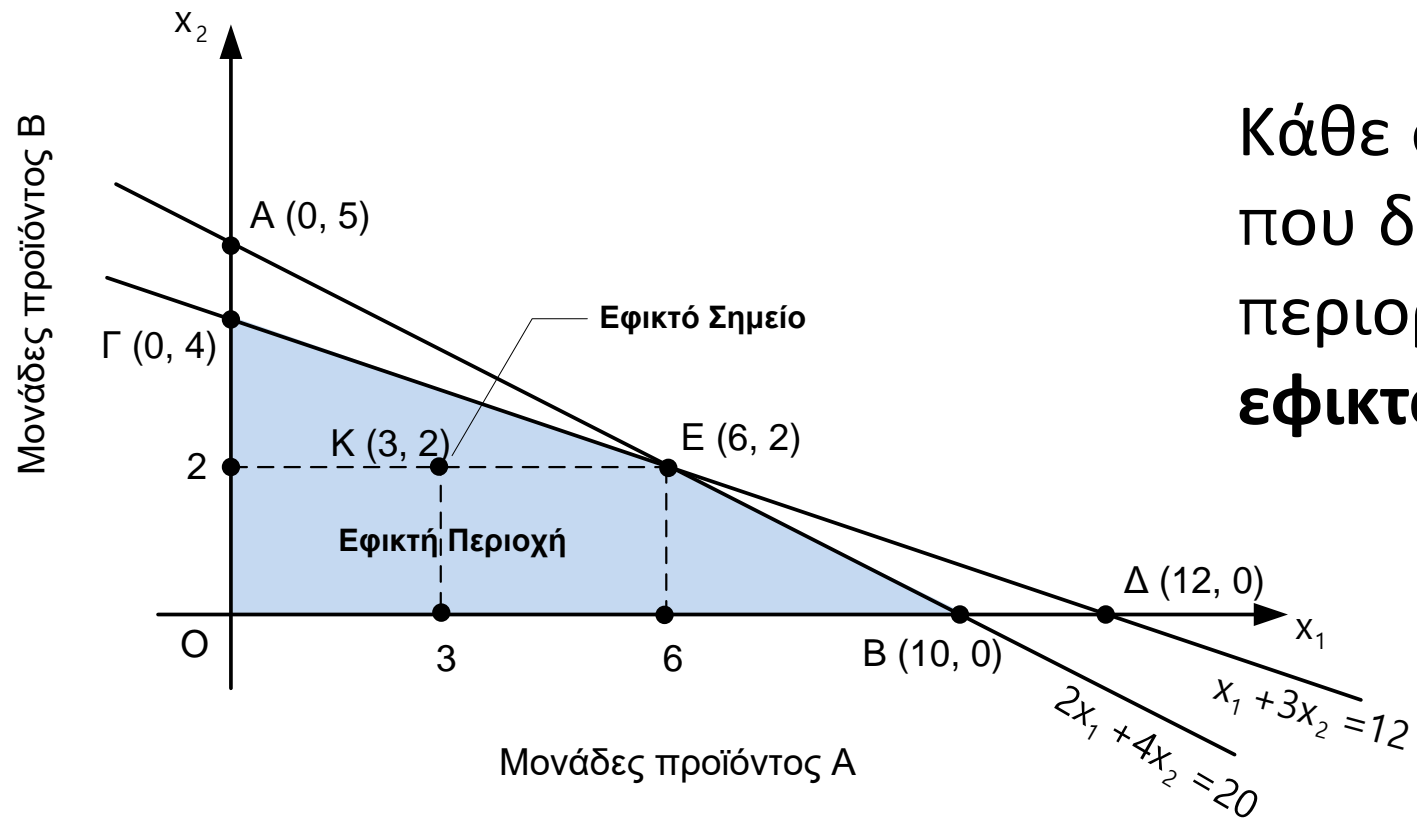
$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



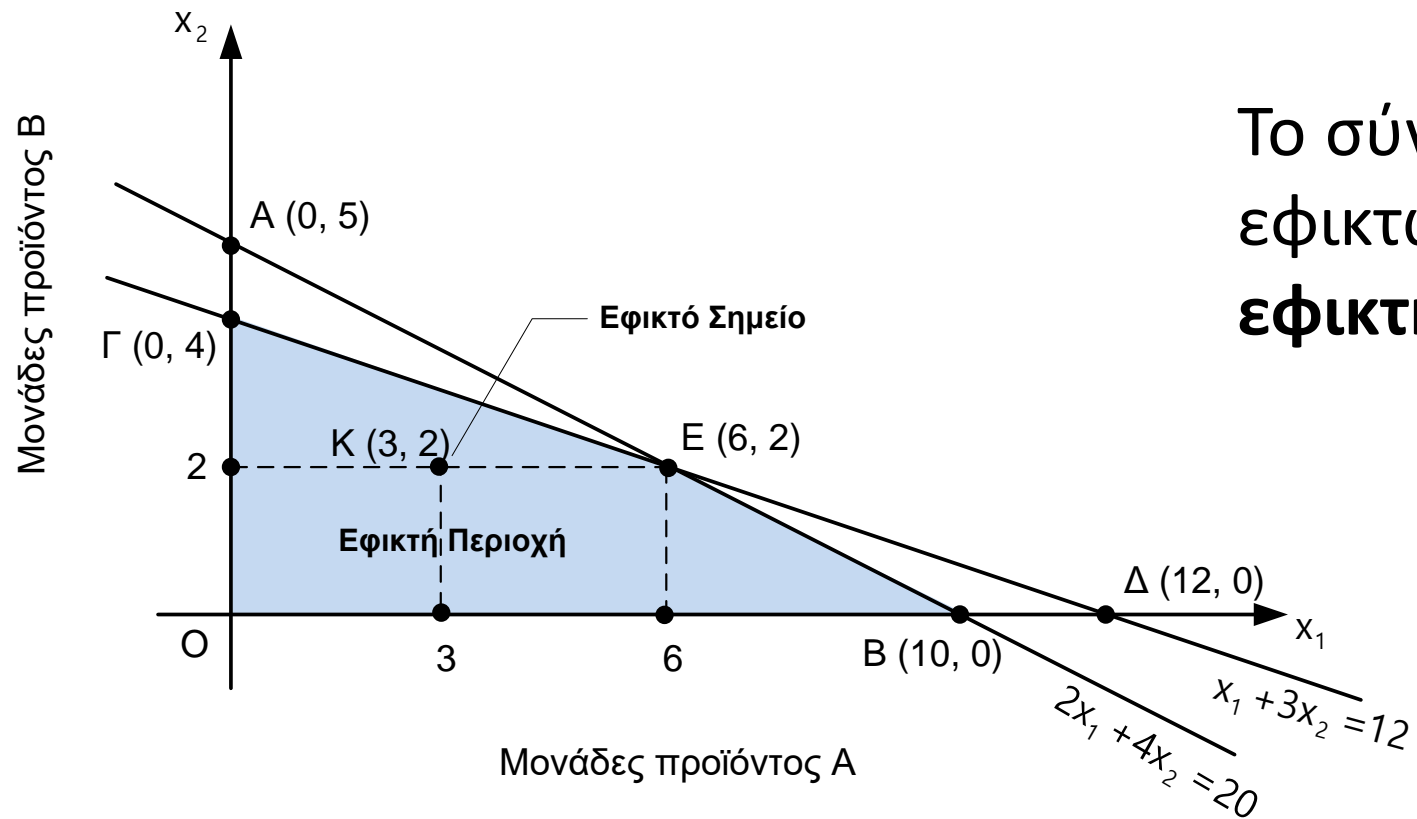


# Εφικτό σημείο



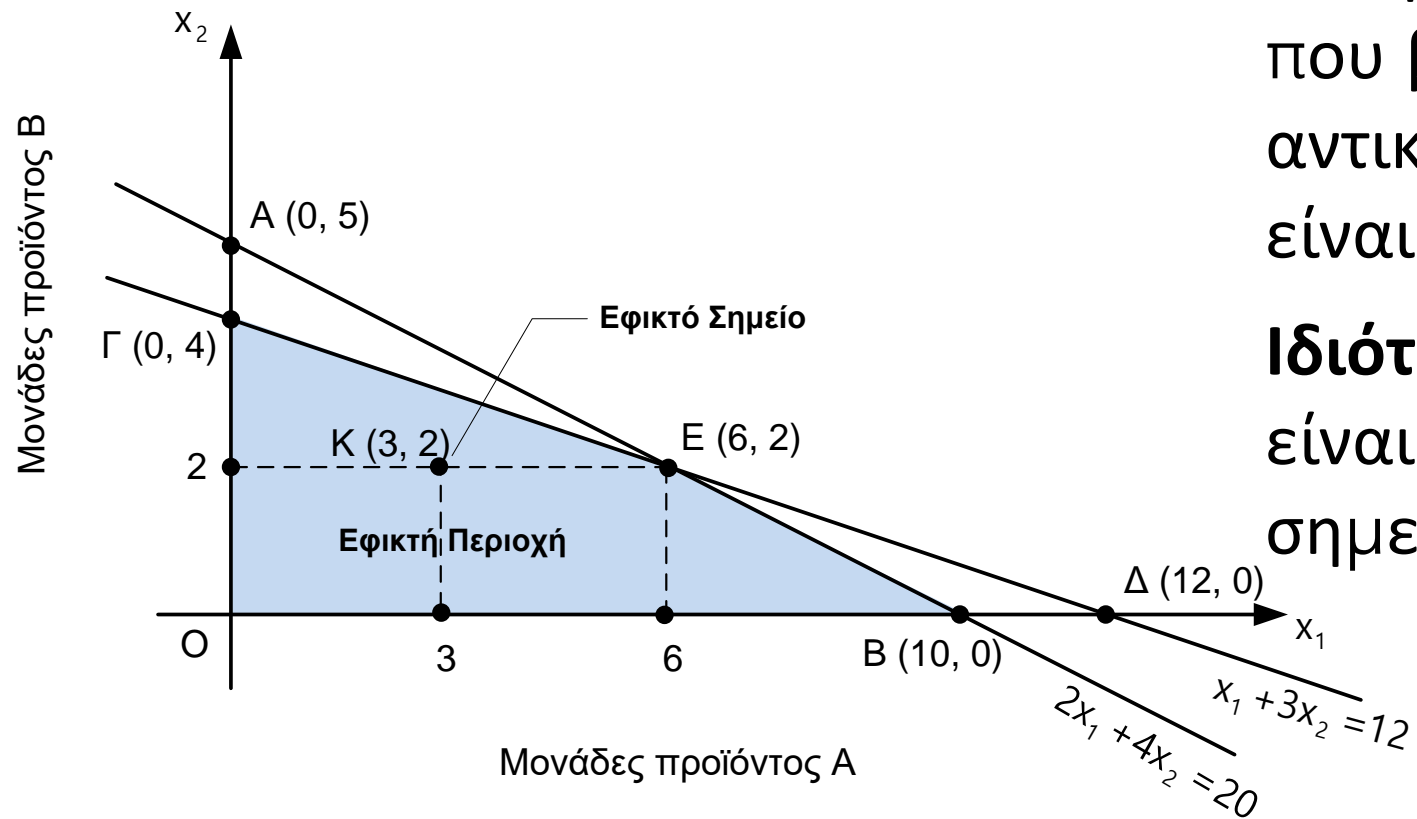
Κάθε σημείο του χώρου λύσης που δεν παραβιάζει τους περιορισμούς, ονομάζεται **εφικτό σημείο**

# Εφικτή περιοχή



Το σύνολο όλων των εφικτών σημείων καλείται **εφικτή περιοχή**.

# Βέλτιστη στρατηγική

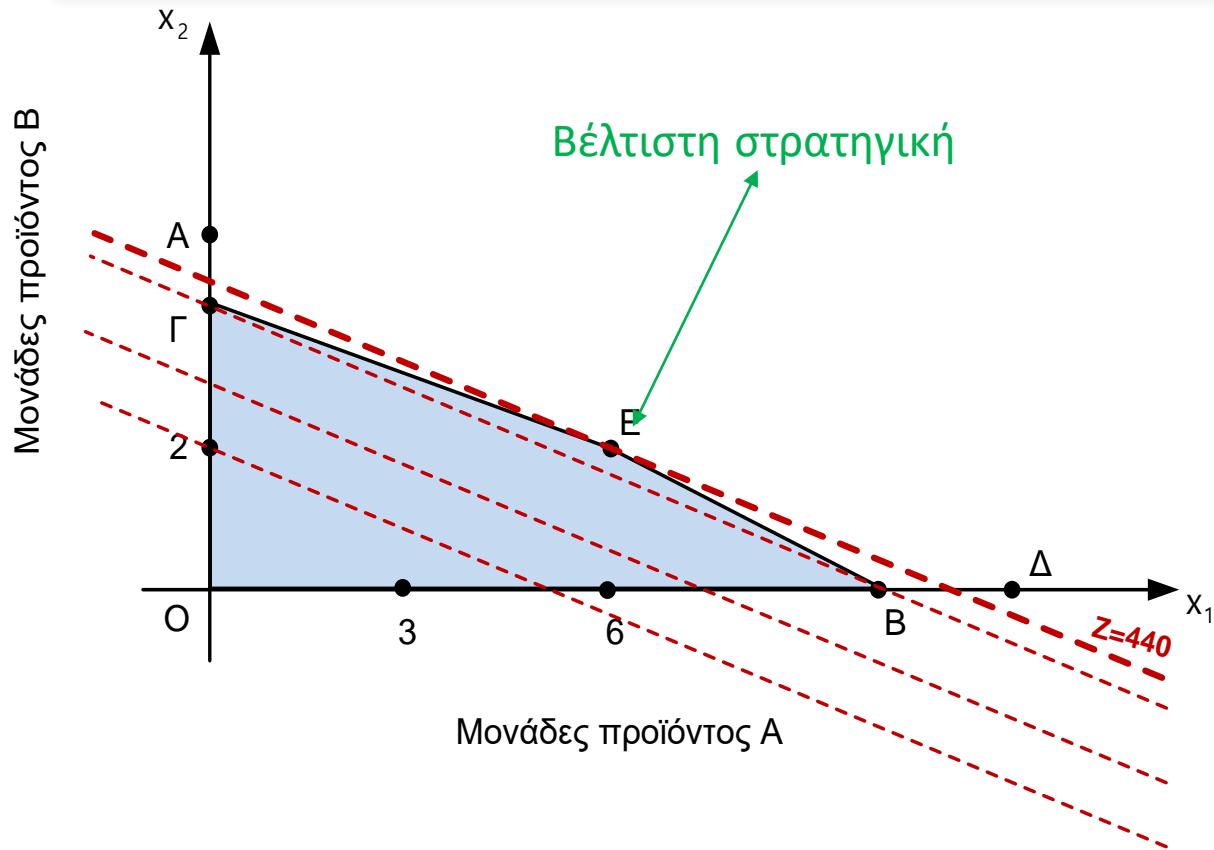


Το εφικτό εκείνο σημείο που βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση είναι μια **βέλτιστη στρατηγική**

**Ιδιότητα:** μια βέλτιστη στρατηγική είναι πάντα κάποιο ακραίο/γωνιακό σημείο της εφικτής περιοχής

# Βέλτιστη στρατηγική vs αντικειμενική συνάρτηση

$$f(x_1, x_2) = 40x_1 + 100x_2$$



$$40x_1 + 100x_2 = ?$$

$$40x_1 + 100x_2 = \mathbf{200}$$

$$40x_1 + 100x_2 = \mathbf{300}$$

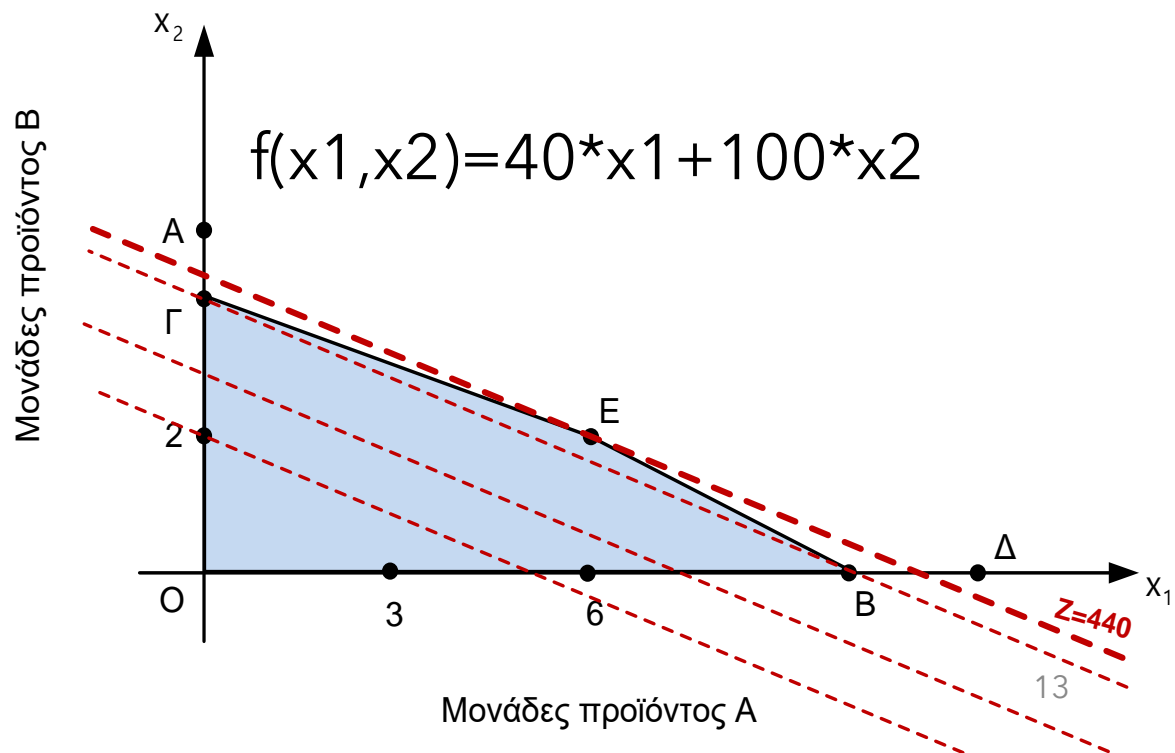
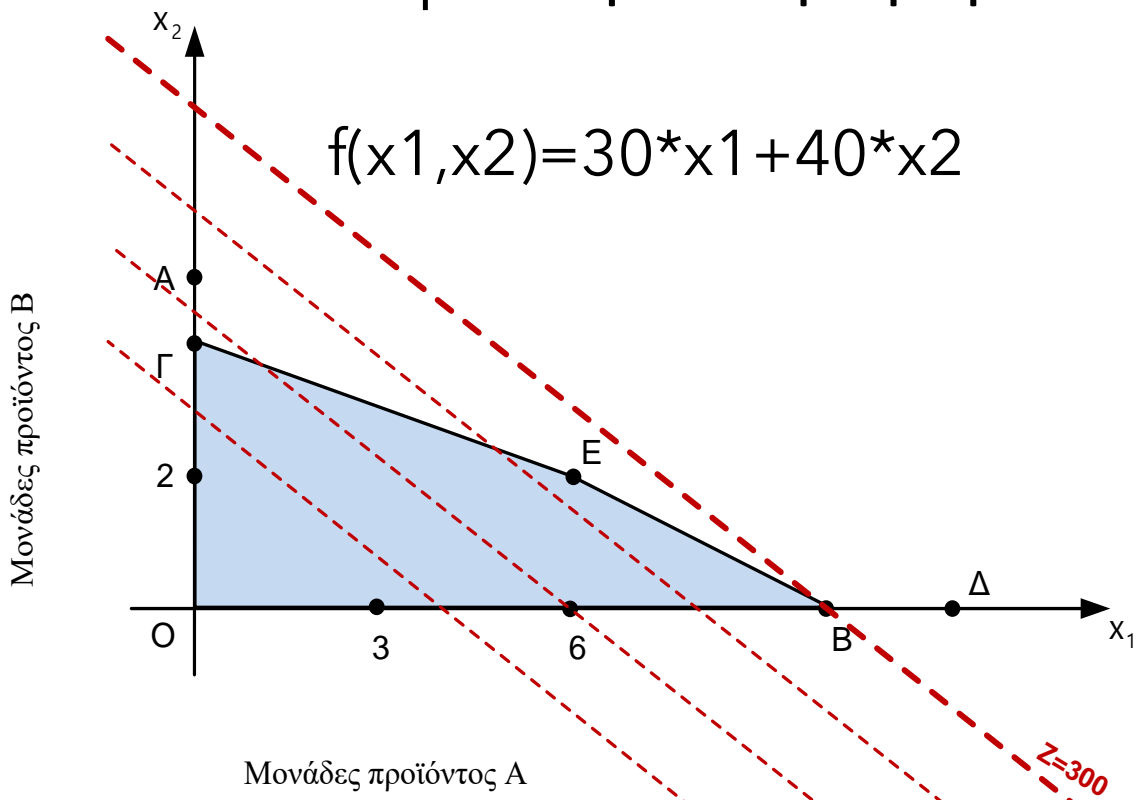
$$40x_1 + 100x_2 = \mathbf{400}$$

$$40x_1 + 100x_2 = \mathbf{440}$$

**Ιδιότητα:** όλες οι ευθείες, ανεξαρτήτως κέρδους, είναι παράλληλες.

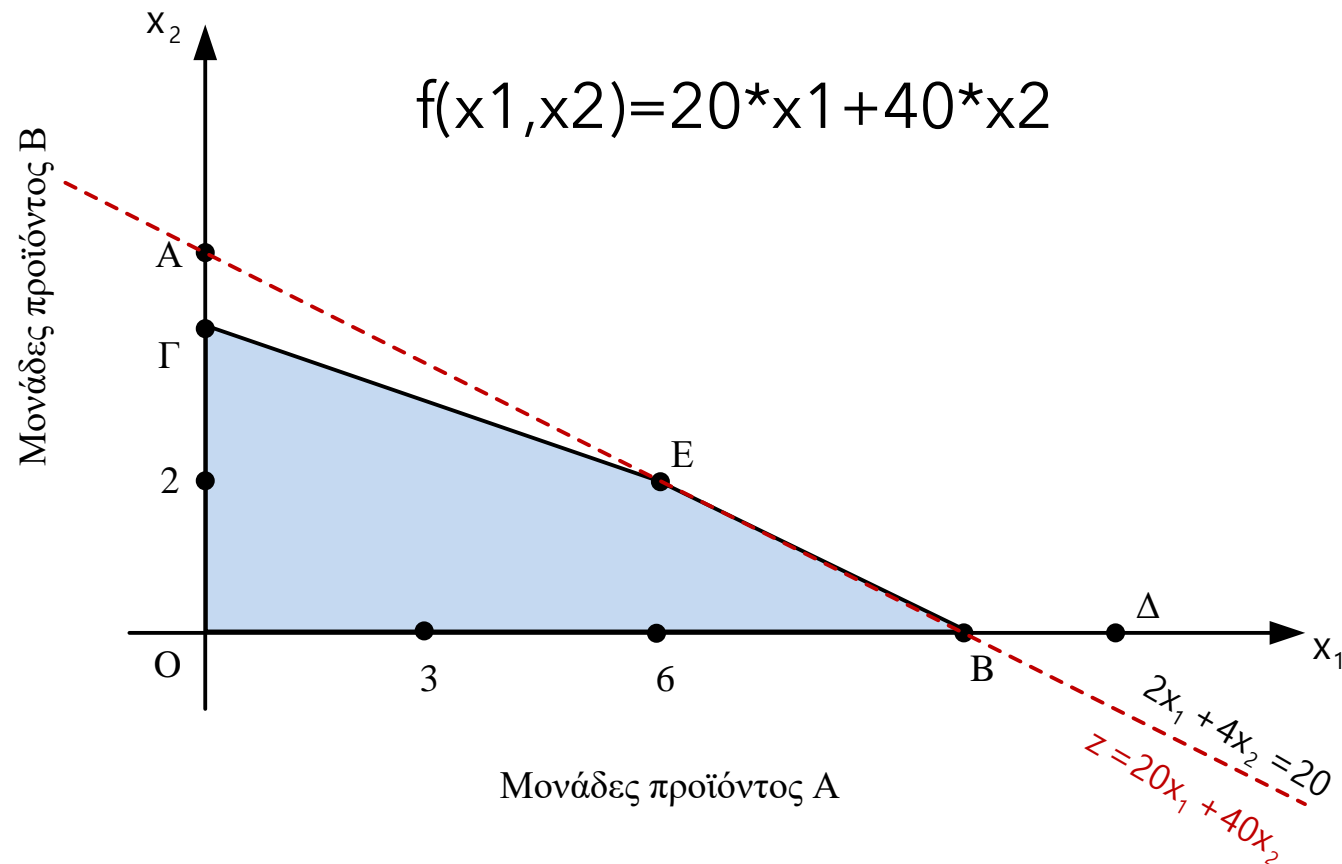
# Από τί εξαρτάται η βέλτιστη στρατηγική;

- Εφικτή περιοχή
- Αντικειμενική συνάρτηση



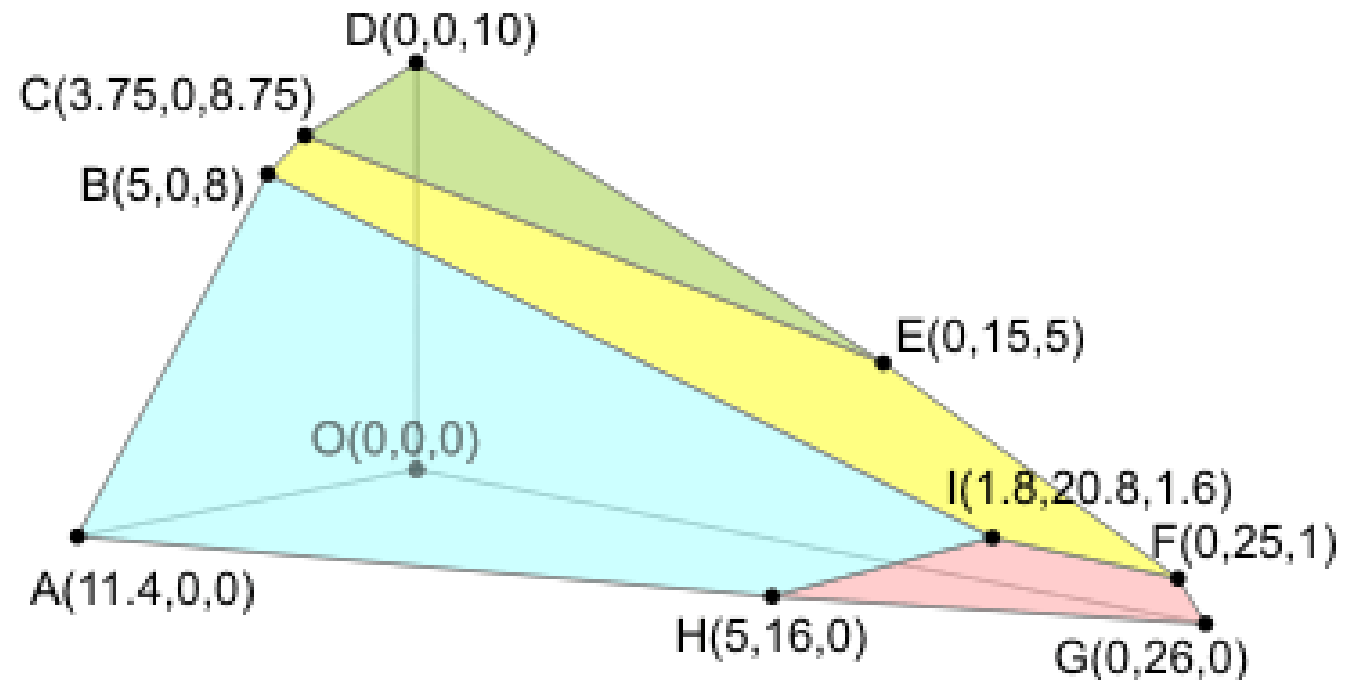
# Εναλλακτικά βέλτιστα σημεία

- Όταν η αντικειμενική συνάρτηση έχει την ίδια κλίση με κάποιον περιορισμό



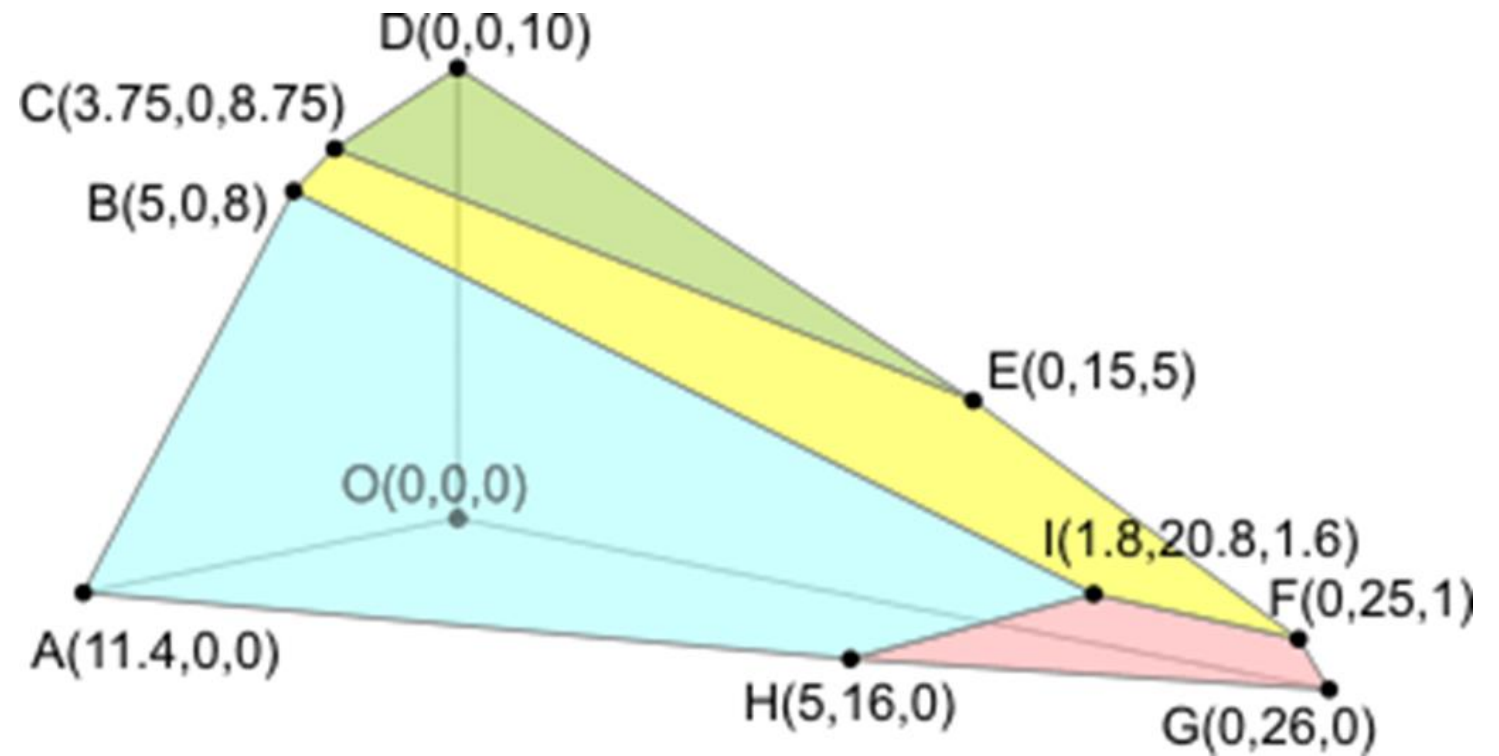
# 3d παράδειγμα γραφικής επίλυσης LP

$$\begin{aligned} 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 & \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 & \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq 26 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq 30 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq 57 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{aligned}$$



## 3d παράδειγμα γραφικής επίλυσης LP

- Οι περιορισμοί αποτελούν επίπεδα
- Εφικτή περιοχή είναι 3διάστατη
- Τα «γωνιακά σημεία» αποτελούν τομές επιπέδων
- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι κάποιο επίπεδο
- Η βέλτιστη λύση: σημείο, ακμή ή πλευρά του πολυέδρου





# Ανάλυση ευαισθησίας περιορισμών



# Μη δεσμευτικός περιορισμός (non binding)

Μεγιστοποίησε την:

$$z = 40x_1 + 100x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

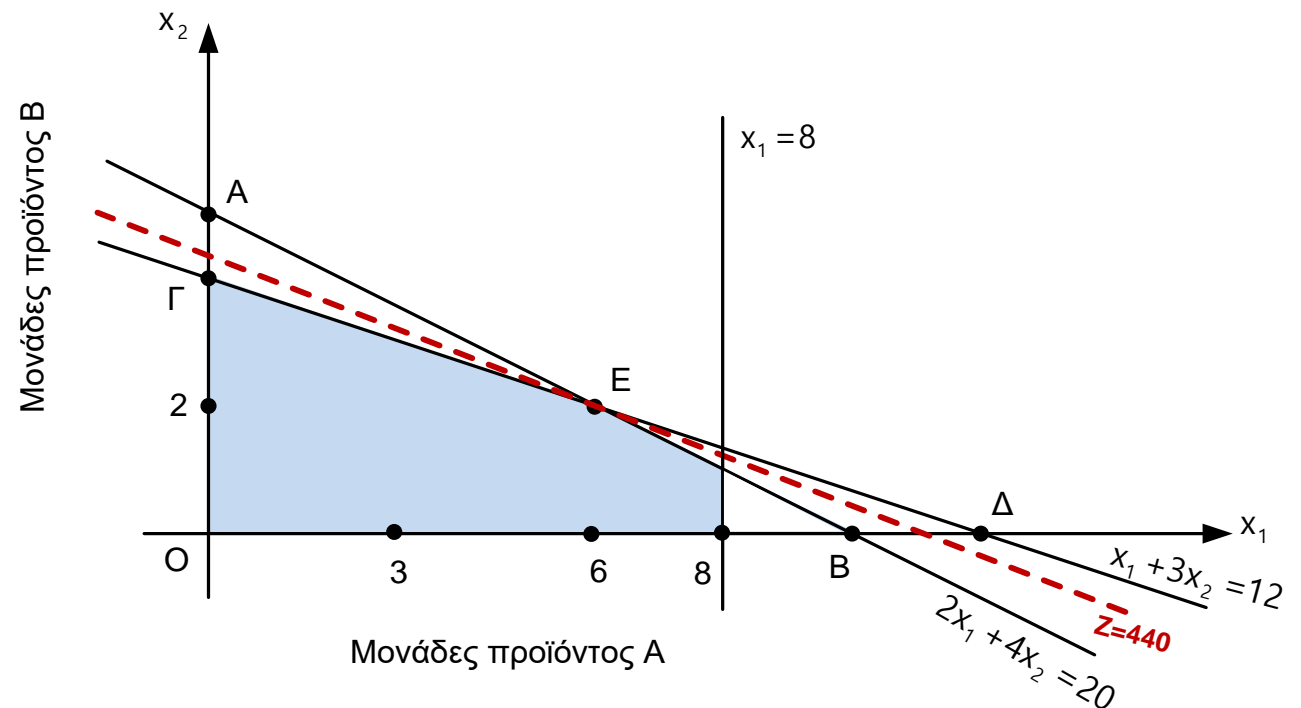
$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1 \leq 8$$

# Μη δεσμευτικός περιορισμός (non binding)

- Η λύση του προβλήματος παραμένει η ίδια, καθώς ο νέος περιορισμός περιόρισε την εφικτή περιοχή αλλά δεν άλλαξε την βέλτιστη στρατηγική. Ένας τέτοιος ονομάζεται μη δεσμευτικός περιορισμός (non binding)



# Σκιώδεις τιμές για τους περιορισμούς

- Σκοπός: να διαπιστώσουμε αν μικρές αλλαγές των δεξιών μερών επιφέρουν αλλαγές και τι μεγέθους.
- Το ποσό μεταβολής του κέρδους (αύξηση ή μείωση) που επιφέρει η μεταβολή της τιμής του δεξιού σκέλους ενός περιορισμού ενός LP προβλήματος, ονομάζεται **σκιώδης τιμή** (shadow price, marginal value)

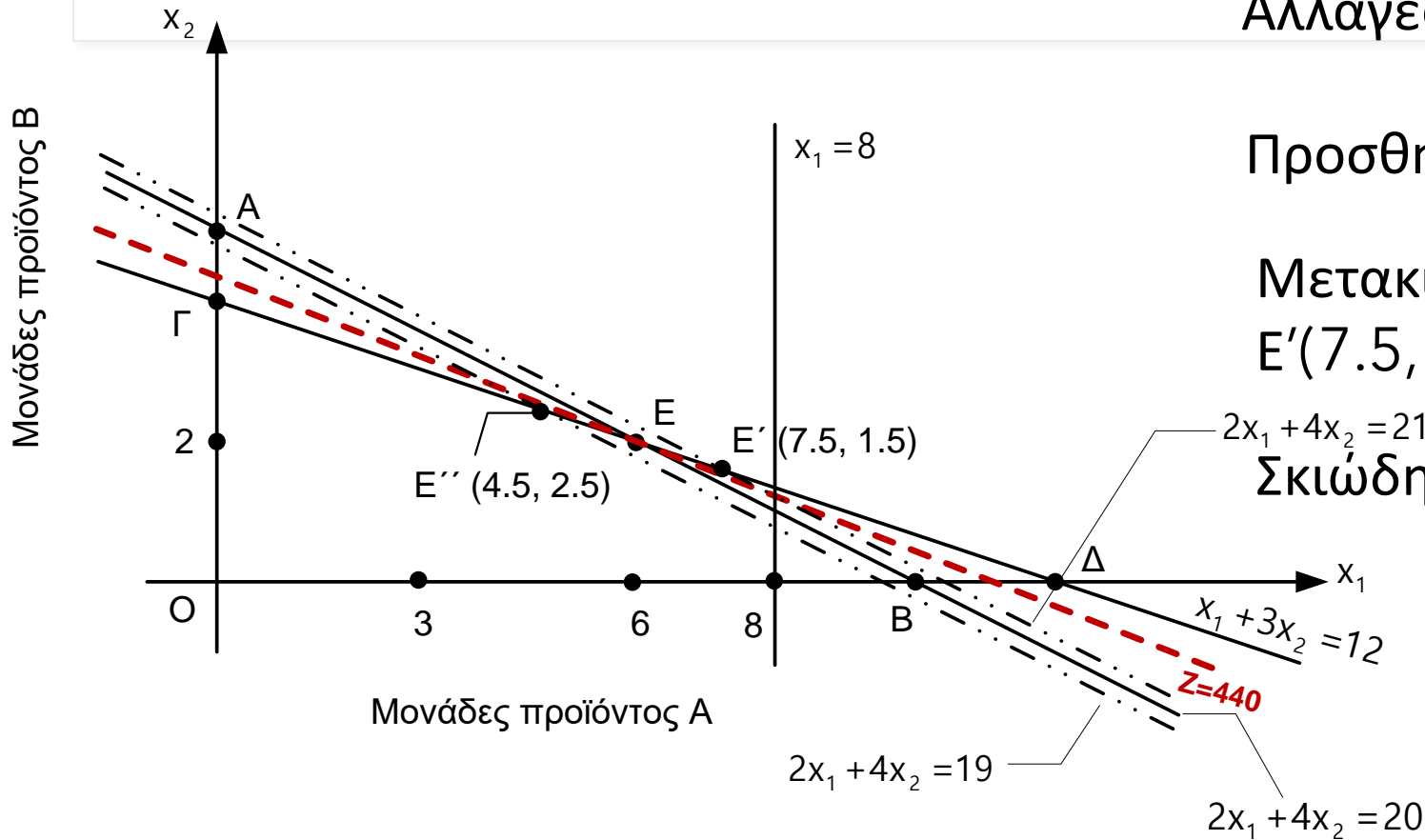
# Σκιώδεις τιμές για τους περιορισμούς (αύξηση)

Αλλαγές στον περιορισμό:  $2x_1 + 4x_2 \leq 20$

Προσθήκη μιας ώρας:  $2x_1 + 4x_2 \leq 21$

Μετακίνηση της λύσης από το  $E(6,2)$  στο  $E'(7.5,1.5)$

Σκιώδης τιμή: 10



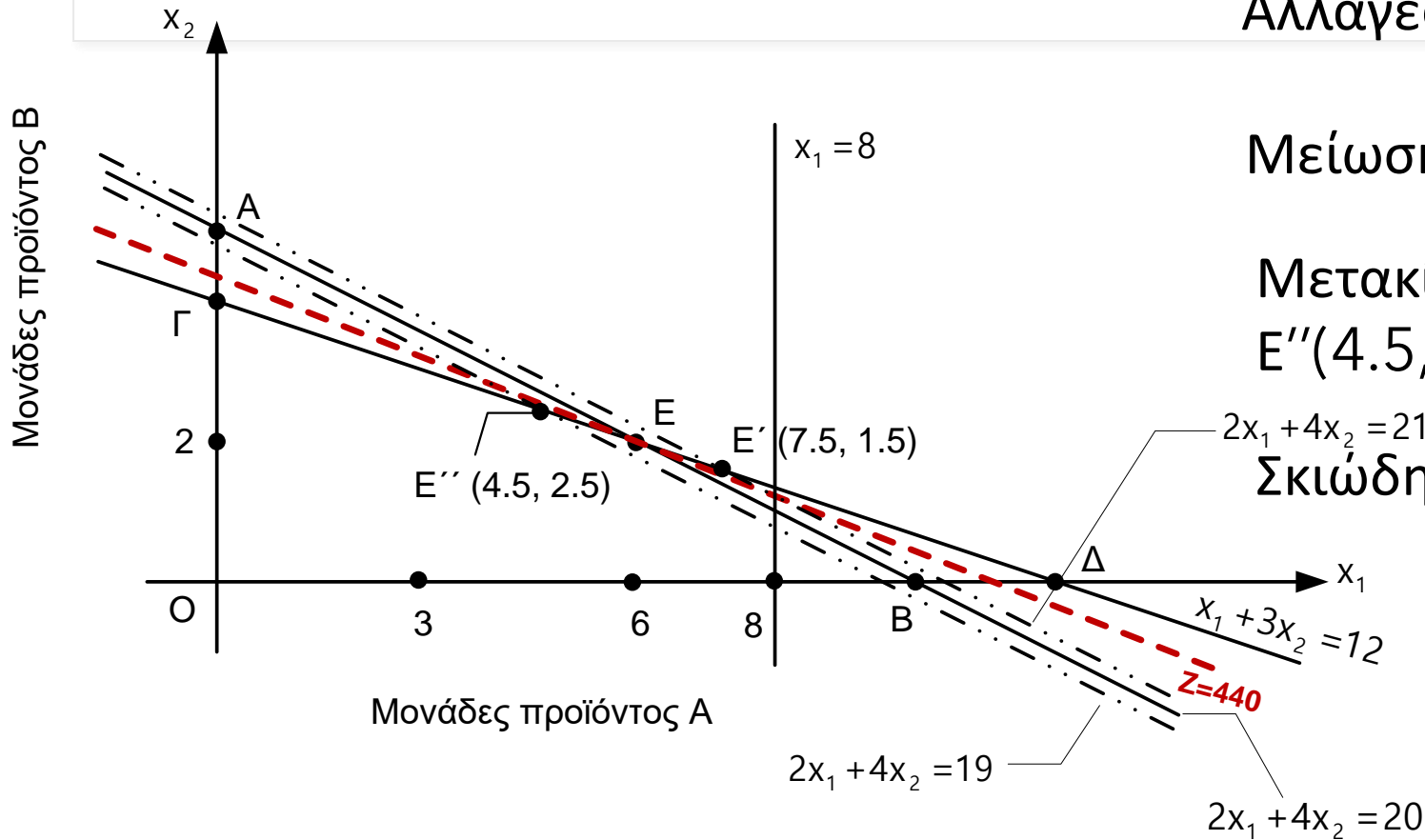
# Σκιώδεις τιμές για τους περιορισμούς (μείωση)

Αλλαγές στον περιορισμό:  $2x_1 + 4x_2 \leq 20$

Μείωση μιας ώρας:  $2x_1 + 4x_2 \leq 19$

Μετακίνηση της λύσης από το  $E(6,2)$  στο  $E''(4.5,2.5)$

Σκιώδης τιμή: -10



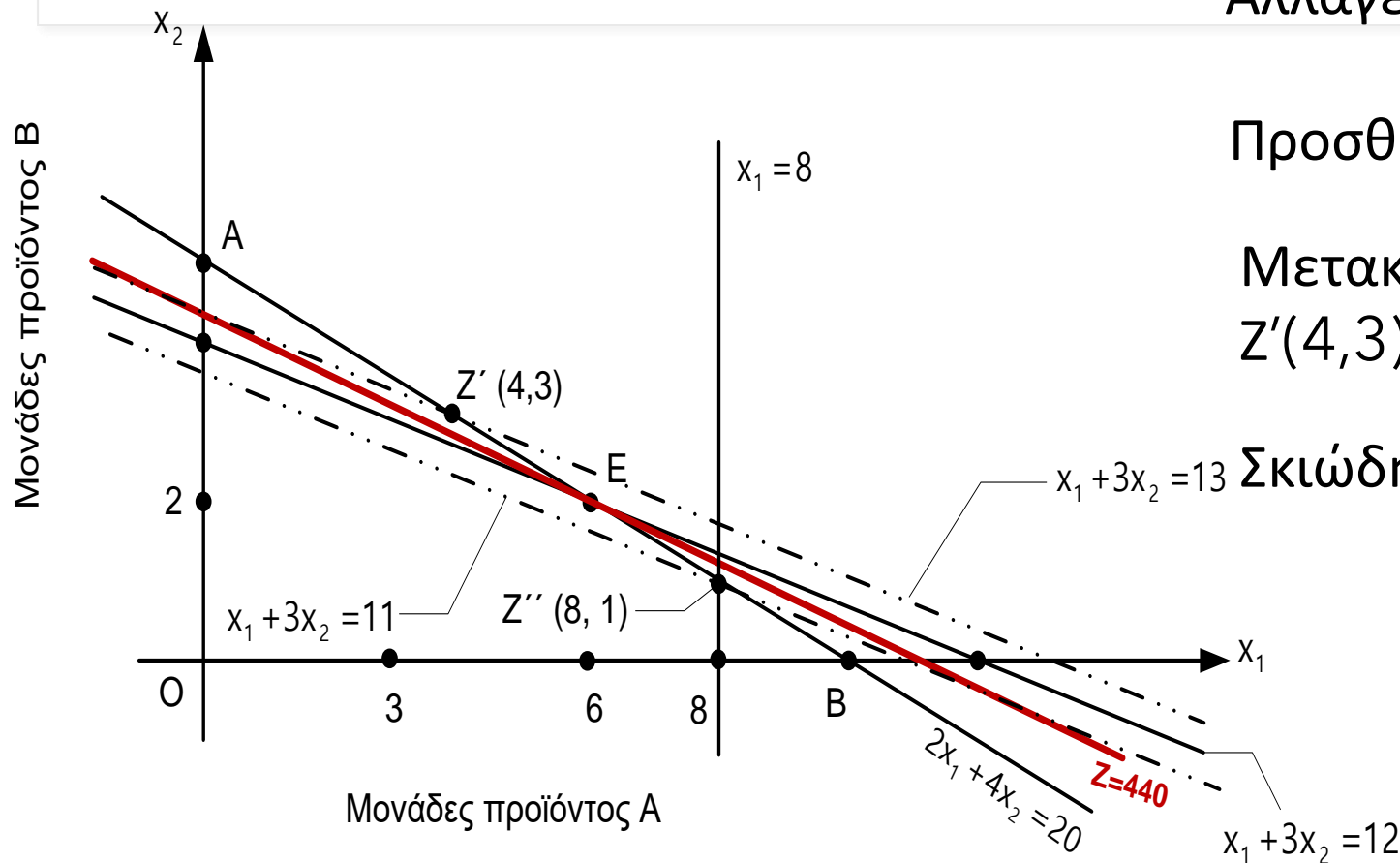
# Σκιώδεις τιμές για τους περιορισμούς (αύξηση)

Αλλαγές στον περιορισμό:  $x_1 + 3x_2 \leq 12$

Προσθήκη μιας ώρας:  $x_1 + 3x_2 \leq 13$

Μετακίνηση της λύσης από το  $E(6,2)$  στο  $Z'(4,3)$

Σκιώδης τιμή: 20



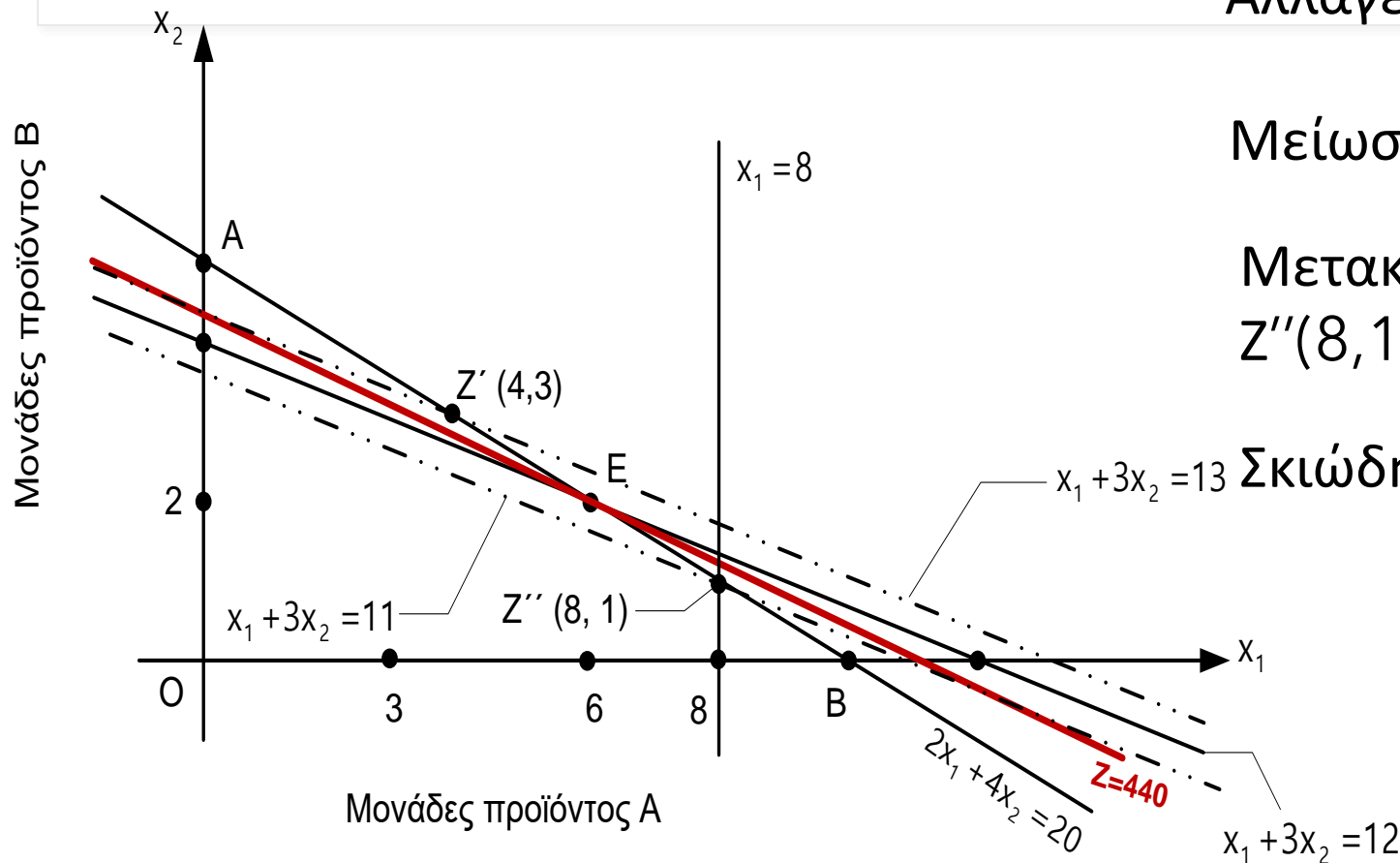
# Σκιώδεις τιμές για τους περιορισμούς (μείωση)

Αλλαγές στον περιορισμό:  $x_1 + 3x_2 \leq 12$

Μείωση μιας ώρας:  $x_1 + 3x_2 \leq 11$

Μετακίνηση της λύσης από το  $E(6,2)$  στο  $Z''(8,1)$

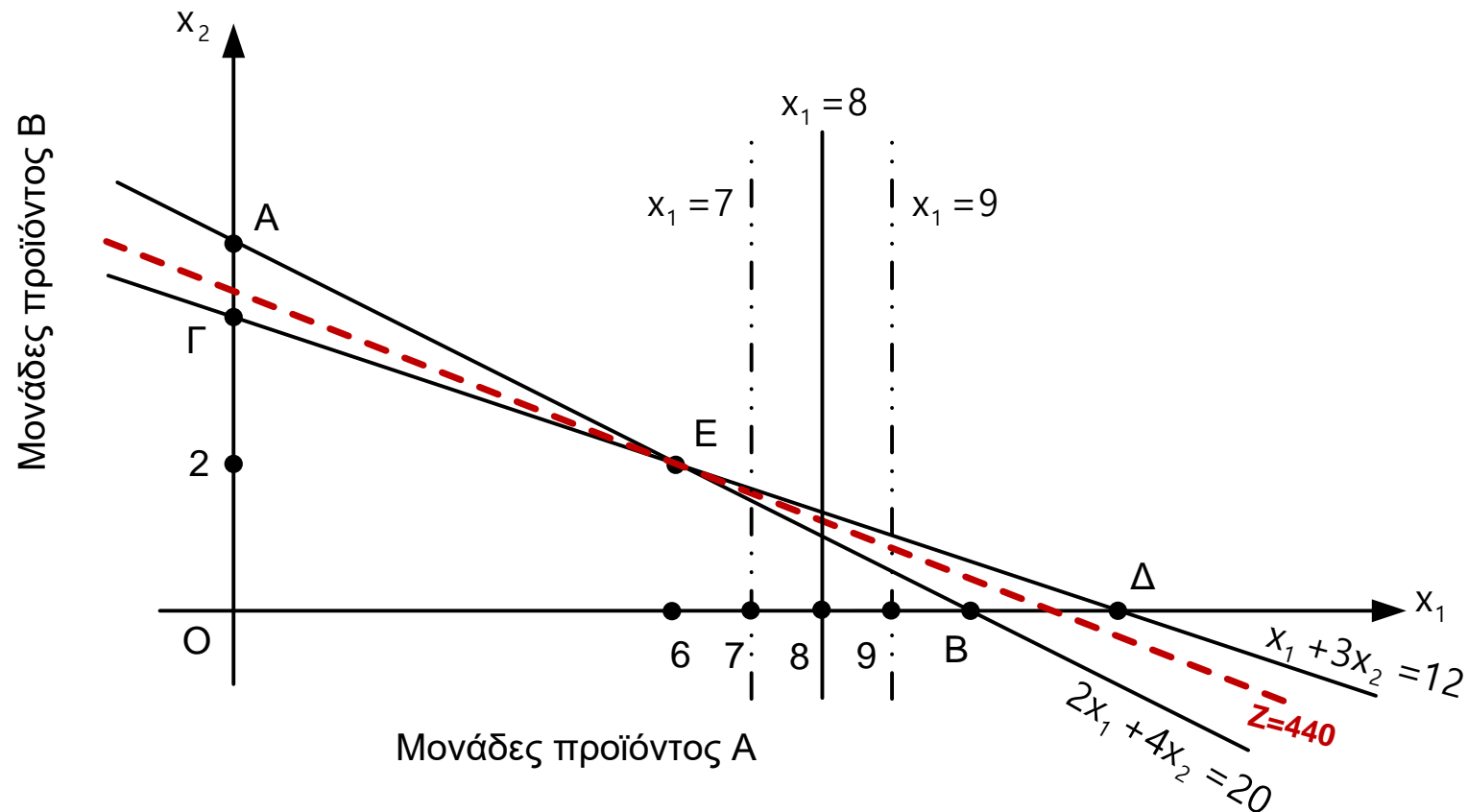
Σκιώδης τιμή: -20





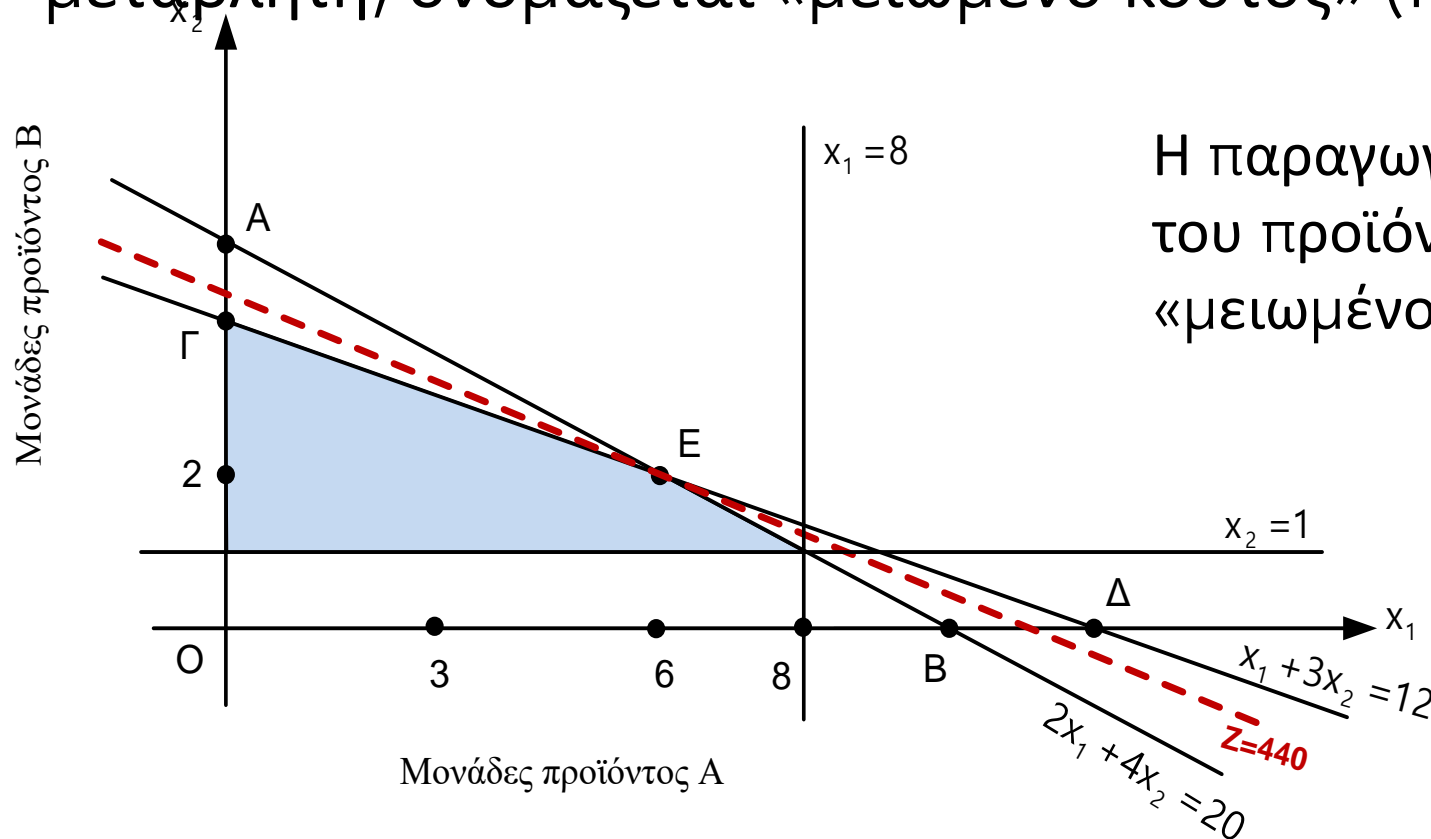
# Σκιώδεις τιμές για μη δεσμευτικούς περιορισμούς

- Για «μικρές» διακυμάνσεις η σκιώδης τιμή των μη δεσμευτικών περιορισμών, είναι μηδενική.



# Μειωμένο κόστος

- Η οριακή τιμή της αύξησης του κόστους που συνδέεται με τον εξαναγκασμό τουλάχιστον μιας μονάδας παραγωγής από κάποια μεταβλητή, ονομάζεται «μειωμένο κόστος» (reduced cost).

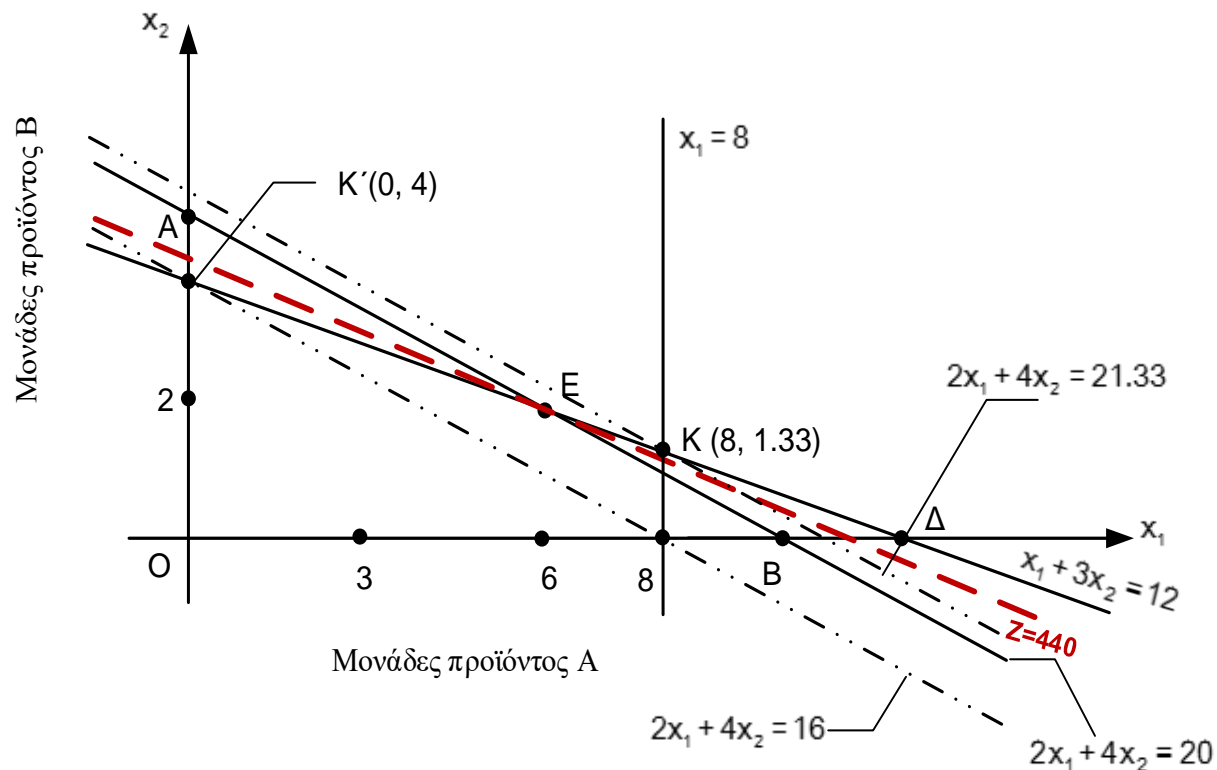


Η παραγωγής μιας τουλάχιστον μονάδας του προϊόντος B, έχει μηδενικό «μειωμένο κόστος»

# Εύρος διακύμανσης

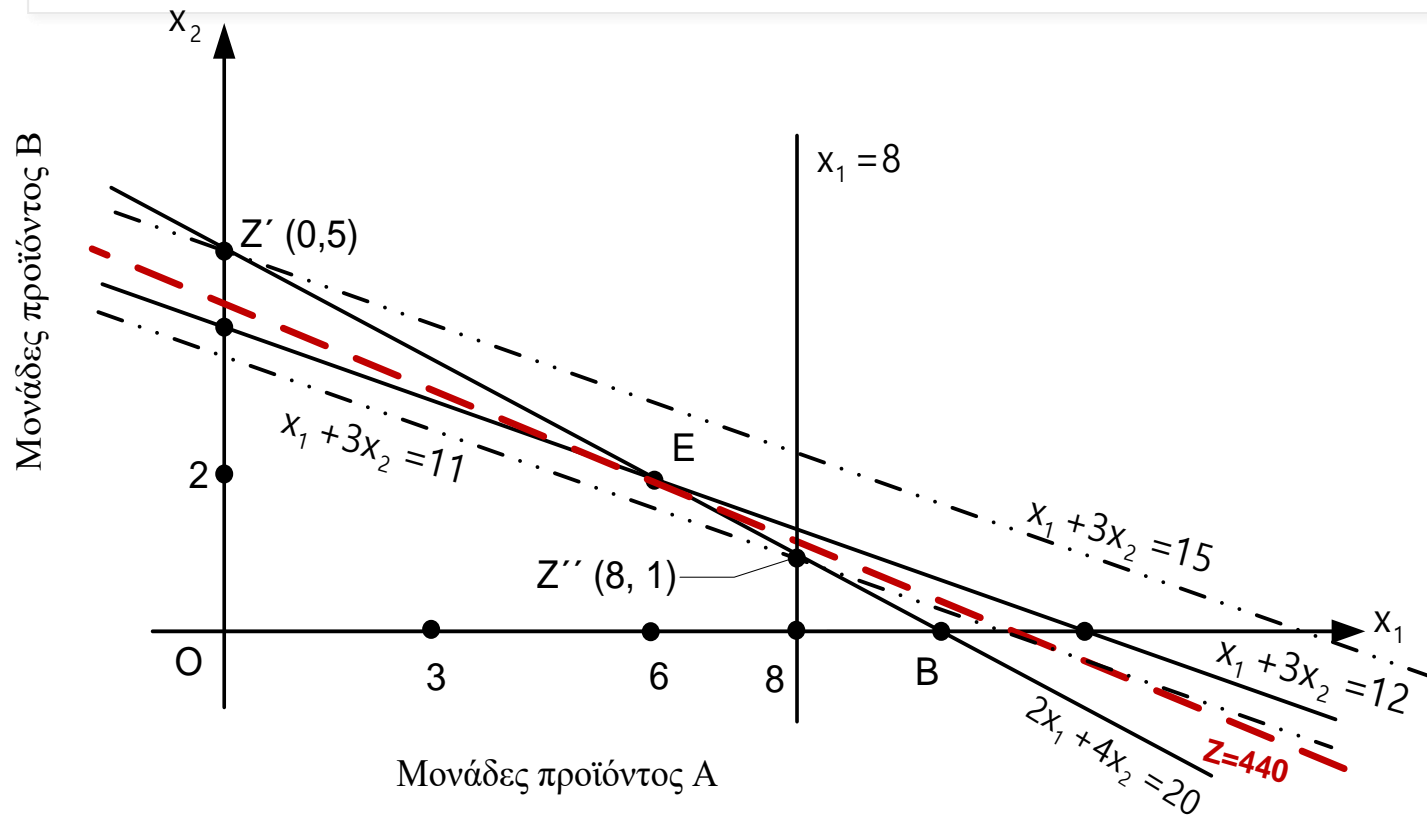
- Οι σκιάδεις τιμές είναι χρήσιμες για περιορισμένου εύρους αυξομειώσεις.
- Συχνά υπάρχει όριο πέρα του οποίου η «μικρή» μεταβολή είτε δεν υπακούει καθόλου στις οριακές τιμές του προβλήματος ή δεν μεταβάλλει το κόστος.

# Εύρος διακύμανσης



- Μεταβολή πέρα των 21.33 ωρών στην **M1**, δεν επιφέρει καμία μεταβολή γιατί το κέρδος περιορίζεται από τον περιορισμό των 8 μονάδων

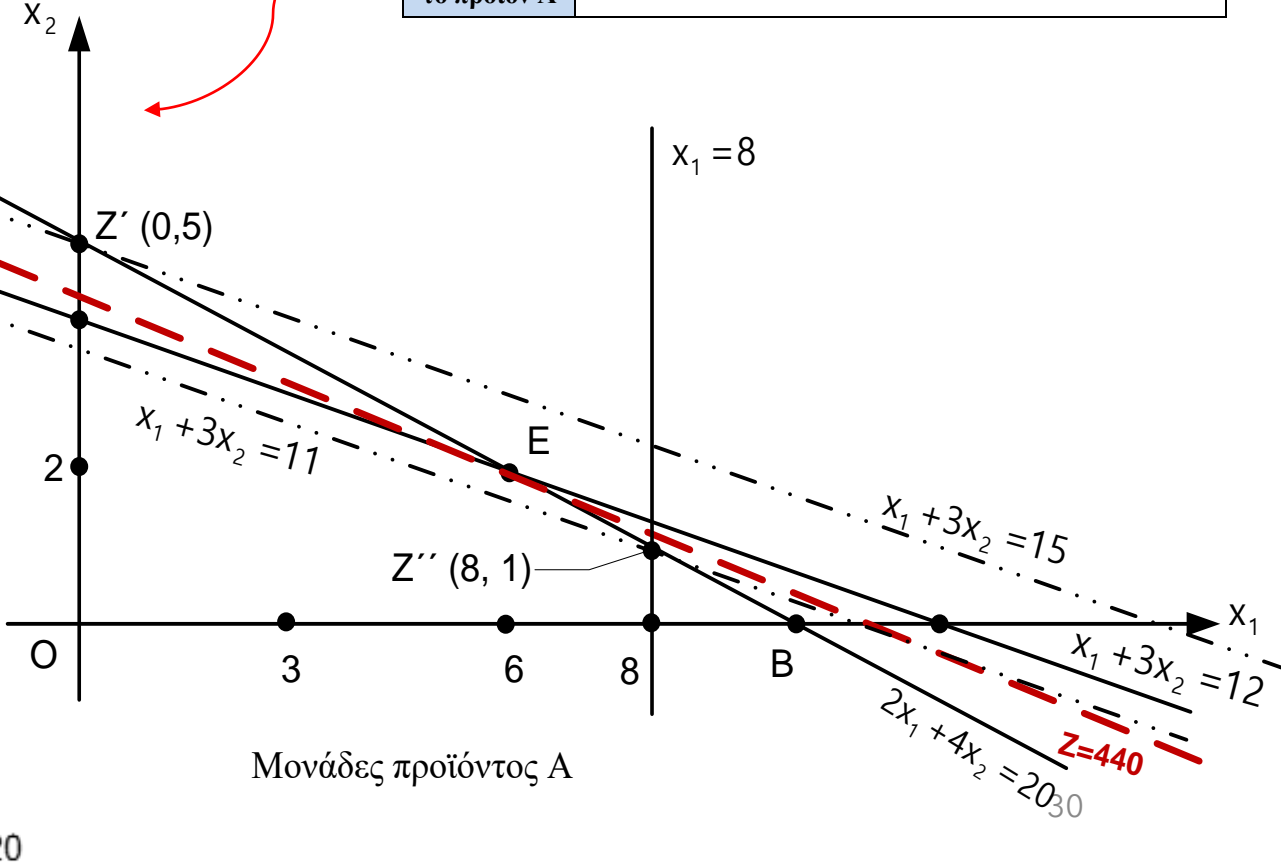
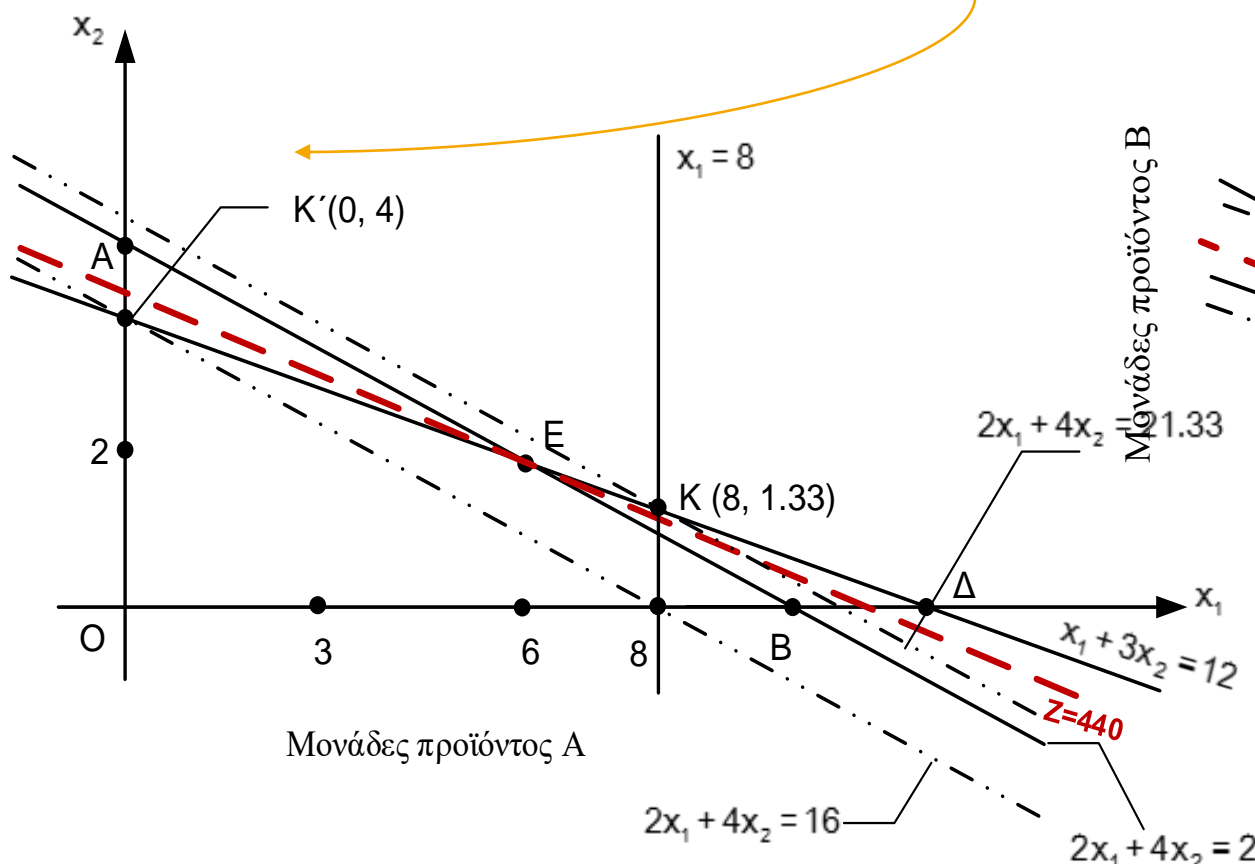
# Εύρος διακύμανσης



- Μεταβολή πέρα των 15 ωρών στην **M2**, δεν επιφέρει καμία μεταβολή γιατί το κέρδος περιορίζεται πέραν του σημείου από το **M1** (δηλαδή το M2 γίνεται μη δεσμευτικό)
- Το βέλτιστο σημείο μεταφέρεται στο  $Z'(0,5)$

# Εύρος διακύμανσης των δευτέρων μελών των περιορισμών/ Ανάλυση ευαισθησίας (Sensitivity Report)

Περιορισμός	Ισχύον όριο	Σκιώδης τιμή	Επιτρεπόμενη αύξηση (ώρες)	Επιτρεπόμενη μείωση (ώρες)
Μηχάνημα 1	20	10€	1.33	4
Μηχάνημα 2	12	20€	3	1
Ζήτηση για το προϊόν A	8	0	άπειρη	2



# Συντελεστές των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση

- Χρήσιμη όταν:
  - το κόστος πρώτων υλών αλλάζει
  - ο χρόνος επεξεργασίας μεταβάλλεται
  - αντικατάσταση υλικών
  - περιθώριο κέρδους μεταβάλλεται βασιζόμενο στην ζήτηση

# Συντελεστές των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση

**Μεγιστοποίησε την:**

$$z = 40x_1 + 100x_2$$

**Υπό τους περιορισμούς:**

$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

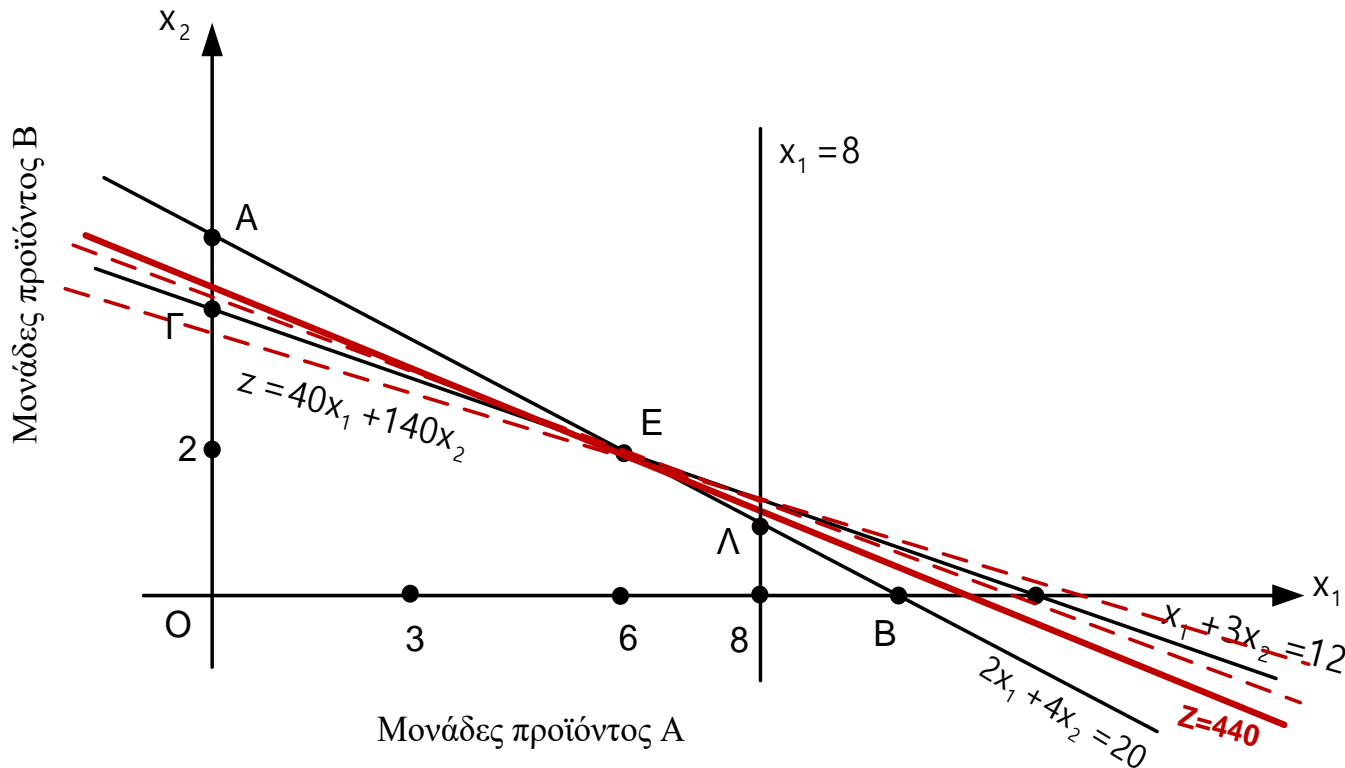
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1 \leq 8$$



# Συντελεστές των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση

«Δοκιμές» με τις τιμές 110, 120, 130, 140

$$z = 40x_1 + 100x_2$$



Παρατηρήσεις:

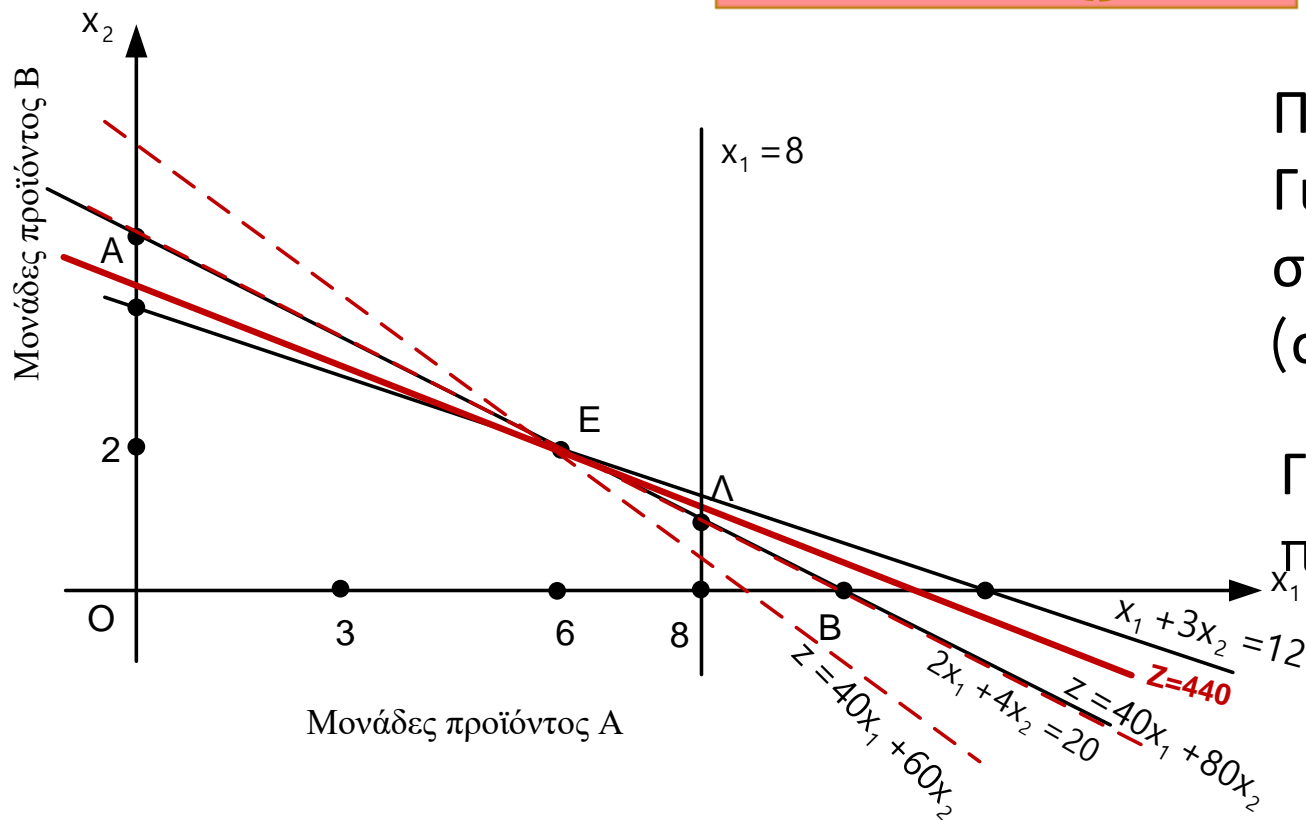
Για την ακραία τιμή 140 το E παύει να είναι η βέλτιστη στρατηγική

Μετά την τιμή 120, η βέλτιστη στρατηγική μεταφέρεται στο Γ

# Συντελεστές των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση

«Δοκιμές» με τις τιμές 90,80,70,60

$$z = 40x_1 + 100x_2$$



Παρατηρήσεις:

Για την 80 ο πρώτος περιορισμός συμπίπτει με την αντικειμενική συνάρτηση (συνεπώς πολλά εναλλακτικά βέλτιστα)

Για τιμές μικρότερες του 80, ο τρίτος περιορισμός καθορίζει το βέλτιστο

# Παράδειγμα

- Ζητούμενο: βέλτιστο μενού
- Προδιαγραφές: τουλάχιστον 30 gr πρωτεΐνη, 5 mg σίδηρο και 40 gr άμυλο
- Χαρακτηριστικά πρώτης ύλης (ανά μερίδα): ρύζι =[2 gr πρωτεΐνη, 10 gr άμυλο, 15 gr λίπος] και κοτόπουλο =[10 gr πρωτεΐνη, 5 mg σίδηρος, 20 gr λίπος]
- Βέλτιστη στρατηγική: πόσες μερίδες από ρύζι και κοτόπουλο για ελάχιστο λίπος και εντός των προδιαγραφών

# Παράδειγμα (συν)

**Αντικειμενική συνάρτηση:**

$$\min z = 20 * x_1 + 15 * x_2$$

**Υπό των περιορισμών:**

$$10 * x_1 + 2 * x_2 \geq 30$$

$$5 * x_1 \geq 5$$

$$10 * x_2 \geq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

	Κοτόπουλο	Ρύζι	
Πρωτεΐνη (gr/δόση)	10	2	$\geq 30$
Σίδηρο (mg/δόση)	5	0	$\geq 5$
Άμυλο (gr/δόση)	0	10	$\geq 40$
Λίπος (gr/δόση)	20	15	

# Παράδειγμα (συν)

