Επιχειρησιακή Έρευνα

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων,

Πανεπιστήμιο Πατρών

Υλικό ορισμένων ασκήσεων βασισμένο στις διαφάνειες του καθ. Γ. Μπεληγιάννη

Ακαδημαϊκό έτος: 2020-2021

Προβλήματα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

Γενικά: Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού στα οποία υπάρχει η προϋπόθεση μία ή περισσότερες μεταβλητές να λαμβάνουν ακέραιες τιμές

- Πρόβλημα καθαρού ακέραιου προγραμματισμού
  - Όλες οι μεταβλητές λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές
- Πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού
  - Ορισμένες, αλλά όχι όλες οι μεταβλητές, λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές
- Πρόβλημα «0-1» ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού
  - Όλες οι μεταβλητές του προβλήματος είναι μεταβλητές «0-1»

Πακέτα λογισμικού

Γενικά: Παρά το γεγονός ότι ο ακέραιος προγραμματισμός παρέχει σημαντική ευελιξία στη διατύπωση μοντέλων, παρουσιάζει συχνά δυσκολίες ως προς την επίλυσή του

- Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο περιλαμβάνει χιλιάδες συνεχείς μεταβλητές μπορεί εύκολα να επιλυθεί με χρήση του κατάλληλου πακέτου λογισμικού
- Αντιθέτως, ένα πρόβλημα καθαρού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού με λιγότερες από 100 μεταβλητές ενδέχεται να παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες κατά την επίλυσή του
- Στην ηλεκτρονική διεύθυνση www.coin-or.org, https://jump.dev/JuMP.jl/stable/ μπορείτε να αναζητήσετε πληροφορίες αναφορικά με κάποια πακέτα λογισμικού που διατίθενται δωρεάν

Παραδείγματα εφαρμογών

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

- Ένα εστιατόριο για να εξυπηρετήσει την πελατεία του χρειάζεται τον ακόλουθο αριθμό σερβιτόρων ανά ημέρα, βάσει προηγούμενης εμπειρίας.

Ημέρα	ΔΕ	ΤΡ	ΤΕ	ΠΕ	ΠΑ	ΣΑ	ΚΥ
Αριθμός σερβιτόρων	11	13	15	14	19	22	11

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

- Όλοι οι σερβιτόροι αμείβονται το ίδιο.
- Κάθε ένας πρέπει να εργάζεται 5 συνεχόμενες ημέρες και στην συνέχεια να παίρνει ρεπό τις 2 επόμενες ημέρες.
- Επιθυμούμε να βρούμε πρόγραμμα που απασχολεί τον ελάχιστο αριθμό σερβιτόρων.

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

- **Ορισμός των μεταβλητών:** Μας ενδιαφέρει αριθμός των σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την κάθε ημέρα της εβδομάδας.
  - x_1: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Δευτέρα
  - x_2: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Τρίτη
  - x_3: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Τετάρτη
  - x_4: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Πέμπτη
  - x_5: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Παρασκευή
  - x_6: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους το Σάββατο
  - x_7: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Κυριακή

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

- Ορισμός της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

- Σύμφωνα με την παρούσα κωδικοποίηση (δηλ. αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν μια συγκεκριμένη ημέρα), όταν πχ κάποιος ξεκινάει Δευτέρα δουλεύει έως και την Παρασκευή και κατόπιν παίρνει ρεπό Σάββατο και Κυριακή. Συνεπώς μπορούμε να πούμε πως μπορεί να καλύψει μια θέση από τις ακόλουθες ημέρες

Ημέρα	ΔΕ	ΤΡ	ΤΕ	ΠΕ	ΠΑ	ΣΑ	ΚΥ
Αριθμός σερβιτόρων	11	13	15	14	19	22	11

- Ενώ εκείνος της Τρίτης

Ημέρα	ΔΕ	ΤΡ	ΤΕ	ΠΕ	ΠΑ	ΣΑ	ΚΥ
Αριθμός σερβιτόρων	11	13	15	14	19	22	11

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

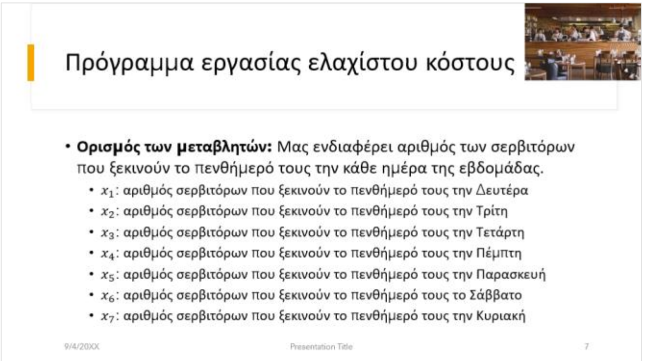
- Ορισμός των περιορισμών:
- Πχ Παρασκευή 19 τουλάχιστον σερβιτόροι:
  - Δηλαδή είναι διαθέσιμοι εκείνοι που ξεκινούν Δευτέρα ή Τρίτη ή Τετάρτη ή Πέμπτη ή Παρασκευή
  - Συνεπώς: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19$

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

- Ένα εστιατόριο για να εξυπηρετήσει την πελατεία του χρειάζεται τον ακόλουθο αριθμό σερβιτόρων ανά ημέρα, βάσει προηγούμενης εμπειρίας.

Ημέρα	ΔΕ	ΤΡ	ΤΕ	ΠΕ	ΠΑ	ΣΑ	ΚΥ
Αριθμός σερβιτόρων	11	13	15	14	19	22	11

9/4/20XX Presentation Title 5



Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

- **Ορισμός των μεταβλητών:** Μας ενδιαφέρει αριθμός των σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την κάθε ημέρα της εβδομάδας.
  - x_1: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Δευτέρα
  - x_2: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Τρίτη
  - x_3: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Τετάρτη
  - x_4: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Πέμπτη
  - x_5: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Παρασκευή
  - x_6: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους το Σάββατο
  - x_7: αριθμός σερβιτόρων που ξεκινούν το πενθήμερό τους την Κυριακή

9/4/20XX Presentation Title 7

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

- Ορισμός των περιορισμών:
- Σάββατο: $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 22$
- Κυριακή: $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$
- Δευτέρα: $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$
- Τρίτη: $x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13$
- Τετάρτη: $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15$
- Πέμπτη: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 14$

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

- Πως θα λύσω το πρόβλημα δεδομένου ότι οι μεταβλητές αντιστοιχούν σε θετικούς ακεραίους;

Να λύσουμε το πρόβλημα χωρίς τους περιορισμούς των ακεραίων μεταβλητών και μετά να στρογγυλοποιήσουμε στον κοντινότερο ακέραιο

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

Να λύσουμε το πρόβλημα χωρίς τους περιορισμούς των ακεραίων μεταβλητών και μετά να στρογγυλοποιήσουμε στον κοντινότερο ακέραιο

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. x_7)$ = (0.33, 11, 0.33, 2.33, 5, 3.33, 0)

Στρογγυλοποιούμε στον κοντινότερο ακέραιο

(0, 11, 0, 2, 5, 3, 0)

Παραβιάζει όλους τους περιορισμούς πλην της Τρίτης!

Πρόγραμμα εργασίας ελαχίστου κόστους

- Αν λύσουμε το πρόβλημα με αριθμητικό πακέτο πχ JuMP ή Lindo παίρνουμε την λύση:

(1, 11, 0, 2, 5, 4, 0) → 23 σερβιτόρους

Να λύσουμε το πρόβλημα χωρίς τους περιορισμούς των ακεραίων μεταβλητών και μετά να στρογγυλοποιήσουμε στον **αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο**

(0.33, 11, 0.33, 2.33, 5, 3.33, 0) → (1, 11, 1, 3, 5, 4, 0) → 24 σερβιτόρους

Υποβέλτιστη λύση

Σημειώσεις και σχόλια (1)

- Επειδή τα προβλήματα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες ως προς την επίλυσή τους σε σχέση με τα αντίστοιχα του γραμμικού προγραμματισμού, δε θα πρέπει να επιχειρείται η χρησιμοποίηση προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού εάν είναι αποδεκτή ως λύση η στρογγυλοποίηση της λύσης του αντίστοιχου προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Σημειώσεις και σχόλια (2)

- Ορισμένα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού είναι δομημένα με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται ότι οι μεταβλητές θα λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές
- Τέτοια προβλήματα είναι τα
  - προβλήματα εκχώρησης
  - προβλήματα μεταφόρτωσης
  - προβλήματα μεταφοράς

Χαλάρωση γραμμικού προγράμματος

- Μοντέλο **καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος** δύο μεταβλητών
  - **Max $2x_1 + 3x_2$**
  - **subject to**
  - **$3x_1 + 3x_2 \leq 12$**
  - **$0{,}75x_1 + x_2 \leq 4$**
  - **$x_1 + 2x_2 \leq 6$**
  - **$x_1, x_2 \geq 0$ και ακέραιες**
- Αν αφαιρέσουμε τον περιορισμό «και ακέραιες» λαμβάνουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δύο μεταβλητών
- Αυτό ονομάζεται **χαλάρωση γραμμικού προγράμματος**

Χαλάρωση γραμμικού προγράμματος

- Μοντέλο **μεικτού ακέραιου γραμμικού προγράμματος** δύο μεταβλητών
  - **Max $3x_1 + 4x_2$**
  - **subject to**
  - **$-x_1 + 2x_2 \leq 8$**
  - **$x_1 + 2x_2 \leq 12$**
  - **$2x_1 + x_2 \leq 16$**
  - **$x_1, x_2 \geq 0$ και η x_2 ακέραια**
- Αν αφαιρέσουμε τον περιορισμό ακεραιότητας ως προς την μεταβλητή x_2 λαμβάνουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δύο μεταβλητών
- Αυτό ονομάζεται **χαλάρωση γραμμικού προγράμματος**

Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος

Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (1)

- Η Eastbone Realty διαθέτει **δύο εκατομμύρια δολάρια** για την αγορά ακινήτων προς ενοικίαση
- Ύστερα από μια αρχική διαλογή, η εταιρία καλείται να κατανείμει το διαθέσιμο προϋπολογισμό μεταξύ πολυτελών μονοκατοικιών και πολυκατοικιών
- Υπάρχουν **πέντε** διαθέσιμες μονοκατοικίες, οι οποίες μπορούν να αγοραστούν έναντι **$282.000** έκαστη
- Κάθε πολυκατοικία κοστίζει **$400.000**, χωρίς να υπάρχει περιορισμένη διαθεσιμότητα
- Ο διαχειριστής ακινήτων της Eastborne έχει τη δυνατότητα να διαθέσει **140** ώρες εργασίας για τη διαχείριση των νέων πάγιων στοιχείων

Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (2)

- Εκτιμάται ότι για κάθε μονοκατοικία θα απαιτηθούν **4** ώρες εργασίας ανά μήνα και για κάθε πολυκατοικία θα απαιτηθούν **40** ώρες ανά μήνα
- Οι ετήσιες ταμειακές ροές που προκύπτουν ύστερα από αφαίρεση των λειτουργικών εξόδων και των καταβολών για αποπληρωμή ενυπόθηκων δανείων ανέρχονται στα **$10.000** ανά μονοκατοικία και **$15.000** ανά πολυκατοικία
- Η διεύθυνση της Eastborne επιθυμεί τον προσδιορισμό του αριθμού των μονοκατοικιών και πολυκατοικιών που θα πρέπει να αγοραστούν, προκειμένου να μεγιστοποιηθούν οι ετήσιες ταμειακές ροές

Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (3)

- Αρχικά ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης:
  - **T**: αριθμός μονοκατοικιών
  - **A**: αριθμός πολυκατοικιών

- Η αντικειμενική συνάρτηση για τις ταμειακές ροές εκφρασμένη σε χιλιάδες δολάρια είναι:
  - **Max 10T + 15A**

Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (4)

- Οι περιορισμοί του μοντέλου είναι οι ακόλουθοι:
  - **282T + 400A ≤ 2.000** (διαθέσιμα κεφάλαια σε χιλ. $)
  - **4T + 40A ≤ 140** (χρόνος εργασίας διαχειριστή σε ώρες ανά μήνα)
  - **T ≤ 5** (διαθέσιμες μονοκατοικίες)

- Οι μεταβλητές Τ και Α θα πρέπει να μην λαμβάνουν αρνητικές τιμές
- Επίσης, δεν είναι δυνατή η αγορά δεκαδικού αριθμού πολυκατοικιών ή μονοκατοικιών
- Συνεπώς, οι μεταβλητές Τ και Α **πρέπει να είναι ακέραιες**

Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (5)

- Το μοντέλο για το πρόβλημα της Eastborne Realty είναι το ακόλουθο καθαρό ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα:

Max 10T + 15A

subject to

$$282T + 400A \leq 2.000$$

$$4T + 40A \leq 140$$

$$T \leq 5$$

T, A ≥ 0 και ακέραιες

KINDS

Προβλήματα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

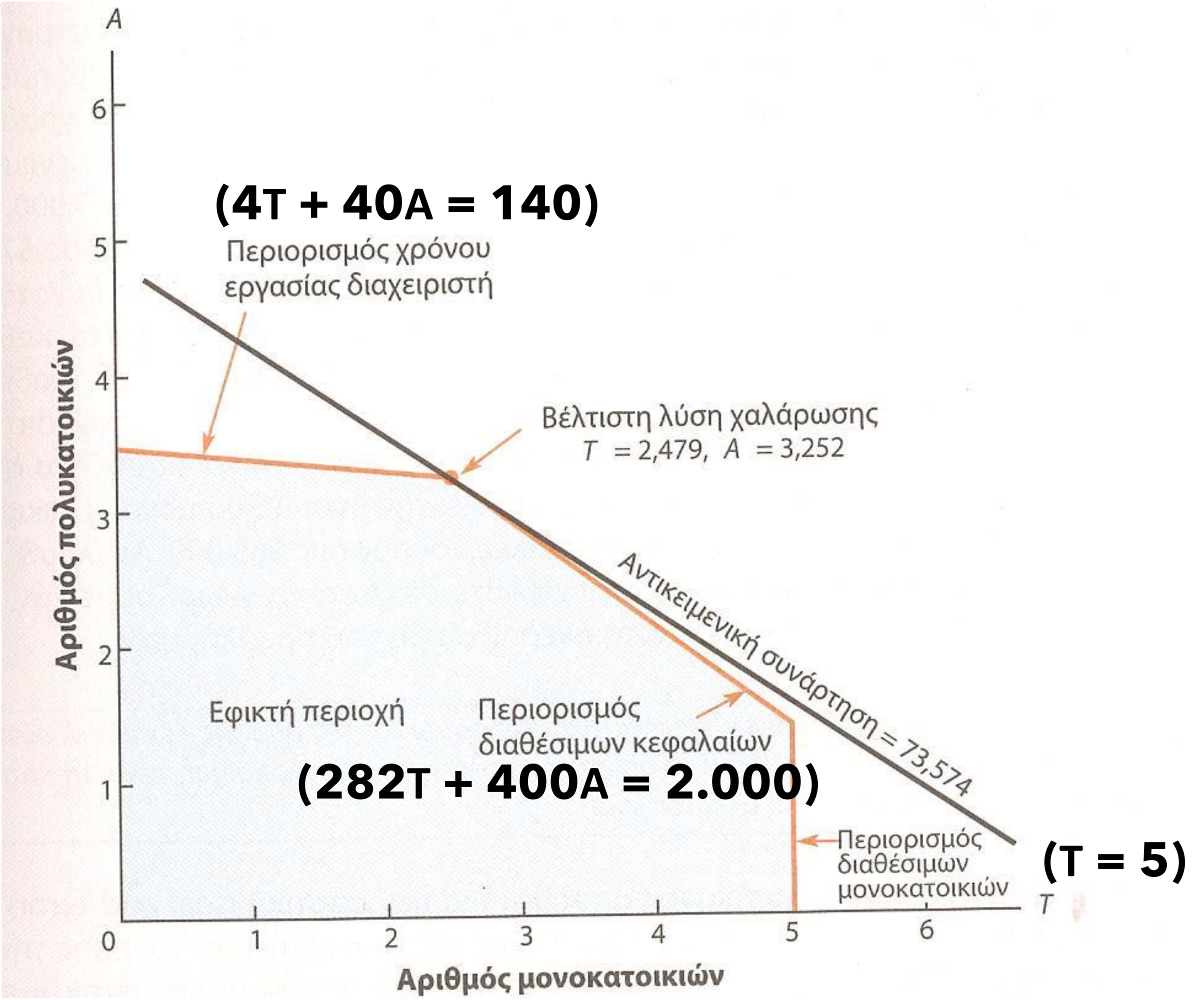
Γενικά: Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού στα οποία υπάρχει η προϋπόθεση μία ή περισσότερες μεταβλητές να λαμβάνουν ακέραιες τιμές

- Πρόβλημα καθαρού ακέραιου προγραμματισμού
  - Όλες οι μεταβλητές λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές
- Πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού
  - Ορισμένες, αλλά όχι όλες οι μεταβλητές, λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές
- Πρόβλημα «0-1» ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού
  - Όλες οι μεταβλητές του προβλήματος είναι μεταβλητές «0-1»

2/12/2020

Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (6)

- **Γραφική επίλυση της χαλάρωσης για το πρόβλημα της Eastborne Realty**

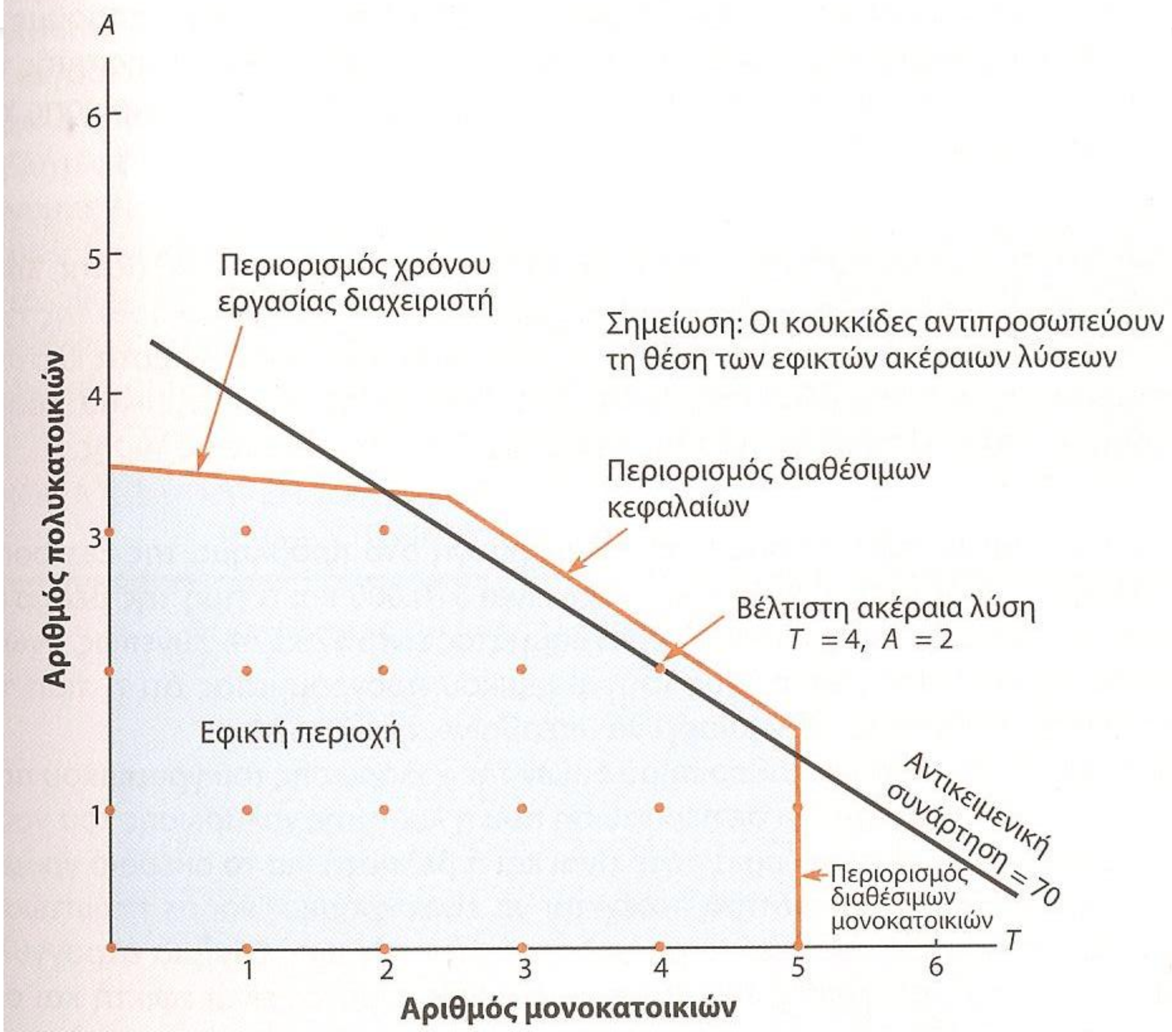


Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (7)

- **Βήμα 1^{o}** Σχεδιάζουμε την εφικτή περιοχή
- **Βήμα 2^{o}** Προσδιορίζουμε τις εφικτές λύσεις (ακέραιες τιμές) και τις απεικονίζουμε με κουκίδες
- **Βήμα 3^{o}** Μετακινούμε την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης έως ότου διέλθει από κάποια κουκίδα (η οποία αντιστοιχεί στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης)

Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (8)

- **Γραφική επίλυση του ακέραιου προβλήματος της Eastborne Realty**



Αλγόριθμος Branch&Bound

Βασική ιδέα

- Λύνουμε το πρόβλημα επαναληπτικά
- Ξεκινάμε κάθε φορά με το συνεχές πρόβλημα
- Διχοτομούμε τον χώρο λύσεων για να εισάγουμε περιορισμούς ακεραιότητας
- Αποκλείουμε κλάδους που δίνουν υπο-βέλτιστες ή μη –εφικτές λύσεις
- Περιορίζουμε τον χώρο έως ότου βρούμε λύση που ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας ή/και δυαδικότητας

Branch&Bound Παράδειγμα 1ο

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{maximize } z = 40x_1 + 100x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$2x_1 + 4x_2 \le 21$$

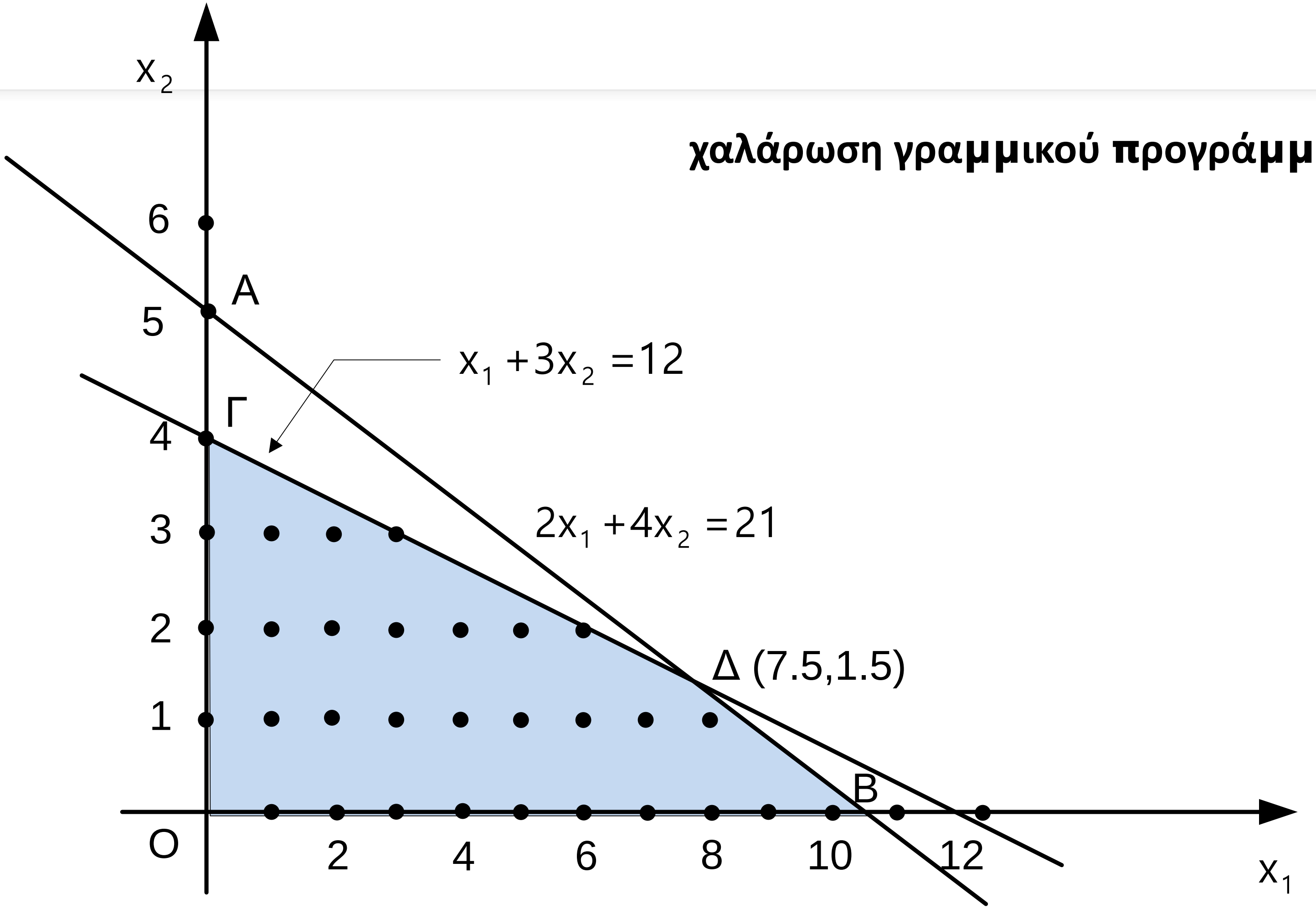
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1, x_2 ακέραιες μεταβλητές

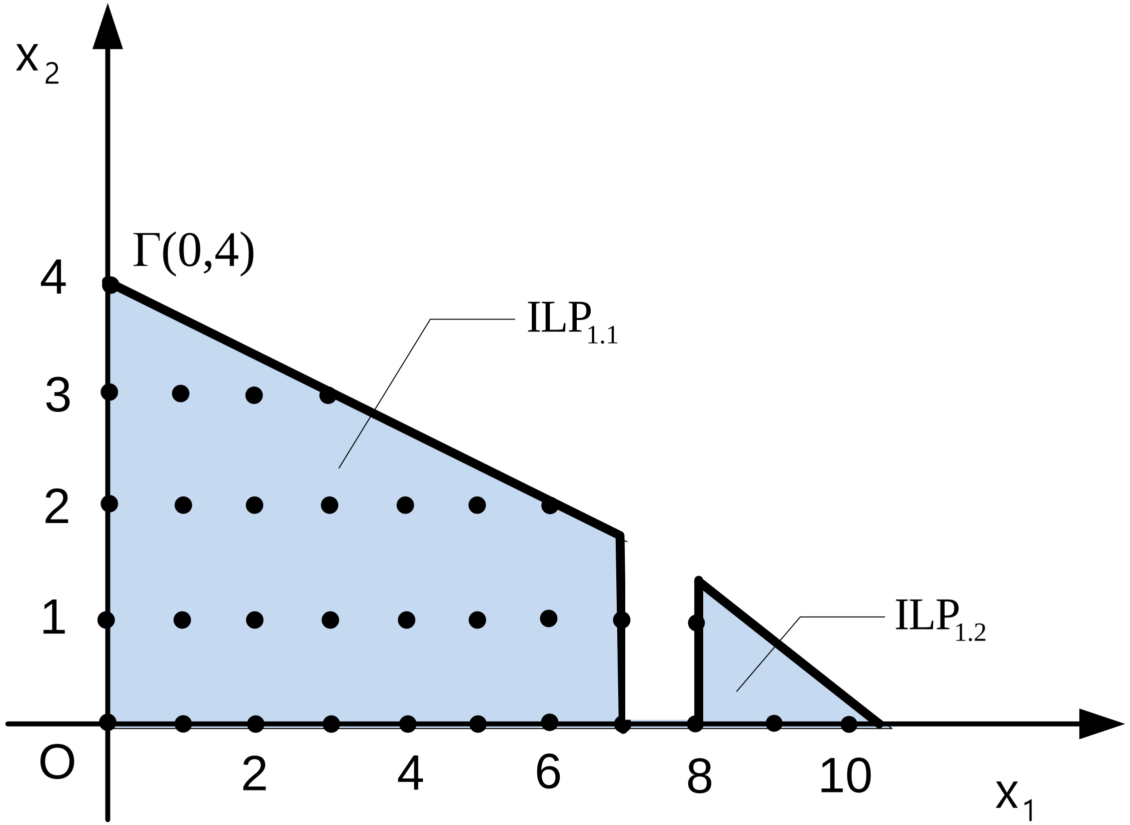
Branch&Bound Παράδειγμα 1ο

χαλάρωση γραμμικού προγράμματος

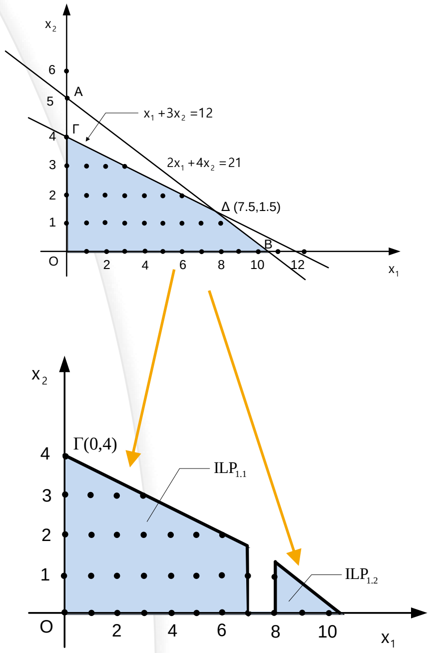


Branch&Bound Παράδειγμα 1ο

Επιλέγουμε τυχαία μια από τις ακέραιες μεταβλητές και εξαιρούμε μη ακέραια περιοχή από την εφικτή περιοχή



Branch&Bound
Παράδειγμα 1ο



LP_0

Υπό τους περιορισμούς:

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 21$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

$x_1 = 7.5 \quad x_2 = 1.5 \quad z = 450$

$LP_{1.1}$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 21$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 \le 7$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

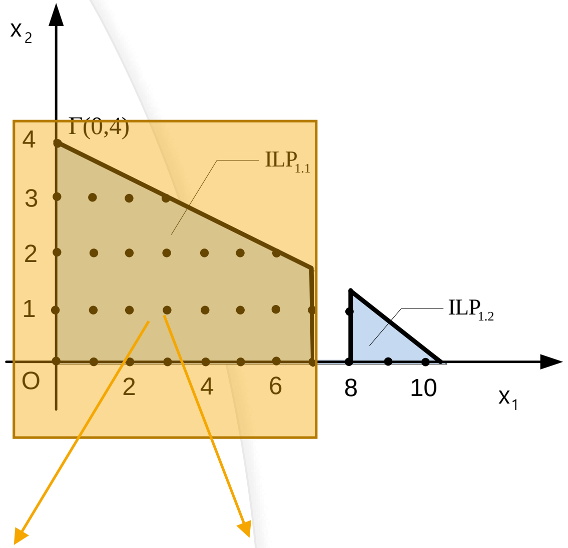
$x_1 = 7 \quad x_2 = 1.67 \quad z = 446.67$

$LP_{1.2}$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 21$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 \ge 8$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

$x_1 = 8 \quad x_2 = 1.25 \quad z = 445$



$LP_{1.1.1}$ $LP_{1.1.2}$

Branch&Bound Παράδειγμα 1ο

$LP_{1.1}$

$$\max\ z = 40x_1 + 100x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$2x_1 + 4x_2 \le 21$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 \le 7$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

$x_1 = 7 \quad x_2 = 1.67 \quad z = 446.67$ → Άνω φράγμα

$LP_{1.1.1}$

$$\max\ z = 40x_1 + 100x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$2x_1 + 4x_2 \le 21$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 \le 7$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

$x_1 = 7 \quad x_2 = 1 \quad z = 380$

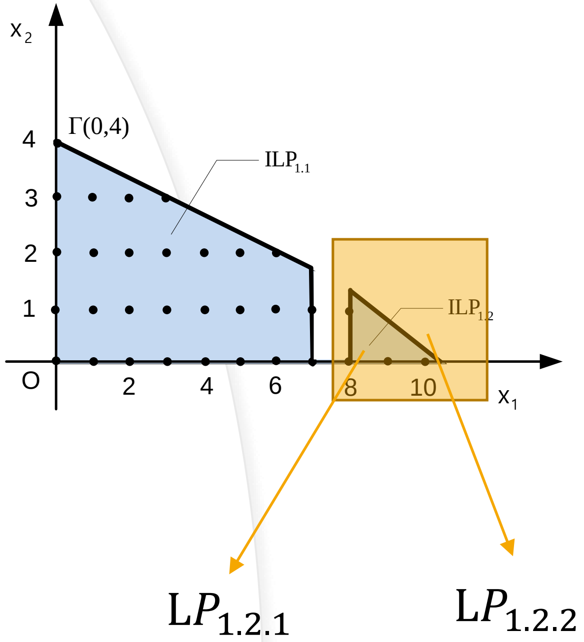
$LP_{1.1.2}$

$$\max\ z = 40x_1 + 100x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$2x_1 + 4x_2 \le 21$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 \le 7$$
$$x_2 \ge 2$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

$x_1 = 6 \quad x_2 = 2 \quad z = 440$



Branch&Bound Παράδειγμα 1ο

LP$_{1.2}$

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 21 \\ x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ x_1 &\ge 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 8 \quad x_2 = 1.25 \quad z = 445$

LP$_{1.2.1}$

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 21 \\ x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ x_1 &\ge 8 \\ x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 8.5 \quad x_2 = 1 \quad z = 440$

LP$_{1.2.2}$

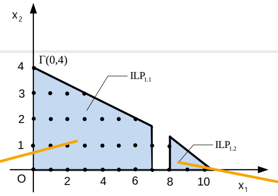
$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 21 \\ x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ x_1 &\ge 8 \\ x_2 &\ge 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Μη εφικτή λύση

Branch&Bound Παράδειγμα 1ο



$LP_{1.1}$

$\max z = 40x_1 + 100x_2$

Υπό τους περιορισμούς:

$2x_1 + 4x_2 \le 21$

$x_1 + 3x_2 \le 12$

$x_1 \le 7$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1 = 7 \quad x_2 = 1.67 \quad z = 446.67$

$LP_{1.2}$

$\max z = 40x_1 + 100x_2$

Υπό τους περιορισμούς:

$2x_1 + 4x_2 \le 21$

$x_1 + 3x_2 \le 12$

$x_1 \ge 8$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1 = 8 \quad x_2 = 1.25 \quad z = 445$

$LP_{1.1.1}$

$\max z = 40x_1 + 100x_2$

Υπό τους περιορισμούς:

$2x_1 + 4x_2 \le 21$

$x_1 + 3x_2 \le 12$

$x_1 \le 7$

$x_2 \le 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1 = 7 \quad x_2 = 1 \quad z = 380$

$LP_{1.1.2}$

$\max z = 40x_1 + 100x_2$

Υπό τους περιορισμούς:

$2x_1 + 4x_2 \le 21$

$x_1 + 3x_2 \le 12$

$x_1 \le 7$

$x_2 \ge 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1 = 6 \quad x_2 = 2 \quad z = 440$

$LP_{1.2.1}$

$\max z = 40x_1 + 100x_2$

Υπό τους περιορισμούς:

$2x_1 + 4x_2 \le 21$

$x_1 + 3x_2 \le 12$

$x_1 \ge 8$

$x_2 \le 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1 = 8.5 \quad x_2 = 1 \quad z = 440$

$LP_{1.2.2}$

$\max z = 40x_1 + 100x_2$

Υπό τους περιορισμούς:

$2x_1 + 4x_2 \le 21$

$x_1 + 3x_2 \le 12$

$x_1 \ge 8$

$x_2 \ge 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

Μη εφικτή λύση

Branch&Bound Παράδειγμα 1ο

$LP_{1.2.1}$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\max\ z = 40x_1 + 100x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 21$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 \ge 8$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

$x_1 = 8.5 \quad x_2 = 1 \quad z = 440$

$LP_{1.2.1.1}$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\max\ z = 40x_1 + 100x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 21$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 = 8$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

$x_1 = 8 \quad x_2 = 1 \quad z = 420$

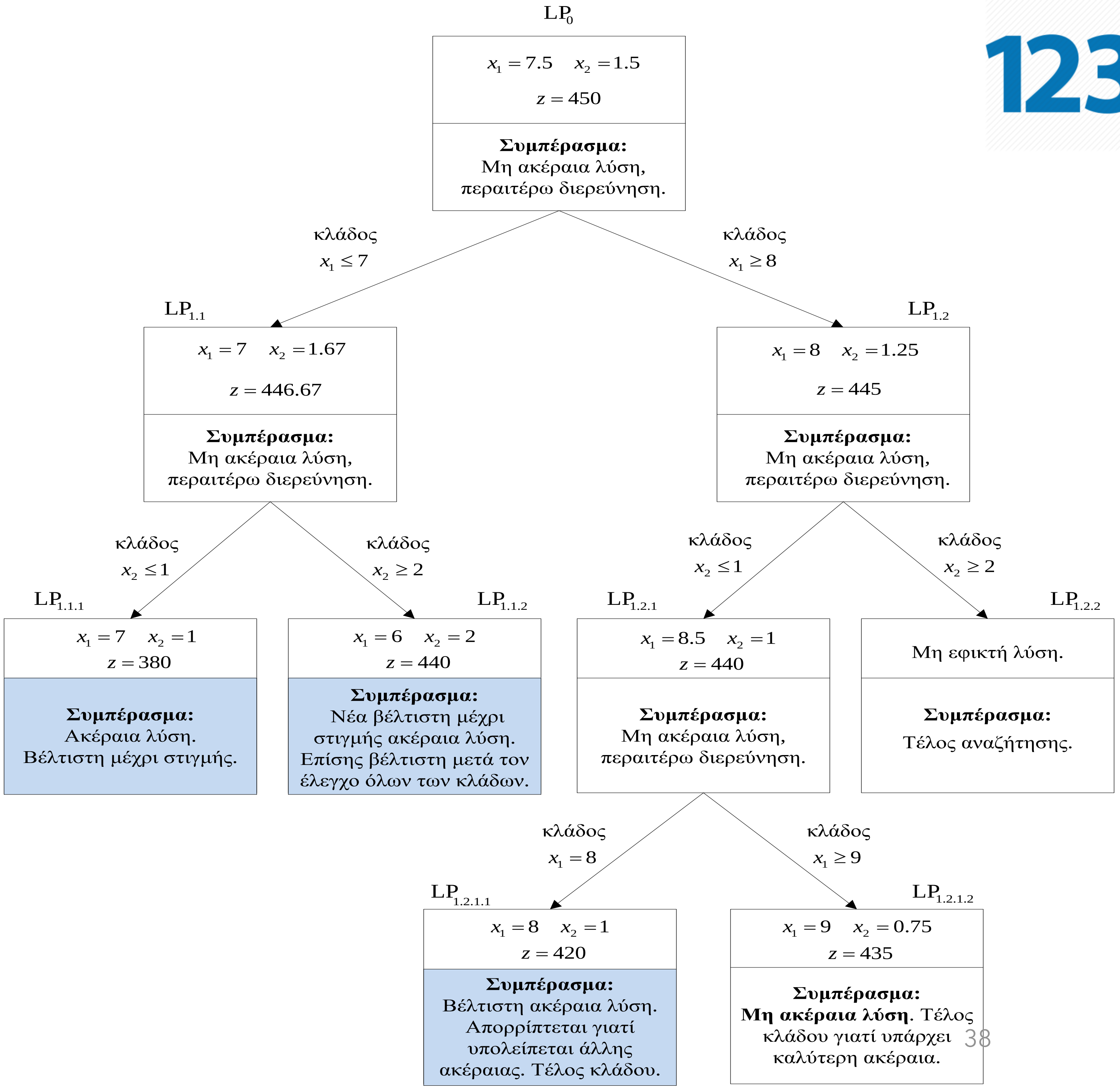
$LP_{1.2.1.2}$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\max\ z = 40x_1 + 100x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 21$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 \ge 9$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

$x_1 = 9 \quad x_2 = 0.75 \quad z = 435$

Branch&Bound
Παράδειγμα 1ο



Branch&Bound Παράδειγμα 2ο

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{maximize } z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 4$$

$$7x_1 - 4x_3 + 3x_4 \le 8$$

$$11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 \ge 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ ή } 1$$

Branch&Bound Παράδειγμα 2ο

LP$_0$

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 4$$
$$7x_1 - 4x_3 + 3x_4 \le 8$$
$$11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 \ge 3$$
$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \ge 0$$

$x_1 = 0.97 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0.45 \quad x_4 = 1$

$z = 7.01$

LP$_{1.1}$

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 4$$
$$7x_1 - 4x_3 + 3x_4 \le 8$$
$$11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 \ge 3$$
$$x_1 = 0$$
$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \ge 0$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 0$

$z = -2$

LP$_{1.2}$

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 4$$
$$7x_1 - 4x_3 + 3x_4 \le 8$$
$$11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 \ge 3$$
$$x_1 = 1$$
$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \ge 0$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0.50 \quad x_4 = 1$

$z = 7$

Branch&Bound Παράδειγμα 2ο

$LP_{1.2}$

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 4 \\ 7x_1 - 4x_3 + 3x_4 &\le 8 \\ 11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 &\ge 3 \\ x_1 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0.50 \quad x_4 = 1$

$z = 7$

$LP_{1.2.1}$

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 4 \\ 7x_1 - 4x_3 + 3x_4 &\le 8 \\ 11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 &\ge 3 \\ x_1 &= 1 \\ x_3 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0.33$

$z = 6$

$LP_{1.2.2}$

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 4 \\ 7x_1 - 4x_3 + 3x_4 &\le 8 \\ 11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 &\ge 3 \\ x_1 &= 1 \\ x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 1$

$z = 4$

Branch&Bound Παράδειγμα 2ο

LP_0

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 4$$
$$7x_1 - 4x_3 + 3x_4 \le 8$$
$$11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 \ge 3$$
$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \ge 0$$

$x_1 = 0.97 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0.45 \quad x_4 = 1$

$z = 7.01$

$LP_{1.1}$

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 4$$
$$7x_1 - 4x_3 + 3x_4 \le 8$$
$$11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 \ge 3$$
$$x_1 = 0$$
$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \ge 0$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 0$

$z = -2$

$LP_{1.2}$

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 4$$
$$7x_1 - 4x_3 + 3x_4 \le 8$$
$$11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 \ge 3$$
$$x_1 = 1$$
$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \ge 0$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0.50 \quad x_4 = 1$

$z = 7$

Branch&Bound
Παράδειγμα 2ο

$LP_{1.2.1}$

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 4 \\ 7x_1 - 4x_3 + 3x_4 &\le 8 \\ 11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 &\ge 3 \\ x_1 &= 1 \\ x_3 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0.33$

$z = 6$

$LP_{1.2.1} \to LP_{1.2.1.1}$, $LP_{1.2.1} \to LP_{1.2.1.2}$

$LP_{1.2.1.1}$

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 4 \\ 7x_1 - 4x_3 + 3x_4 &\le 8 \\ 11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 &\ge 3 \\ x_1 &= 1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0$

$z = 5$

$LP_{1.2.1.2}$

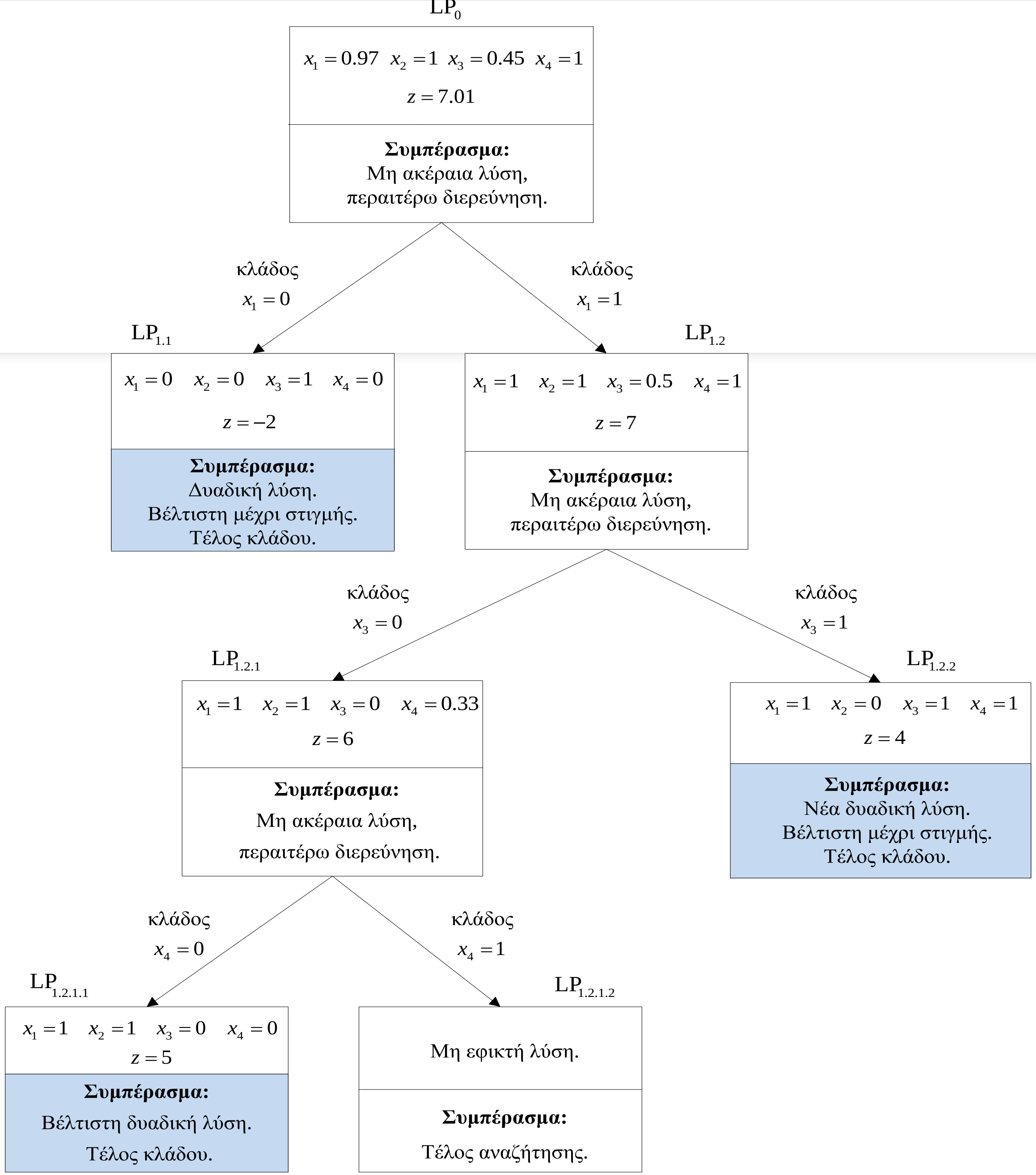
$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 4 \\ 7x_1 - 4x_3 + 3x_4 &\le 8 \\ 11x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 &\ge 3 \\ x_1 &= 1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Μη εφικτή λύση

Branch&Bound
Παράδειγμα 2ο



Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Διαχείριση κεφαλαίων (1)

- Η Ice-Gold Refrigerator Company εξετάζει για την προσεχή τετραετία, την τοποθέτηση κεφαλαίων σε ορισμένα επενδυτικά σχέδια
- Λαμβάνοντας υπόψη τους ετήσιους κεφαλαιακούς περιορισμούς, η διεύθυνση της εταιρίας επιθυμεί τον προσδιορισμό των επικερδέστερων τοποθετήσεων
- Η εκτιμώμενη καθαρή παρούσα αξία για κάθε επενδυτικό σχέδιο, οι κεφαλαιακές απαιτήσεις και τα διαθέσιμα κεφάλαια για την εξεταζόμενη περίοδο παρουσιάζονται στον επόμενο Πίνακα

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Διαχείριση κεφαλαίων (2)

	Επενδυτικό σχέδιο				
	Επέκταση εργοστασίου	**Επέκταση αποθήκης**	**Νέος μηχανολογικός εξοπλισμός**	**Έρευνα για την ανάπτυξη νέων προϊόντων**	**Συνολικά διαθέσιμα κεφάλαια**
Παρούσα αξία	$90.000	$40.000	$10.000	$37.000	
Κεφαλαιακές απαιτήσεις 1ου έτους	$15.000	$10.000	$10.000	$15.000	$40.000
Κεφαλαιακές απαιτήσεις 2ου έτους	$20.000	$15.000	-	$10.000	$50.000
Κεφαλαιακές απαιτήσεις 3ου έτους	$20.000	$20.000	-	$10.000	$40.000
Κεφαλαιακές απαιτήσεις 4ου έτους	$15.000	$5.000	$4.000	$10.000	$35.000

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Διαχείριση κεφαλαίων (3)

- Οι τέσσερις «0-1» μεταβλητές είναι οι ακόλουθες:
    1. **P** = 1, εάν το σχέδιο επέκτασης του εργοστασίου γίνει αποδεκτό ή 0 εάν απορριφθεί
    2. **W** = 1, εάν το σχέδιο επέκτασης της αποθήκης γίνει αποδεκτό ή 0 εάν απορριφθεί
    3. **M** = 1, εάν το σχέδιο προσθήκης μηχανολογικού εξοπλισμού γίνει αποδεκτό ή 0 εάν απορριφθεί
    4. **R** = 1, εάν το σχέδιο διεξαγωγής έρευνας για ανάπτυξη νέων προϊόντων γίνει αποδεκτό ή 0 εάν απορριφθεί

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Διαχείριση κεφαλαίων (4)

- Σε ένα **πρόβλημα διαχείρισης κεφαλαίων**, στόχος της εταιρίας είναι η μεγιστοποίηση της καθαρής παρούσας αξίας των επενδυτικών σχεδίων
- Το εξεταζόμενο πρόβλημα έχει τέσσερις περιορισμούς, οι οποίοι σχετίζονται με τα διαθέσιμα κεφάλαια για κάθε ένα από τα προσεχή τέσσερα έτη

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Διαχείριση κεφαλαίων (5)

- Το μοντέλο «0-1» ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού για το **πρόβλημα διαχείρισης κεφαλαίων** είναι το εξής:
  - **Max 90P + 40W + 10M + 37R**
  - **subject to**
  - **15P + 10W + 10M + 15R ≤ 40** **(διαθέσιμα κεφάλαια 1ου έτους)**
  - **20P + 15W + 10R ≤ 50** **(διαθέσιμα κεφάλαια 2ου έτους)**
  - **20P + 20W + 10R ≤ 40** **(διαθέσιμα κεφάλαια 3ου έτους)**
  - **15P + 5W + 4M + 10R ≤ 35** **(διαθέσιμα κεφάλαια 4ου έτους)**
  - **P, W, M, R = 0 ή 1**

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (1)

- Σε πολλές εφαρμογές, το κόστος παραγωγής περιλαμβάνει το κόστος ρύθμισης των γραμμών παραγωγής (σταθερό κόστος) και το μεταβλητό κόστος, το οποίο εξαρτάται άμεσα από τον όγκο της παραγωγής
- Η ενσωμάτωση του κόστους ρύθμισης των γραμμών παραγωγής σε ένα μοντέλο παραγωγής καθίσταται εφικτή με τη χρήση «0-1» μεταβλητών

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (2)

- Θα εξετάσουμε το πρόβλημα σταθερού κόστους μιας μικρής επιχείρησης παραγωγής χημικών προϊόντων της RMC Inc.
- Τρία είδη πρώτων υλών (**πρώτη ύλη 1**, **πρώτη ύλη 2** και **πρώτη ύλη 3**) χρησιμοποιούνται για την κατασκευή τριών προϊόντων
  1. ενός βελτιωτικού καυσίμου
  2. ενός διαλύτη απορρυπαντικών
  3. ενός υγρού καθαριστικού χαλιών
- Οι μεταβλητές απόφασης που χρησιμοποιούνται είναι:
  - **F**: τόνοι βελτιωτικού καυσίμου που παράγονται
  - **S**: τόνοι διαλύτη απορρυπαντικού που παράγονται
  - **C**: τόνοι υγρού καθαριστικού χαλιών που παράγονται

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (3)

- Η συνεισφορά στο κέρδος είναι:
  - **$40** ανά τόνο για το βελτιωτικό καυσίμου
  - **$30** ανά τόνο για το διαλύτη απορρυπαντικού
  - **$50** ανά τόνο για το υγρό καθαριστικού χαλιών
- Ένας τόνος βελτιωτικού καυσίμου προέρχεται από την ανάμειξη:
  - **0,4** τόνων της πρώτης ύλης 1 και **0,6** τόνων της πρώτης ύλης 3
- Ένας τόνος διαλύτη απορρυπαντικού προέρχεται από την ανάμειξη:
  - **0,5** τόνων της πρώτης ύλης 1, **0,2** τόνων της πρώτης ύλης 2 και **0,3** τόνων της πρώτης ύλης 3
- Ένας τόνος υγρού καθαριστικού χαλιών προέρχεται από την ανάμειξη:
  - **0,6** τόνων της πρώτης ύλης 1, **0,1** τόνων της πρώτης ύλης 2 και **0,3** τόνων της πρώτης ύλης 3

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (4)

- Η RMC διαθέτει
  - **20** τόνους της πρώτης ύλης 1
  - **5** τόνους της πρώτης ύλης 2
  - **21** τόνους της πρώτης ύλης 3
- Η διεύθυνση της RMC επιθυμεί τον προσδιορισμό των ποσοτήτων που θα πρέπει να παραχθούν κατά την προσεχή περίοδο

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (5)

- Ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα της RMC είναι το ακόλουθο:
  - **Max $40F + 30S + 50C$**
  - **subject to**
  - **$0,4F + 0,5S + 0,6C \leq 20$ (πρώτη ύλη 1)**
  - **$0,2S + 0,1C \leq 5$ (πρώτη ύλη 2)**
  - **$0,6F + 0,3S + 0,3C \leq 21$ (πρώτη ύλη 3)**
  - **$F, S, C \geq 0$**

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (6)

- Το προηγούμενο μοντέλο για το πρόβλημα της RMC δεν περιλαμβάνει το **σταθερό κόστος για τη ρύθμιση των γραμμών παραγωγής** και **τους περιορισμούς για τις μέγιστες δυνατές ποσότητες παραγωγής**
- Υποθέτουμε ότι μας είναι γνωστά τα ακόλουθα δεδομένα ως προς το κόστος ρύθμισης των γραμμών παραγωγής και της μέγιστης δυνατής παραχθείσας ποσότητας για καθένα από τα τρία προϊόντα:

Προϊόν	Κόστος ρυθμίσεων	Μέγιστος όγκος παραγωγής
Βελτιωτικό καυσίμου	$200	50 τόνοι
Διαλύτης απορρυπαντικού	$50	25 τόνοι
Υγρό καθαριστικό χαλιών	$400	40 τόνοι

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (7)

- Ορίζουμε τις ακόλουθες «0-1» μεταβλητές προκειμένου να ενσωματώσουμε το σταθερό κόστος στο διατυπωμένο μοντέλο παραγωγής:
  - **SF**: 1 εάν παραχθούν ποσότητες βελτιωτικού καυσίμου και 0 εάν δεν παραχθούν
  - **SS**: 1 εάν παραχθούν ποσότητες διαλύτη απορρυπαντικού και 0 εάν δεν παραχθούν
  - **SC**: 1 εάν παραχθούν ποσότητες καθαριστικού χαλιών και 0 εάν δεν παραχθούν
- Έτσι, προκύπτει το κόστος ρυθμίσεων:
  - **200SF + 50SS + 400SC**

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (8)

- Η αντικειμενική συνάρτηση που περιλαμβάνει το σταθερό κόστος έχει την εξής μορφή:
  - **Max** $40F + 30S + 50C - 200SF - 50SS - 400SC$
- Επιπλέον, προσθέτουμε τους περιορισμούς:
  1. $F \leq 50SF$
  2. $S \leq 25SS$
  3. $C \leq 40SC$
- Για παράδειγμα, εάν **SF = 0** δεν επιτρέπεται η παραγωγή βελτιωτικού καυσίμου, ενώ εάν **SF = 1** είναι δυνατή η παραγωγή έως και 50 τόνων βελτιωτικού καυσίμου

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (9)

- Το **μοντέλο σταθερού κόστους** για το πρόβλημα της RMC είναι το ακόλουθο:
  - **Max $40F + 30S + 50C - 200SF - 50SS - 400SC$**
  - **subject to**
  - **$0,4F + 0,5S + 0,6C \leq 20$ (πρώτη ύλη 1)**
  - **$0,2S + 0,1C \leq 5$ (πρώτη ύλη 2)**
  - **$0,6F + 0,3S + 0,3C \leq 21$ (πρώτη ύλη 3)**
  - **$F - 50SF \leq 0$ (μέγιστο F)**
  - **$S - 25SS \leq 0$ (μέγιστο S)**
  - **$C - 40SC \leq 0$ (μέγιστο C)**
  - **$F, S, C \geq 0$ και $SF, SS, SC = 0$ ή 1**

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (1)

- Η Martin-Beck Company λειτουργεί ένα εργοστάσιο στο St. Louis με ετήσια δυναμικότητα **30.000** μονάδες
- Το προϊόν αποστέλλεται σε περιφερειακά κέντρα διανομής στο Boston, στην Atlanta και στο Houston
- Λόγω μιας αναμενόμενης αύξησης στη ζήτηση, η Martin-Beck εξετάζει την αύξηση της δυναμικότητάς της μέσω της κατασκευής νέων εργοστασίων σε μία ή περισσότερες από τις ακόλουθες πόλεις: Detroit, Toledo, Denver και Kansas City
- Το αναμενόμενο ετήσιο σταθερό κόστος και η ετήσια δυναμικότητα για τα τέσσερα προτεινόμενα εργοστάσια παρουσιάζεται στον ακόλουθο Πίνακα

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (2)

Προτεινόμενο εργοστάσιο	Ετήσιο σταθερό κόστος	Ετήσια δυναμικότητα
Detroit	$175.000	10.000
Toledo	$300.000	20.000
Denver	$375.000	30.000
Kansas City	$500.000	40.000

- Σύμφωνα με εκτιμήσεις στελεχών της Martin-Beck, η αναμενόμενη ετήσια ζήτηση ανά κέντρο διανομής είναι:

Κέντρο διανομής	Ετήσια ζήτηση
Boston	30.000
Atlanta	20.000
Houston	20.000

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (3)

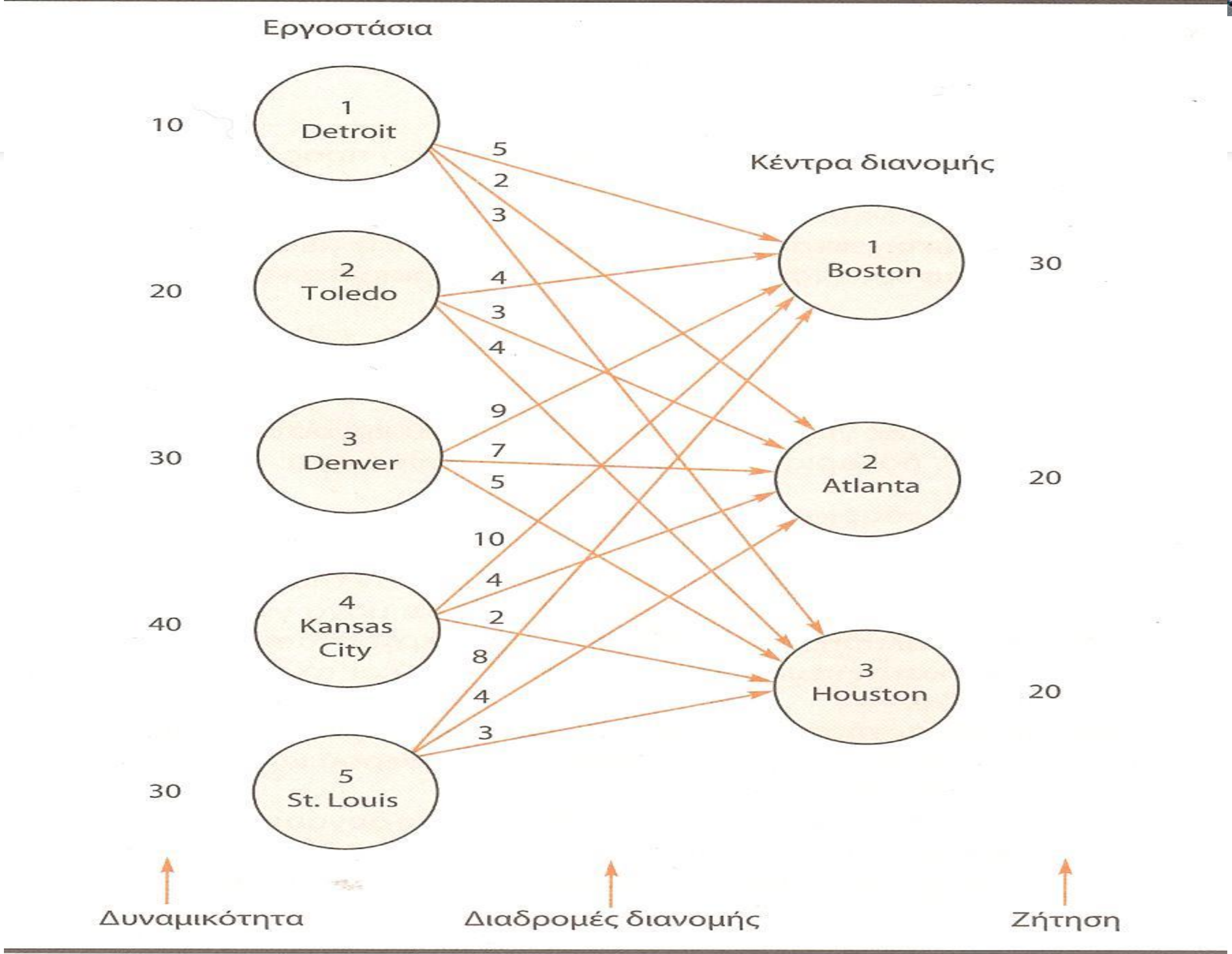
- Το κόστος αποστολής ανά μονάδα από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής παρουσιάζεται στον ακόλουθο Πίνακα

Εργοστάσιο	Κέντρο διανομής		
	Boston	**Atlanta**	**Houston**
Detroit	5	2	3
Toledo	4	3	4
Denver	9	7	5
Kansas City	10	4	2
St. Louis	8	4	3

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (4)

- Το δίκτυο για το συγκεκριμένο πρόβλημα συστήματος διανομής παρουσιάζεται στην επόμενη διαφάνεια
- Περιλαμβάνονται όλες οι πόλεις που εξετάζονται ως προς την εγκατάσταση νέου εργοστασίου
- Η δυναμικότητα και η ζήτηση παρουσιάζονται σε χιλιάδες μονάδες
- Το δίκτυο αφορά ένα πρόβλημα μεταφοράς, το οποίο περιλαμβάνει εργοστάσια στο St. Louis (υπάρχον εργοστάσιο) και σε καθεμία από τις τέσσερις εξεταζόμενες πόλεις (πιθανές τοποθεσίες για εργοστάσιο)
- Όμως δεν έχει ληφθεί ακόμα η απόφαση αναφορικά με το ποιο ή ποια εργοστάσια θα κατασκευαστούν

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (5)



Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (6)

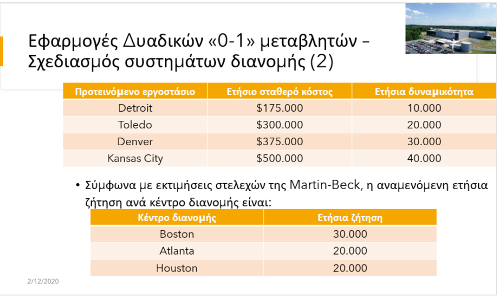
- Οι «0-1» μεταβλητές που θα χρησιμοποιηθούν είναι οι εξής:
- $\mathbf{y_1}$=1 εάν κατασκευαστεί εργοστάσιο στο Detroit ή 0 εάν δεν κατασκευαστεί
- $\mathbf{y_2}$=1 εάν κατασκευαστεί εργοστάσιο στο Toledo ή 0 εάν δεν κατασκευαστεί
- $\mathbf{y_3}$=1 εάν κατασκευαστεί εργοστάσιο στο Denver ή 0 εάν δεν κατασκευαστεί
- $\mathbf{y_4}$=1 εάν κατασκευαστεί εργοστάσιο στο Kansas City ή 0 εάν δεν κατασκευαστεί

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (7)

- Οι μεταβλητές που αναπαριστούν τις ποσότητες που μεταφέρονται από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής ορίζονται με τον ίδιο τρόπο με αυτόν που ορίζονται οι μεταβλητές σε ένα πρόβλημα μεταφοράς και είναι οι εξής:
- $\mathbf{x_{ij}}$= οι μονάδες που μεταφέρονται από το εργοστάσιο ***i*** προς το κέντρο διανομής ***j*** (σε χιλιάδες), i = 1,2,3,4,5 και j = 1,2,3
- Επομένως, το ετήσιο κόστος μεταφοράς (σε χιλιάδες δολάρια) προκύπτει από το άθροισμα:
  - $\mathbf{5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 9x_{31} + 7x_{32} + 5x_{33} + 10x_{41} + 4x_{42} + 2x_{43} + 8x_{51} + 4x_{52} + 3x_{53}}$

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (8)

- Το ετήσιο σταθερό κόστος για τη λειτουργία του νέου εργοστασίου ή των νέων εργοστασίων (σε χιλιάδες δολάρια) προκύπτει από το άθροισμα
  - $\mathbf{175y_1 + 300y_2 + 375y_3 + 500y_4}$
- Εάν $\mathbf{y_1 = 0}$, το αντίστοιχο εργοστάσιο δεν θα κατασκευαστεί και το ετήσιο σταθερό κόστος του θα είναι \$0
- Εάν $\mathbf{y_1 = 1}$, το αντίστοιχο εργοστάσιο θα κατασκευαστεί και το ετήσιο σταθερό κόστος του θα είναι \$175
- **Η αντικειμενική συνάρτηση είναι το άθροισμα του ετήσιου κόστους μεταφοράς και του ετήσιου σταθερού κόστους για τη λειτουργία του νέου ή των νέων εργοστασίων**



Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (2)

Προτεινόμενο εργοστάσιο	Ετήσιο σταθερό κόστος	Ετήσια δυναμικότητα
Detroit	$175.000	10.000
Toledo	$300.000	20.000
Denver	$375.000	30.000
Kansas City	$500.000	40.000

- Σύμφωνα με εκτιμήσεις στελεχών της Martin-Beck, η αναμενόμενη ετήσια ζήτηση ανά κέντρο διανομής είναι:

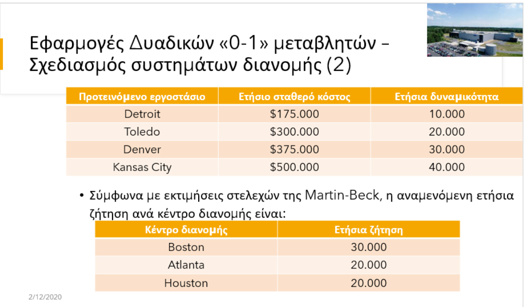
Κέντρο διανομής	Ετήσια ζήτηση
Boston	30.000
Atlanta	20.000
Houston	20.000

2/12/2020

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (9)

- Θα ορίσουμε τους **περιορισμούς δυναμικότητας** για τα τέσσερα προτεινόμενα εργοστάσια και για το υφιστάμενο στο St. Louis
- Για το προτεινόμενο εργοστάσιο στο Detroit
  - $\mathbf{x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10y_1}$
- Σε περίπτωση που κατασκευαστεί εργοστάσιο στο Detroit θα έχουμε $\mathbf{y_1 = 1}$ και ο συνολικός αριθμός των μονάδων που θα μεταφερθούν από το Detroit προς τα τρία κέντρα διανομής θα πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με τη δυναμικότητα των 10.000 μονάδων

Εάν το εργοστάσιο δεν κατασκευαστεί θα έχουμε $\mathbf{y_1 = 0}$ και συνεπώς δυναμικότητα ίση με 0 (άρα $\mathbf{x_{11} = x_{12} = x_{13} = 0}$)



Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (2)

Προτεινόμενο εργοστάσιο	Ετήσιο σταθερό κόστος	Ετήσια δυναμικότητα
Detroit	$175.000	10.000
Toledo	$300.000	20.000
Denver	$375.000	30.000
Kansas City	$500.000	40.000

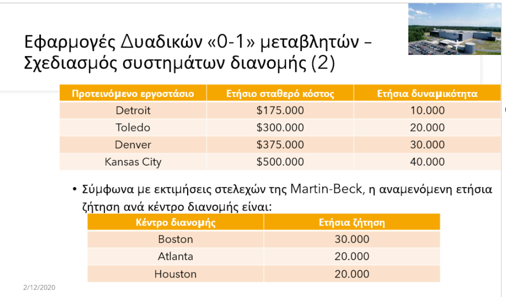
- Σύμφωνα με εκτιμήσεις στελεχών της Martin-Beck, η αναμενόμενη ετήσια ζήτηση ανά κέντρο διανομής είναι:

Κέντρο διανομής	Ετήσια ζήτηση
Boston	30.000
Atlanta	20.000
Houston	20.000

2/12/2020

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (10)

- Μεταφέροντας όλες τις μεταβλητές στο αριστερό μέρος λαμβάνουμε τον ακόλουθο περιορισμό για το προτεινόμενο εργοστάσιο στο Detroit
  - **$x_{11} + x_{12} + x_{13} - 10y_1 \leq 0$ (περιορισμός προτεινόμενου για Detroit)**
- Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε τους περιορισμούς για τα υπόλοιπα προτεινόμενα εργοστάσια:
  - **$x_{21} + x_{22} + x_{23} - 20y_2 \leq 0$ (περιορισμός προτεινόμενου για Toledo)**
  - **$x_{31} + x_{32} + x_{33} - 30y_3 \leq 0$ (περιορισμός προτεινόμενου για Denver)**
  - **$x_{41} + x_{42} + x_{43} - 40y_4 \leq 0$ (περιορισμός προτεινόμενου για Kansas City)**



Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (2)

Προτεινόμενο εργοστάσιο	Ετήσιο σταθερό κόστος	Ετήσια δυναμικότητα
Detroit	$175.000	10.000
Toledo	$300.000	20.000
Denver	$375.000	30.000
Kansas City	$500.000	40.000

- Σύμφωνα με εκτιμήσεις στελεχών της Martin-Beck, η αναμενόμενη ετήσια ζήτηση ανά κέντρο διανομής είναι:

Κέντρο διανομής	Ετήσια ζήτηση
Boston	30.000
Atlanta	20.000
Houston	20.000

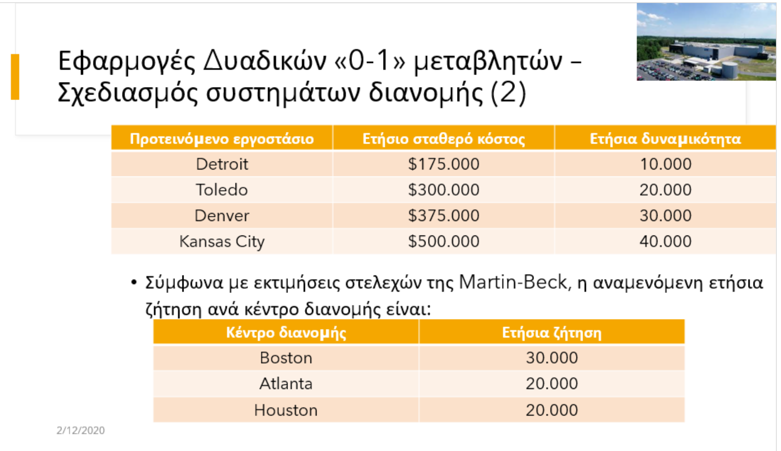
2/12/2020

Για το εργοστάσιο στο St. Louis, επειδή αυτό ήδη υφίσταται, ο περιορισμός είναι ο εξής:

- **$x_{51} + x_{52} + x_{53} \leq 30$ (περιορισμός υφιστάμενου στο St. Louis)**

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (11a)

- Θα ορίσουμε τους περιορισμούς ζήτησης για τα τρία κέντρα διανομής
  - $\mathbf{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 30}$ **(κέντρο διανομής Boston)**
  - $\mathbf{x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 20}$ **(κέντρο διανομής Atlanta)**
  - $\mathbf{x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 20}$ **(κέντρο διανομής Houston)**



Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (2)

Προτεινόμενο εργοστάσιο	Ετήσιο σταθερό κόστος	Ετήσια δυναμικότητα
Detroit	$175.000	10.000
Toledo	$300.000	20.000
Denver	$375.000	30.000
Kansas City	$500.000	40.000

- Σύμφωνα με εκτιμήσεις στελεχών της Martin-Beck, η αναμενόμενη ετήσια ζήτηση ανά κέντρο διανομής είναι:

Κέντρο διανομής	Ετήσια ζήτηση
Boston	30.000
Atlanta	20.000
Houston	20.000

2/12/2020

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (11b)

- Το ολοκληρωμένο πρόγραμμα σχεδιασμού του συστήματος διανομής της Martin-Beck είναι το ακόλουθο
  - **Min $5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 9x_{31} + 7x_{32} + 5x_{33} + 10x_{41} + 4x_{42} + 2x_{43} + 8x_{51} + 4x_{52} + 3x_{53} + 175y_1 + 300y_2 + 375y_3 + 500y_4$**
  - **subject to**
  - **$x_{11} + x_{12} + x_{13} - 10y_1 \leq 0$ (περιορισμός προτεινόμενου για Detroit)**
  - **$x_{21} + x_{22} + x_{23} - 20y_2 \leq 0$ (περιορισμός προτεινόμενου για Toledo)**
  - **$x_{31} + x_{32} + x_{33} - 30y_3 \leq 0$ (περιορισμός προτεινόμενου για Denver)**
  - **$x_{41} + x_{42} + x_{43} - 40y_4 \leq 0$ (περιορισμός προτεινόμενου για Kansas City)**
  - **$x_{51} + x_{52} + x_{53} \leq 30$ (περιορισμός υφιστάμενου στο St. Louis)**
  - **$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 30$ (κέντρο διανομής Boston)**
  - **$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 20$ (κέντρο διανομής Atlanta)**
  - **$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 20$ (κέντρο διανομής Houston)**
  - **$x_{ij} \geq 0$ για κάθε i,j και $y_1, y_2, y_3, y_4 = 0$ ή 1**

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (12)

- Εάν επιθυμούμε να αποκλείσουμε την πιθανότητα ταυτόχρονης κατασκευής εργοστασίων σε δύο πόλεις που απέχουν ελάχιστα η μία από την άλλη ποιον περιορισμό θα έπρεπε να προσθέσουμε στο μοντέλο;
- $\mathbf{y_1 + y_2 \leq 1}$ (για αμοιβαίο αποκλεισμό κατασκευής εργοστασίου στις πόλεις Detroit και Toledo)

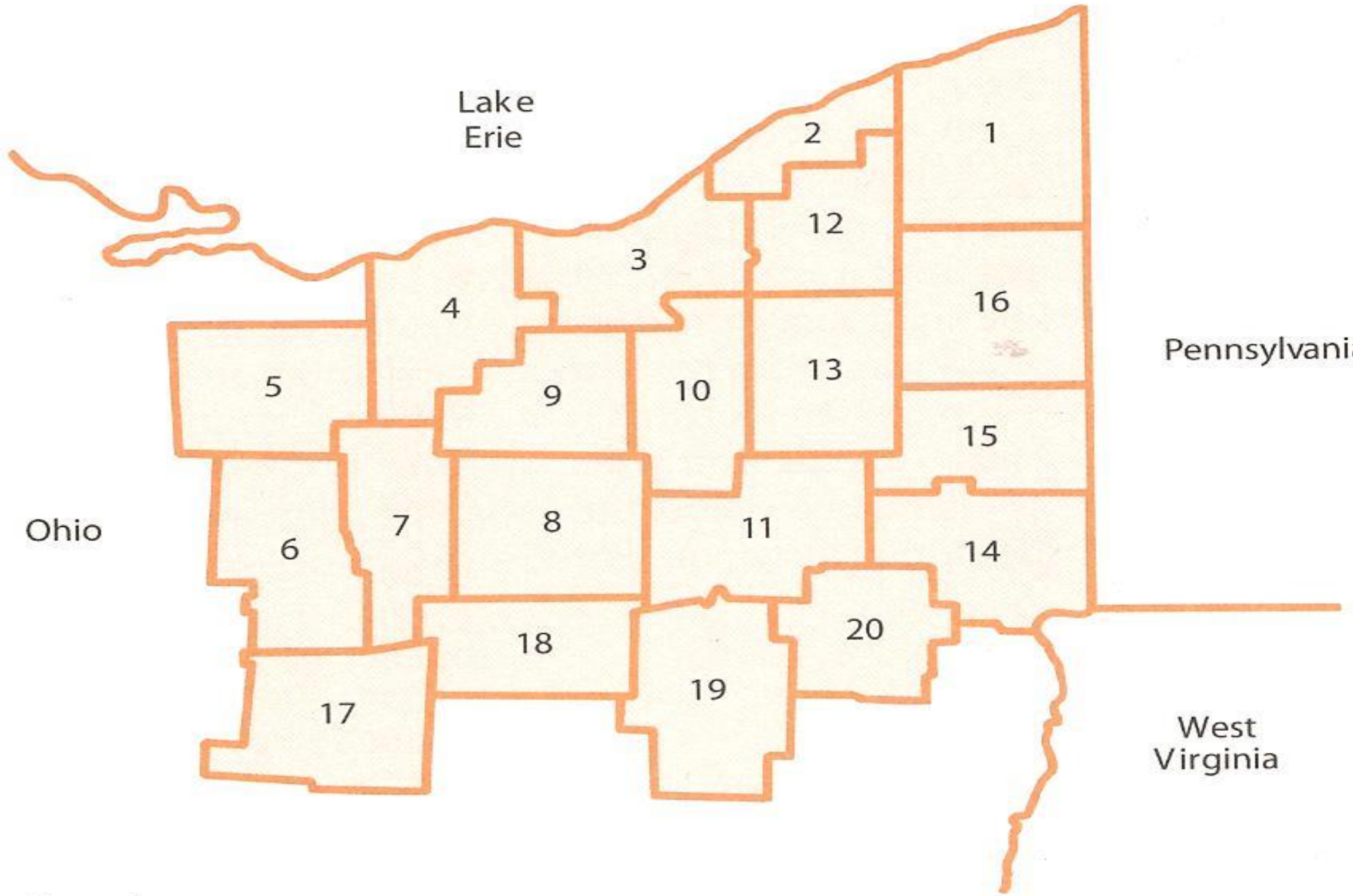
- Εάν επιθυμούμε την υποχρεωτική κατασκευή ενός εργοστασίου σε μόνο μία από δύο συγκεκριμένες πόλεις (όχι και στις δύο) ποιον περιορισμό θα έπρεπε να προσθέσουμε στο μοντέλο;
- $\mathbf{y_1 + y_2 = 1}$ (υποχρεωτική κατασκευή εργοστασίου είτε στο Detroit είτε στο Toledo, όχι όμως και στις δύο)

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θεσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (1)

- Το τμήμα γεωγραφικής επέκτασης του τραπεζικού οργανισμού Ohio Trust εξετάζει την επέκταση των δραστηριοτήτων του σε μια περιοχή 20 περιφερειών στο βορειο-ανατολικό τμήμα του Ohio
- Η Ohio Trust δεν διαθέτει κεντρικό κατάστημα σε καμία από τις 20 περιφέρειες
- Σύμφωνα με το ισχύον νομικό πλαίσιο, εάν μια τράπεζα εγκαταστήσει κεντρικό κατάστημα σε μία περιφέρεια, έχει τη δυνατότητα εγκατάστασης υποκαταστημάτων στη συγκεκριμένη περιφέρεια, καθώς και σε όλες τις όμορες περιφέρειες

Όμως για να δημιουργηθεί ένα κεντρικό κατάστημα, η Ohio Trust θα πρέπει να εξασφαλίσει ειδική άδεια από την εποπτική αρχή της πολιτείας του Ohio ή να εξαγοράσει ένα υφιστάμενο κεντρικό κατάστημα άλλου οργανισμού

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (2)



Περιφέρειες

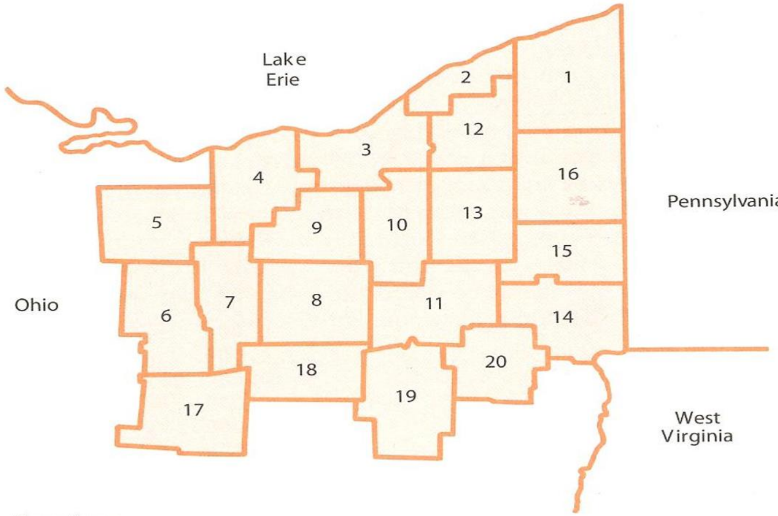
1. Ashtabula	6. Richland	11. Stark	16. Trumbull
2. Lake	7. Ashland	12. Geauga	17. Knox
3. Cuyahoga	8. Wayne	13. Portage	18. Holmes
4. Lorain	9. Medina	14. Columbiana	19. Tuscarawas
5. Huron	10. Summit	15. Mahoning	20. Carroll

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θεσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (3)

- Στον Πίνακα της επόμενης διαφάνειας παρουσιάζονται οι εξεταζόμενες 20 περιφέρειες και οι όμορες περιφέρειες
- Για παράδειγμα η περιφέρεια Ashtabula συνορεύει με τις περιφέρειες Lake, Geauga και Trumbull, η περιφέρεια Lake County με τις περιφέρειες Ashtabula, Cuyahoga και Geauga, κ.ο.κ.

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (4)

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (2)



Περιφέρειες

1. Ashtabula
2. Lake
3. Cuyahoga
4. Lorain
5. Huron
6. Richland
7. Ashland
8. Wayne
9. Medina
10. Summit
11. Stark
12. Geauga
13. Portage
14. Columbiana
15. Mahoning
16. Trumbull
17. Knox
18. Holmes
19. Tuscarawas
20. Carroll

Εξεταζόμενες περιφέρειες	Όμορες περιφέρειες (κατά αύξοντα αριθμό)
1. Ashtabula	2, 12, 16
2. Lake	1, 3, 12
3. Cuyahoga	2, 4, 9, 10, 12, 13
4. Lorain	3, 5, 7, 9
5. Huron	4, 6, 7
6. Richland	5, 7, 17
7. Ashland	4, 5, 6, 8, 9, 17, 18
8. Wayne	7, 9, 10, 11, 18
9. Medina	3, 4, 7, 8, 10
10. Summit	3, 8, 9, 11, 12, 13
11. Stark	8, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20
12. Geauga	1, 2, 3, 10, 13, 16
13. Portage	11, 15, 20
14. Columbiana	11, 15, 20
15. Mahoning	11, 13, 14, 16
16. Trumbull	1, 12, 13, 15
17. Knox	6, 7, 18
18. Holmes	7, 8, 11, 17, 19
19. Tuscarawas	11, 18, 20
20. Carroll	11, 14, 19

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θεσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (5)

- Η Ohio Trust επιθυμεί να δραστηριοποιηθεί στο σύνολο των 20 περιφερειών δημιουργώντας όσο το δυνατόν λιγότερα κεντρικά καταστήματα
- Οι μεταβλητές «0-1» που πρέπει να οριστούν είναι οι εξής:
  - $\mathbf{x_i}$ = 1 εάν εγκατασταθεί κεντρικό κατάστημα στην περιφέρεια ***i*** ή 0 εάν δεν εγκατασταθεί κεντρικό κατάστημα σε αυτή (i = 1,2,…,20)
- Η αντικειμενική συνάρτηση που ελαχιστοποιεί τον αριθμό των κεντρικών υποκαταστημάτων που θα απαιτηθούν είναι
  - **Min** $\mathbf{x_1 + x_2 + \ldots + x_{20}}$

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θεσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (6)

- Υποκατάστημα μπορούν να εγκατασταθούν σε μια περιφέρεια εάν αυτή διαθέτει κεντρικό κατάστημα ή εάν συνορεύει με περιφέρεια που διαθέτει κεντρικό κατάστημα
- Συνεπώς, απαιτείται η διατύπωση ενός περιορισμού για κάθε περιφέρεια
- Για παράδειγμα ο περιορισμός για την περιφέρεια Ashtabula θα είναι
  - $\mathbf{x_1 + x_2 + x_{12} + x_{16} \geq 1}$ **(Ashtabula)**
- Η ικανοποίηση του συγκεκριμένου περιορισμού εξασφαλίζει την εγκατάσταση ενός τουλάχιστον υποκαταστήματος στην περιφέρεια Ashtabula ή σε μία ή περισσότερες από τις όμορες προς αυτήν περιφέρειες

Δηλαδή εξασφαλίζει τη δυνατότητα εγκατάστασης υποκαταστημάτων στην περιφέρεια της Ashtabula


Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (4)

Εξεταζόμενες περιφέρειες	Όμορες περιφέρειες (κατά αύξοντα αριθμό)
1. Ashtabula	2, 12, 16
2. Lake	1, 3, 12
3. Cuyahoga	2, 4, 9, 10, 12, 13
4. Lorain	3, 5, 7, 9
5. Huron	4, 6, 7
6. Richland	5, 7, 17
7. Ashland	4, 5, 6, 8, 9, 17, 18
8. Wayne	7, 9, 10, 11, 18
9. Medina	3, 4, 7, 8, 10
10. Summit	3, 8, 9, 11, 12, 13
11. Stark	8, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20
12. Geauga	1, 2, 3, 10, 13, 16
13. Portage	11, 15, 20
14. Columbiana	11, 15, 20
15. Mahoning	11, 13, 14, 16
16. Trumbull	1, 12, 13, 15
17. Knox	6, 7, 18
18. Holmes	7, 8, 11, 17, 19
19. Tuscarawas	11, 18, 20
20. Carroll	11, 14, 19

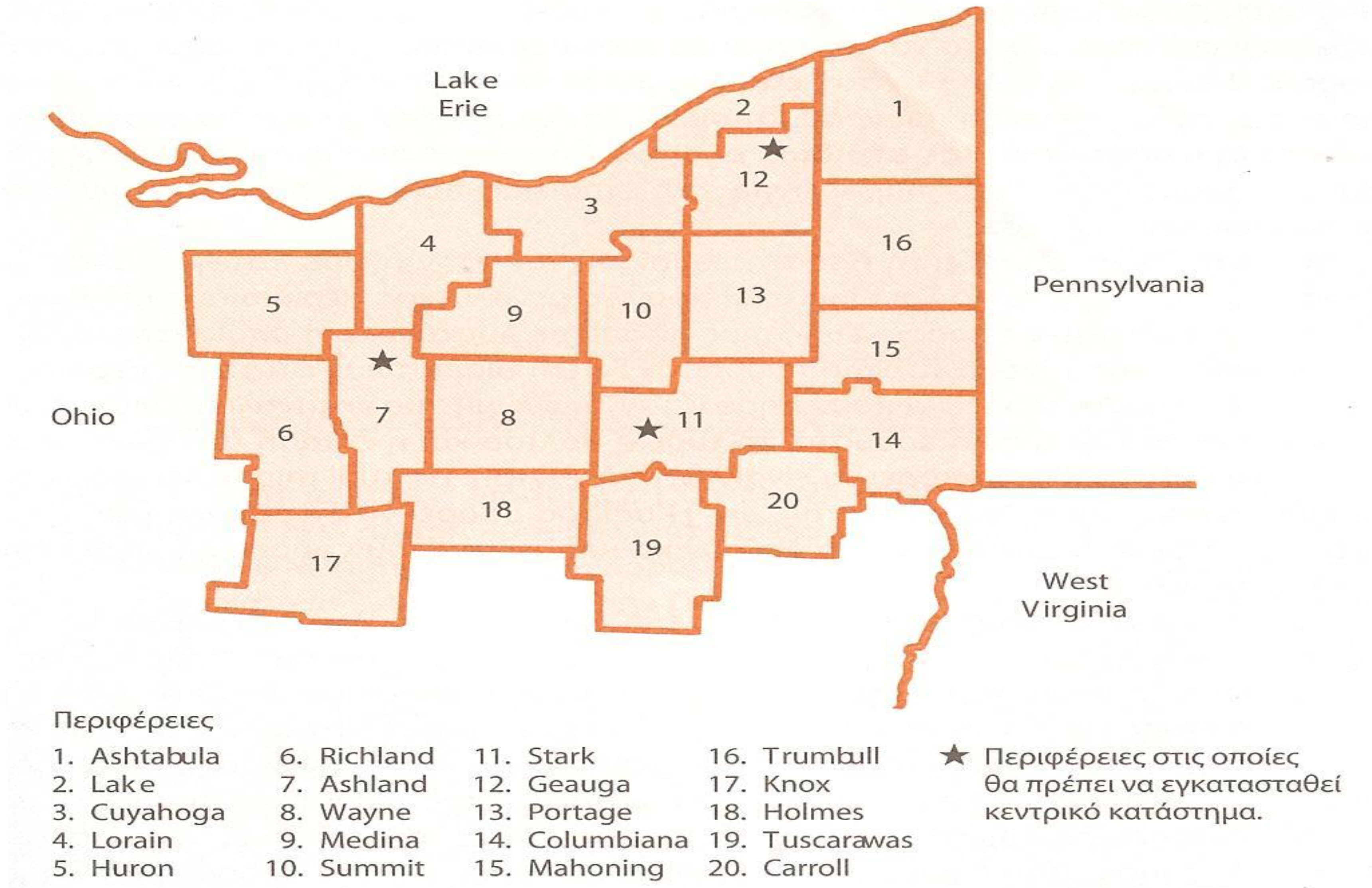
Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (2)

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (7)

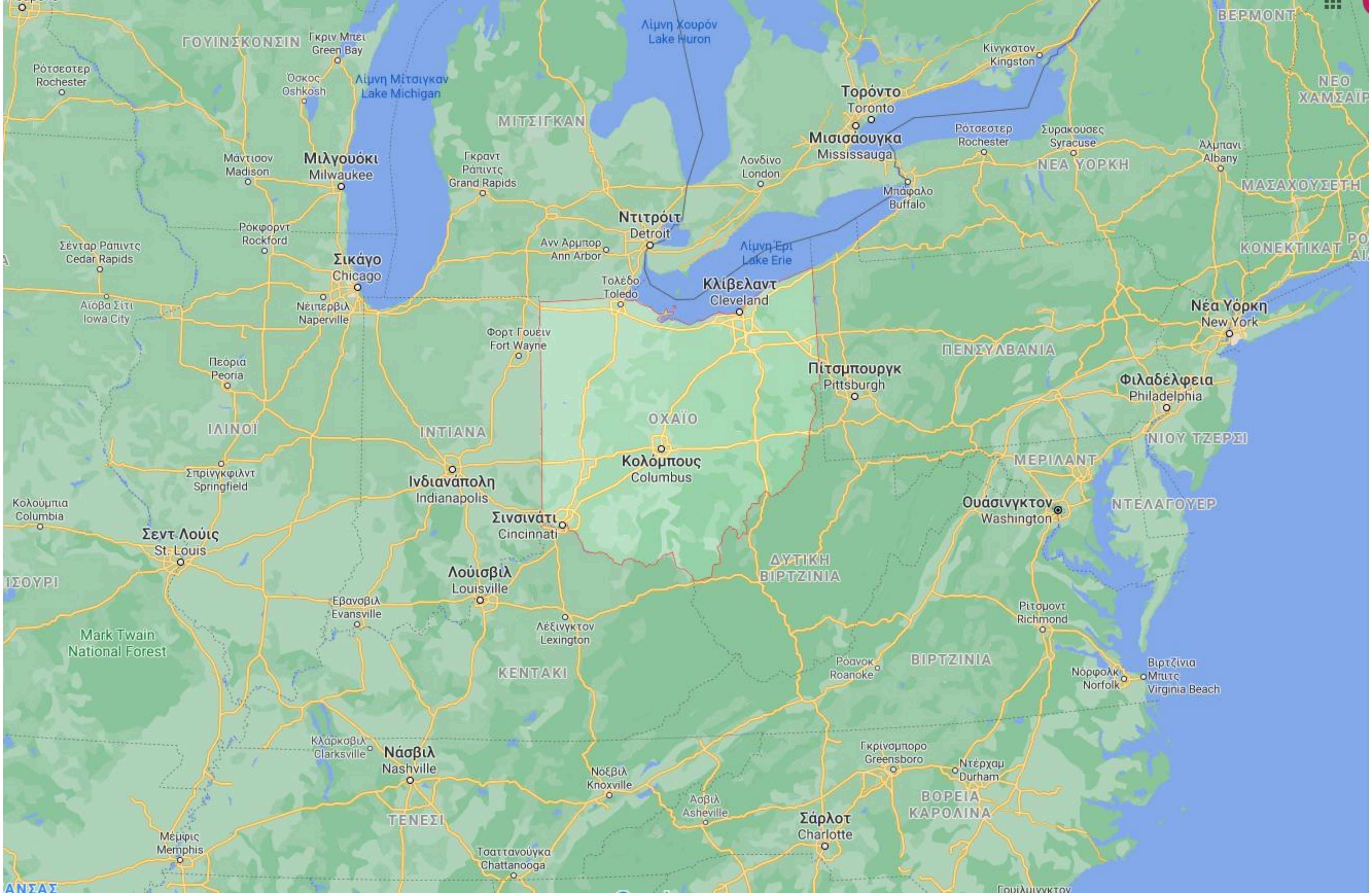
- Το ολοκληρωμένο μοντέλο για το **πρόβλημα επιλογής θέσης τραπεζικών καταστημάτων** είναι:
  - **Min** $x_1 + x_2 + \ldots + x_{20}$
  - **subject to**
  - $x_1 + x_2 + x_{12} + x_{16} \geq 1$ **(Ashtabula)**
  - $x_1 + x_2 + x_3 + x_{12} \geq 1$ **(Lake)**
  - .
  - .
  - .
  - $x_{11} + x_{14} + x_{19} + x_{20} \geq 1$ **(Carroll)**
  - $x_i = 0$ **ή** 1 **για** $i = 1,2,\ldots,20$

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (8)

- Περιφέρειες εγκατάστασης κεντρικών καταστημάτων της Ohio Trust



Backup



ΓΟΥΙΝΣΚΟΝΣΙΝ
Γκριν Μπέι
Green Bay
Ρότσεστερ
Rochester
Όσκος
Oshkosh
Λίμνη Μίτσιγκαν
Lake Michigan
Λίμνη Χουρόν
Lake Huron
ΜΙΤΣΙΓΚΑΝ
Κίνγκστον
Kingston
ΒΕΡΜΟΝΤ
ΝΕΟ
ΧΑΜΣΑΪΡ
Τορόντο
Toronto
Μισισάουγκα
Mississauga
Ρότσεστερ
Rochester
Συρακούσες
Syracuse
Άλμπανι
Albany
ΝΕΑ ΥΟΡΚΗ
ΜΑΣΑΧΟΥΣΕΤΗ
Μάντισον
Madison
Μιλγουόκι
Milwaukee
Γκραντ
Ράπιντς
Grand Rapids
Λονδίνο
London
Μπάφαλο
Buffalo
Ρόκφορντ
Rockford
Ντιτρόιτ
Detroit
Σένταρ Ράπιντς
Cedar Rapids
Αν Άρμπορ
Ann Arbor
Σικάγο
Chicago
Λίμνη Έρι
Lake Erie
ΚΟΝΕΚΤΙΚΑΤ
Τολέδο
Toledo
Κλίβελαντ
Cleveland
Αϊόβα Σίτι
Iowa City
Νέιπερβιλ
Naperville
Νέα Υόρκη
New York
Φορτ Γουέιν
Fort Wayne
ΠΕΝΣΥΛΒΑΝΙΑ
Πεόρια
Peoria
Πίτσμπουργκ
Pittsburgh
Φιλαδέλφεια
Philadelphia
ΟΧΑΪΟ
ΙΛΙΝΟΪ
ΙΝΤΙΑΝΑ
ΝΙΟΥ ΤΖΕΡΣΙ
ΜΕΡΙΛΑΝΤ
Σπρίνγκφιλντ
Springfield
Κολόμπους
Columbus
Ινδιανάπολη
Indianapolis
Ουάσινγκτον
Washington
ΝΤΕΛΑΓΟΥΕΡ
Κολούμπια
Columbia
Σινσινάτι
Cincinnati
Σεντ Λούις
St. Louis
ΔΥΤΙΚΗ
ΒΙΡΤΖΙΝΙΑ
ΙΣΟΥΡΙ
Λούισβιλ
Louisville
Εβανσβιλ
Evansville
Ρίτσμοντ
Richmond
Λέξινγκτον
Lexington
Mark Twain
National Forest
Ρόανοκ
Roanoke
ΒΙΡΤΖΙΝΙΑ
ΚΕΝΤΑΚΙ
Νόρφολκ
Norfolk
Βιρτζίνια
Μπιτς
Virginia Beach
Κλάρκσβιλ
Clarksville
Νάσβιλ
Nashville
Γκρίνσμπορο
Greensboro
Ντέρχαμ
Durham
Νόξβιλ
Knoxville
Άσβιλ
Asheville
ΒΟΡΕΙΑ
ΚΑΡΟΛΙΝΑ
ΤΕΝΕΣΙ
Σάρλοτ
Charlotte
Μέμφις
Memphis
Τσαττανούγκα
Chattanooga
ΑΝΣΑΣ