Στατιστική Ι

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων,

Πανεπιστήμιο Πατρών

Ακαδημαϊκό έτος: 2022-2023

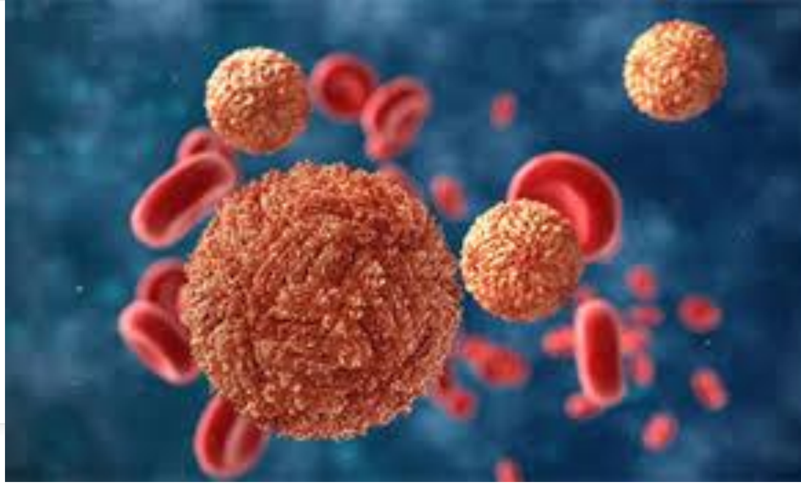
Διάλεξη 3η

4.1 έως 4.3

Γιατί δεσμευμένη πιθανότητα

- Προκύπτει από την ερμηνεία της πιθανότητας ως μέτρο του βαθμού βεβαιότητας ενός ενδεχομένου. Είναι **δυνατό να αναθεωρηθεί και να προσαρμοσθεί κατάλληλα**, αν σε κάποιο στάδιο του τυχαίου πειράματος προκύψουν πρόσθετες πληροφορίες για την έκβασή του.
- Μια τέτοια πληροφορία μπορεί να είναι ότι κάποιο άλλο ενδεχόμενο έχει συμβεί.

Παράδειγμα



- Ποσοστό φορέων του ιού: 0.75%
- Αν κάποιος υποβληθεί σε τεστ για τον ιό:
  - Μετά την ανακοίνωση του αποτελέσματος η πιθανότητα μεταβάλλεται γιατί το τεστ δεν είναι αλάνθαστο
    - Αν το άτομο είναι πράγματι φορέας του ιού, τότε το τέστ κάνει διάγνωση με 91% ακρίβεια
    - Αν το άτομο δεν είναι φορέας του ιού, τότε το τέστ κάνει διάγνωση με 96% ακρίβεια

Παράδειγμα (συν.)

- Ενδεχόμενα:
  - B: ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
  - Θ: το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό
- Πιθανότητες από τα δεδομένα:
  - $P(B)=0.0075$
- Πως η πιθανότητα αλλάζει όταν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του τεστ για έναν κάτοικο;

Παράδειγμα (συν.)

- **Ερώτηση:** ποια είναι η πιθανότητα ο συγκεκριμένος κάτοικος να είναι φορέας (ενδεχόμενο Β), αν έχει πάρει τα αποτελέσματα του τέστ (δηλ. το ενδεχόμενο Θ έχει συμβεί);
- Αν το τέστ ήταν «τέλειο/ιδανικό» η πιθανότητα θα ήταν προφανώς 1.
- Για τα μη-τελεια τεστ: ζητάμε να υπολογίσουμε την **δεσμευμένη πιθανότητα** του Β (conditional probability) δοθέντος του Θ και συμβολίζεται $P(B|\Theta)$
- Τι εννοούμε όταν γράφουμε $P(B|\Theta')$

Παράδειγμα (συν.)

- Η πιθανότητα P(B) είναι εκείνη που γνωρίζουμε πριν μάθουμε το αποτέλεσμα του τεστ και καλείται εκ των προτέρων πιθανότητα (a priori probability)
- Η πιθανότητα P(B|Θ) είναι εκείνη που προσαρμόζουμε εφόσον μάθουμε το αποτέλεσμα του τεστ και καλείται εκ των υστέρων πιθανότητα (posterior probability)

Παράδειγμα (συν.)

$P(\Theta|B)=0.91$

$P(\Theta'|B')=0.96$

Ενδιαφέρον να υπολογίσουμε

$P(B|\Theta)$, $P(B|\Theta')$ και $P(\Theta)$

Παράδειγμα

- 7 κουτιά ενός σκευάσματος σε συρτάρι φαρμακείου
- 3 κουτιά έχουν λήξει
- Πείραμα τύχης: επιλογή ενός κουτιού του σκευάσματος και κατόπιν επιλογή ενός νέου κουτιού για τον πελάτη1 και πελάτη2 αντίστοιχα.
- Ερώτηση: ποια η πιθανότητα ο πελάτης2 να λάβει ληγμένο κουτί;

Παράδειγμα (συν.)

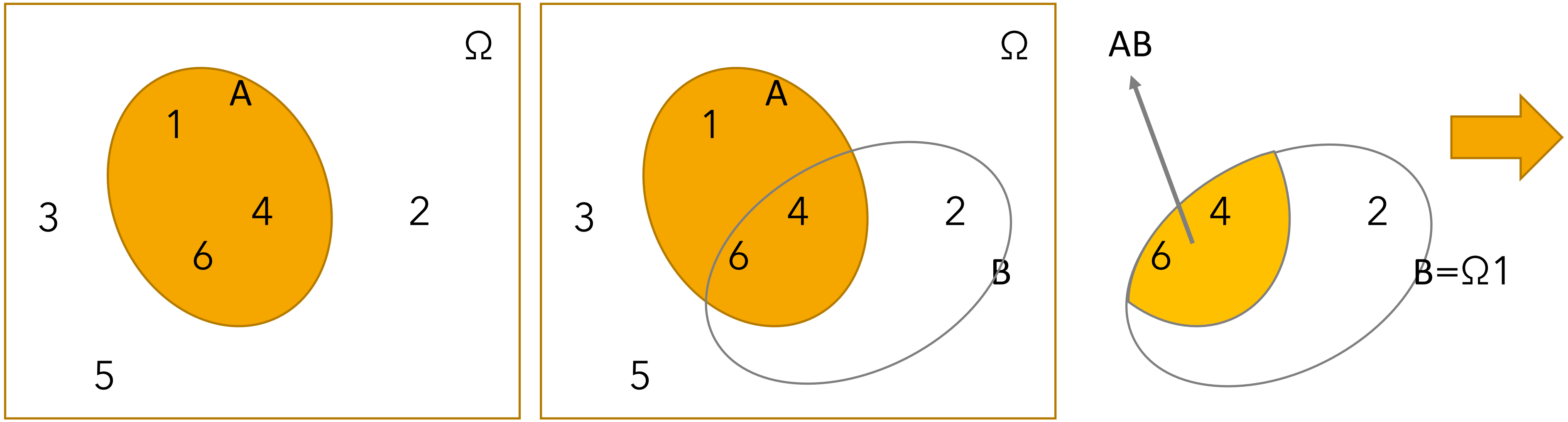
- Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
  - Λ1: ο πελάτης1 λαμβάνει ληγμένο κουτί
  - Λ2: ο πελατης2 λαμβάνει ληγμένο κουτί
- $P(Λ1)=3/7$ και $P(Λ1')=1-3/7=4/7$
- Για τον δεύτερο πελάτη υπάρχουν δύο δυνατότητες:
  - Να έχει λάβει ο πελάτης1 ληγμένο κουτί, οπότε εναπομένουν 2 ληγμένα: $P(Λ2|Λ1)=2/6$
  - Να έχει λάβει ο πελάτης1 μη-ληγμένο κουτί, οπότε εναπομένουν 3 ληγμένα: $P(Λ2|Λ1')=3/6$
- Ερώτηση: ποια η πιθανότητα ο πελάτης2 να λάβει ληγμένο κουτί;

Παράδειγμα

- Έστω ότι κερδίζουμε με τα αποτελέσματα: 1, 4, 6
- Ρίχνουμε το ζάρι, και μας ανακοινώνεται ότι ήρθε ζυγός αριθμός
- Ερώτηση: Ποια είναι πιθανότητα να είμαστε νικητές;

Παράδειγμα (συν.)

- Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: A={1,4,6} και B={2,4,6}
- Θέλουμε να υπολογίσουμε το P(A|B)



$$\frac{N(AB)}{N(\Omega 1)} = \frac{2}{3} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{\mathrm{N(AB)/N(\Omega)}}{\mathrm{N(B)/N(\Omega)}} = \frac{\mathrm{P(AB)}}{P(B)}$$

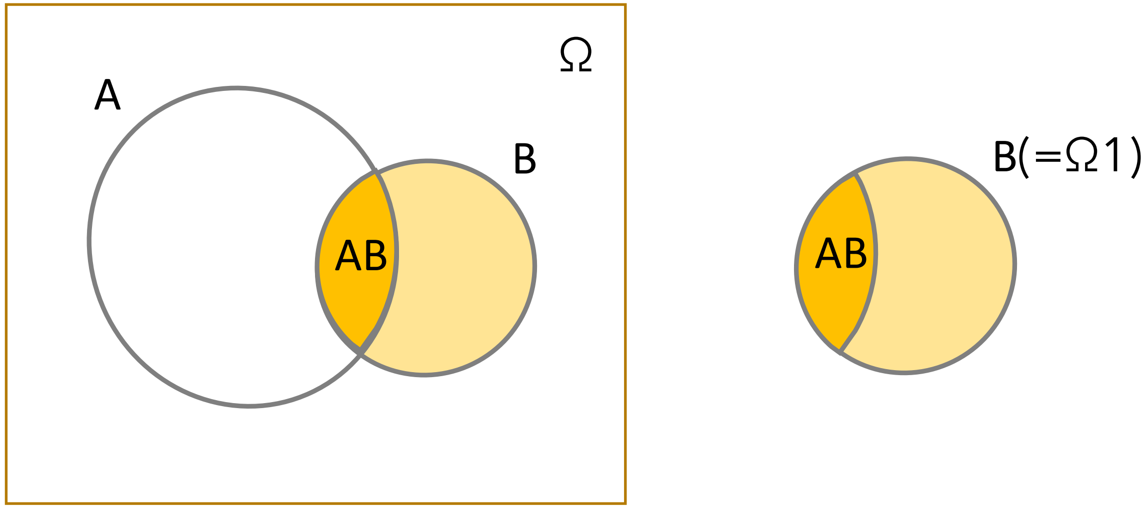
Δεσμευμένη πιθανότητα (ορισμός)

- Έστω ενδεχόμενα A και B του ΔΧ Ω, και P(B)>0, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B (conditional probability) ισούται με

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Εναλλακτικός συμβολισμός: $\mathrm{P}_B(A)$

Σχηματική αναπαράσταση

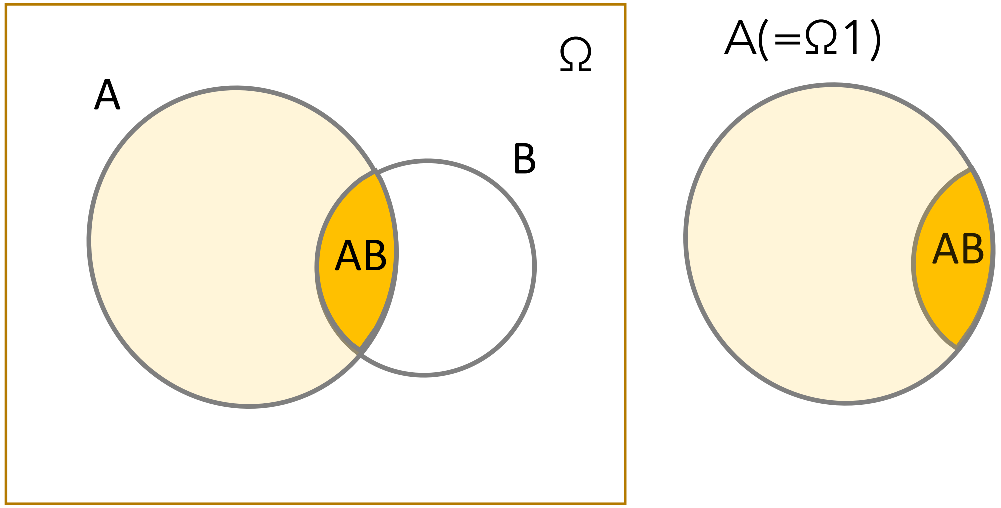


posterior probability

$$\boxed{P(A|B)} = \frac{P(AB)}{\boxed{P(B)}}$$

prior probability

Σχηματική αναπαράσταση



posterior probability

$$\boxed{P(B|A)} = \frac{P(AB)}{\boxed{P(A)}}$$

prior probability

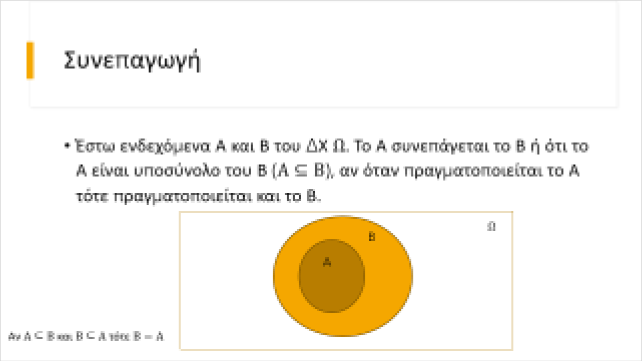
Ιδιότητες

Έστω A,B ενδεχόμενα του ΔΧ Ω με $P(A)>0$ και $P(B)>0$

- Αν $P(A|B)>P(A)$ τότε $P(B|A)>P(B)$
  - Η εμφάνιση του ενδεχομένου B αυξάνει την πιθανότητα εμφάνισης του A και αντίστροφα (θετικά σχετιζόμενα)
- Αν $P(A|B)<P(A)$ τότε $P(B|A)<P(B)$
  - Η εμφάνιση του ενδεχομένου B μειώνει την πιθανότητα εμφάνισης του A και αντίστροφα (αρνητικά σχετιζόμενα)

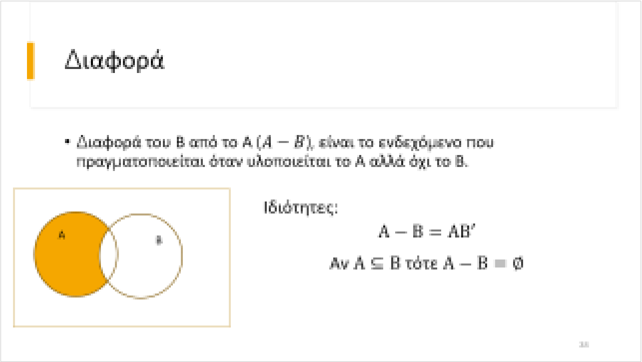
Ιδιότητες

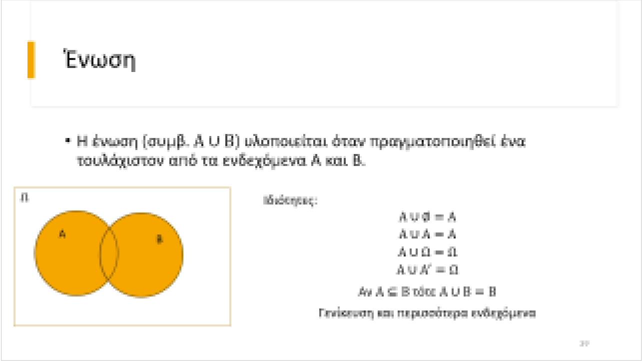
- Έστω A,B ξένα ενδεχόμενα του ΔΧ Ω με P(A)>0 και P(B)>0 τότε P(A|B)=0 και P(B|A)=0
- Έστω A,B ενδεχόμενα του ΔΧ Ω με $B \subseteq A$ τότε P(A|B)=1



Ιδιότητες

- Έστω B ενδεχόμενο του ΔΧ Ω με P(B)>0, τότε:
  - P(∅|B)=0
  - P(A′|B)=1- P(A|B)
  - P(A-Γ|B)= P(AΓ′|B)=P(A|B)-P(AΓ|B)
  - Αν $\Gamma \subseteq A$, τότε P(Γ|B)≤ P(A|B)
  - P($A \cup \Gamma$|B)= P(A|B)+ P(Γ|B)- P(AΓ|B)



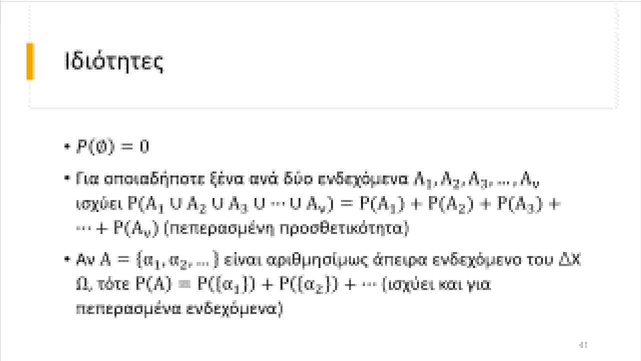


Παράδειγμα

- Έστω ενδεχόμενα A,B του ΔΧ Ω με:
  - πιθανότητα εμφάνισης του A αλλά όχι του B να είναι 0.15
  - πιθανότητα εμφάνισης του B αλλά όχι το A είναι 0.1
  - πιθανότητα να μην εμφανισθεί το A ούτε το B είναι 0.7
- Ποια η πιθανότητα να συμβεί το A όταν έχει συμβεί το B;

Παράδειγμα (συν.)

- Δίνονται P(AB′)=0.15, P(A′B)=0.1 και P((A ∪ B)′)=0.7



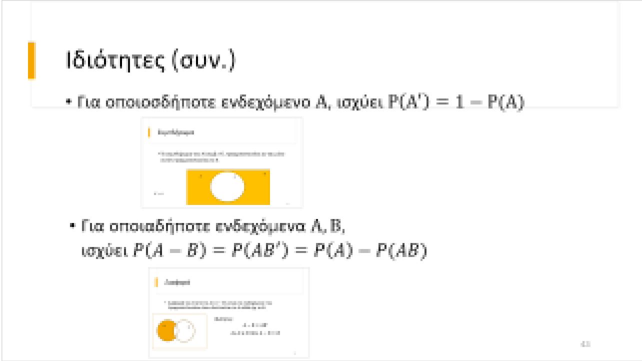
$$P(A \cup B) = P(AB') + P(AB) + P(BA')$$

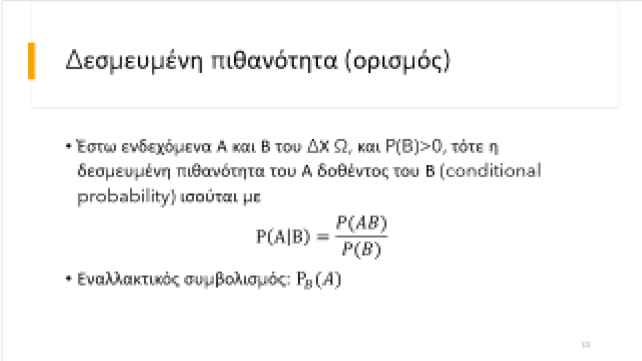
$$1 - 0.7 = 0.15 + P(AB) + 0.1 \rightarrow P(AB) = 0.05$$

$$B = BA \cup BA'$$

$$P(B) = P(BA) + P(BA') \rightarrow P(B) = 0.05 + 0.1 = 0.15$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.05}{0.15} = 1/3$$



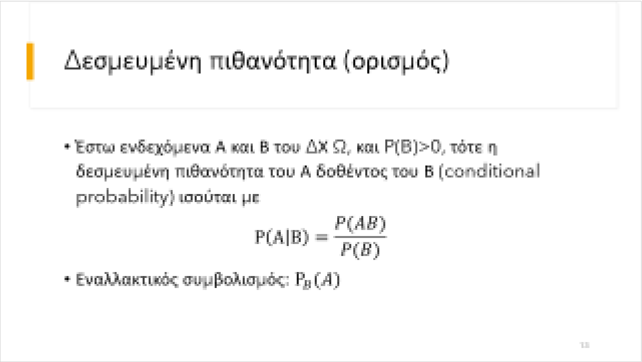


Ιδιότητες

- Έστω Β ενδεχόμενο του ΔΧ Ω με P(B)>0. Ισχύουν τα ακόλουθα:
  - P(A|B)≥0, για κάθε ενδεχόμενο A του Ω
  - P(Ω|B)=1
  - $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu \cup \cdots |\mathrm{B}) = P(A_1|\mathrm{B}) + P(A_2|\mathrm{B}) + \cdots + P(A_\nu|\mathrm{B}) + \cdots$ για οποιαδήποτε ακολουθία $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω.

Πολλαπλασιαστικός τύπος

- Έστω ενδεχόμενα A και B του ΔΧ Ω, και P(B)>0, τότε ισχύει:
  - $P(AB)=P(B)*P(A|B)$
- Έστω ενδεχόμενα A και B του ΔΧ Ω, και P(A)>0, τότε ισχύει:
  - $P(AB)=P(A)*P(B|A)$

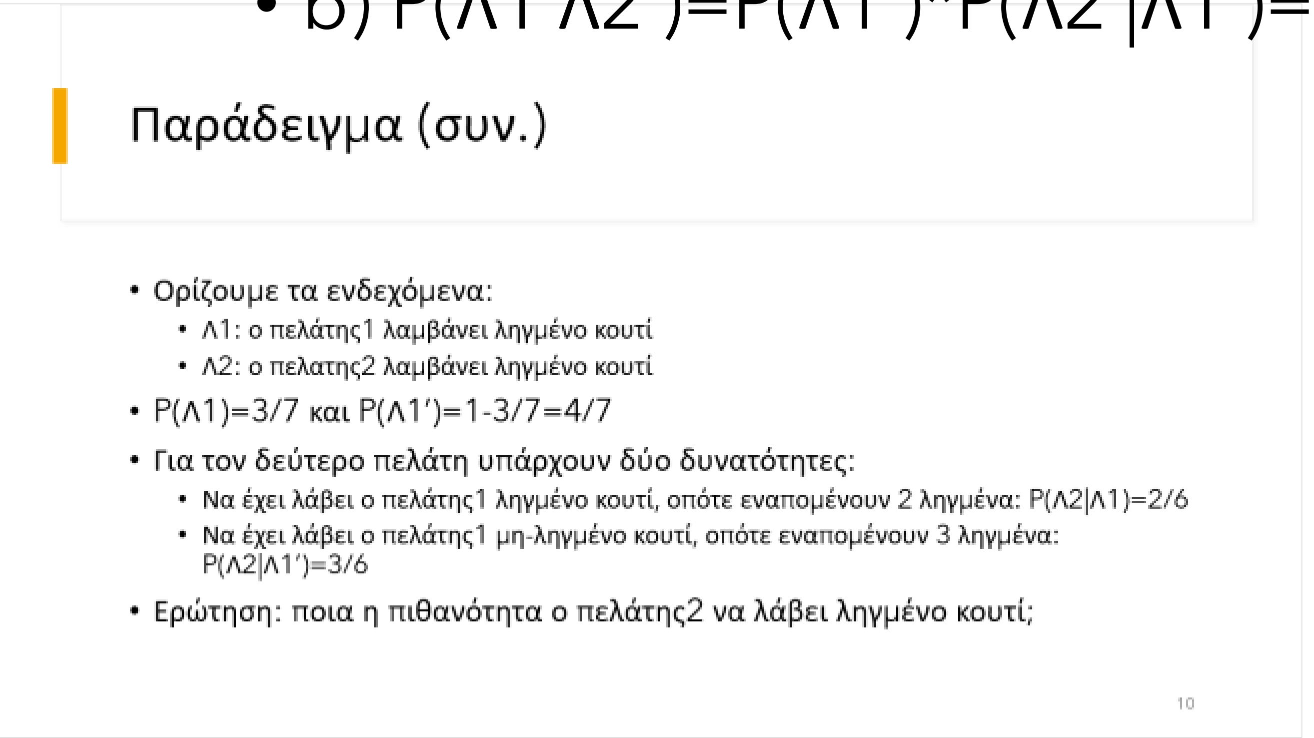


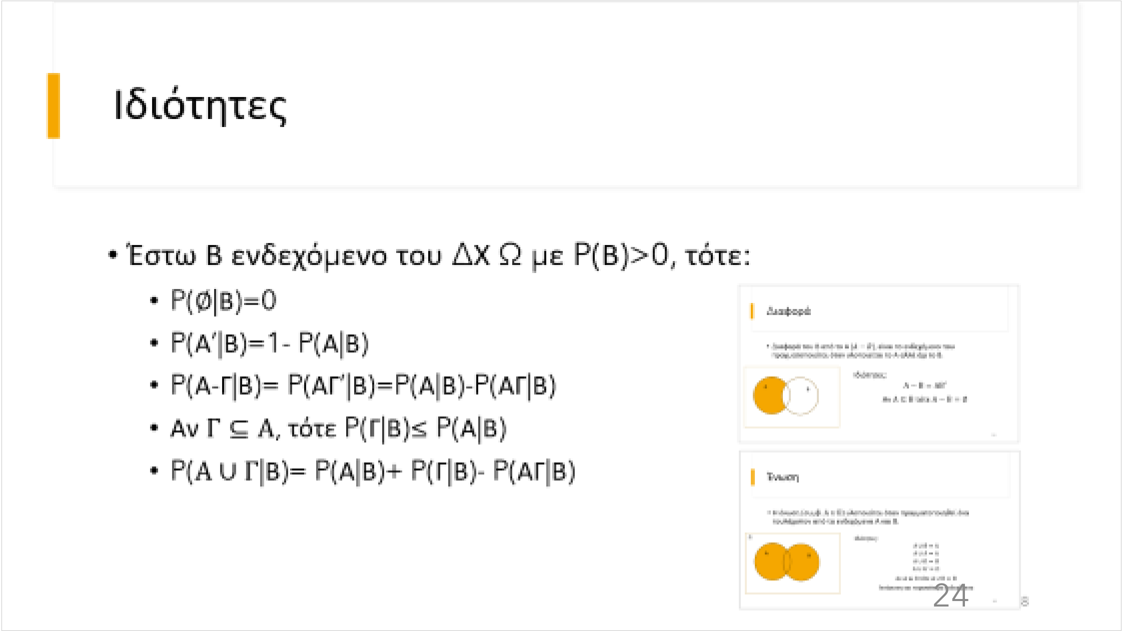
Παράδειγμα (συν.)

- 7 κουτιά ενός σκευάσματος σε συρτάρι φαρμακείου
- 3 κουτιά έχουν λήξει
- Πείραμα τύχης: επιλογή ενός κουτιού του σκευάσματος και κατόπιν επιλογή ενός νέου κουτιού για τον πελάτη1 και πελάτη2 αντίστοιχα.
- Ερωτήσεις: να υπολογισθεί η πιθανότητα
  a) Να δοθούν και στους 2 πελάτες ληγμένα κουτιά
  b) Να δοθούν και στους 2 πελάτες μη-ληγμένα κουτιά
  c) Στον πελάτη1 να δοθεί κουτί ληγμένο και στον πελάτη2 μη-ληγμένο
  d) Στον πελάτη1 να δοθεί κουτί μη-ληγμένο και στον πελάτη2 ληγμένο

Παράδειγμα (συν.)

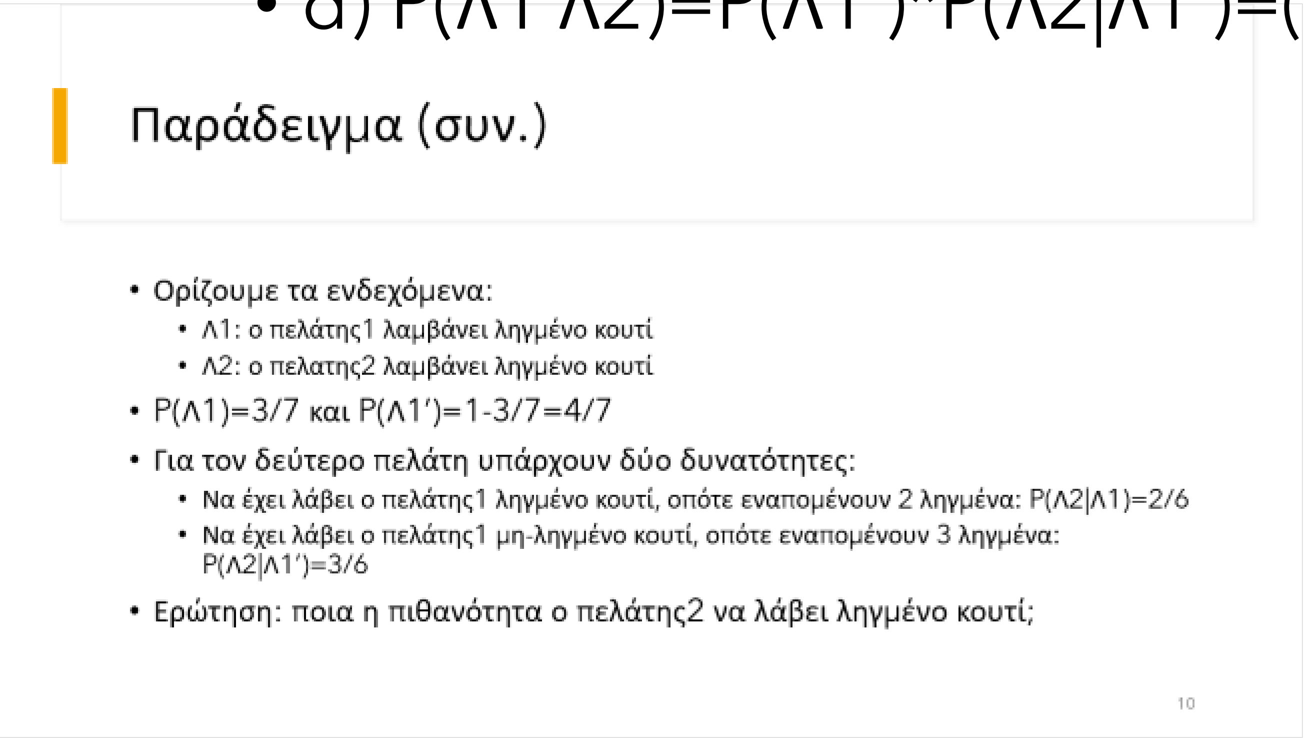
- a) $P(\Lambda 1 \Lambda 2)=P(\Lambda 1)*P(\Lambda 2|\Lambda 1)=(3/7)*(2/6)=1/7$
- b) $P(\Lambda 1'\Lambda 2')=P(\Lambda 1')*P(\Lambda 2'|\Lambda 1')=(4/7)*(1-P(\Lambda 2|\Lambda 1'))=(4/7)*(3/6)=2/7$





Παράδειγμα (συν.)

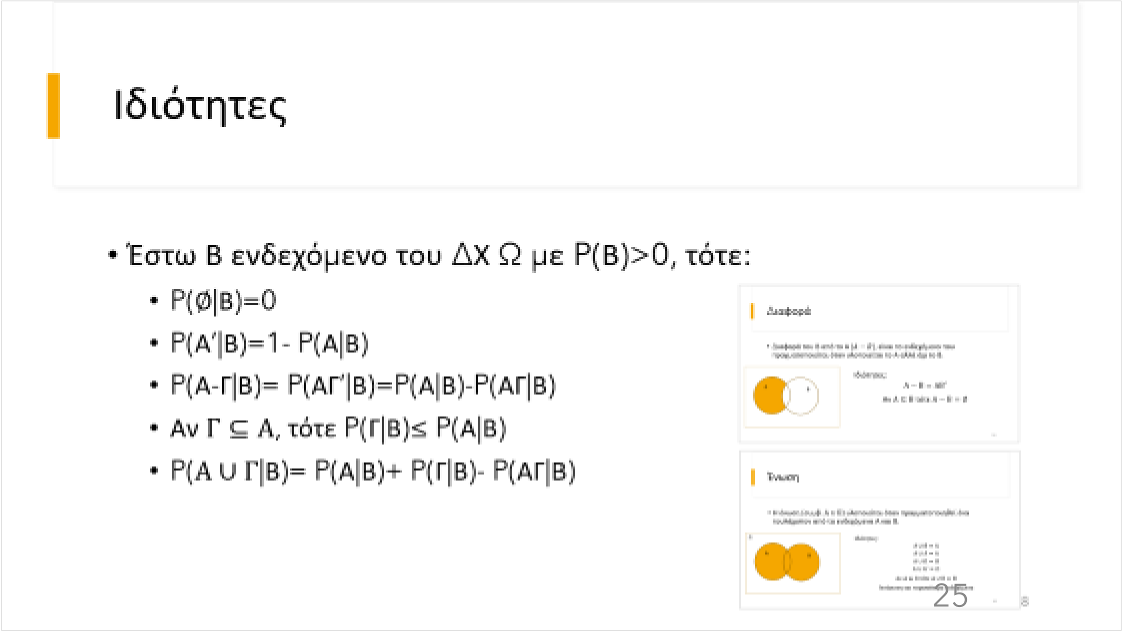
- c) $P(Λ1Λ2')=P(Λ1)*P(Λ2'|Λ1)=(3/7)*(1-P(Λ2|Λ1))=(3/7)*(1-2/6)=2/7$
- d) $P(Λ1'Λ2)=P(Λ1')*P(Λ2|Λ1')=(4/7)*(3/6)=2/7$



Παράδειγμα (συν.)

- Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
  - Λ1: ο πελάτης1 λαμβάνει ληγμένο κουτί
  - Λ2: ο πελατης2 λαμβάνει ληγμένο κουτί
- $P(Λ1)=3/7$ και $P(Λ1')=1-3/7=4/7$
- Για τον δεύτερο πελάτη υπάρχουν δύο δυνατότητες:
  - Να έχει λάβει ο πελάτης1 ληγμένο κουτί, οπότε εναπομένουν 2 ληγμένα: $P(Λ2|Λ1)=2/6$
  - Να έχει λάβει ο πελάτης1 μη-ληγμένο κουτί, οπότε εναπομένουν 3 ληγμένα: $P(Λ2|Λ1')=3/6$
- Ερώτηση: ποια η πιθανότητα ο πελάτης2 να λάβει ληγμένο κουτί;

10

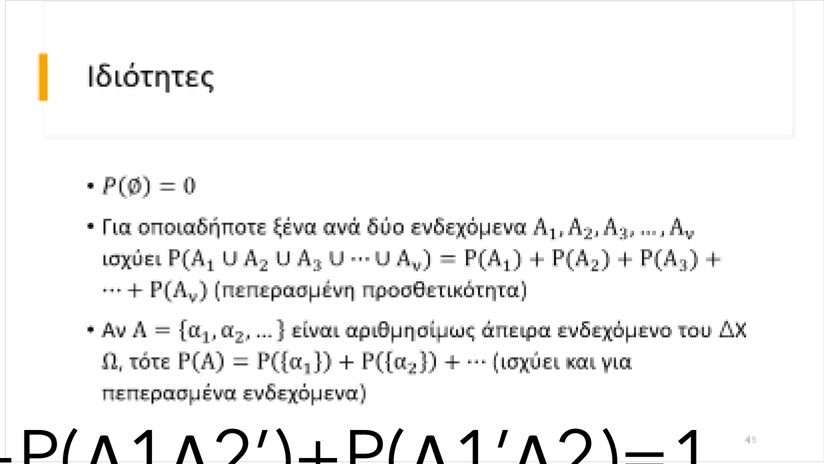


Ιδιότητες

- Έστω Β ενδεχόμενο του ΔΧ Ω με $P(B)>0$, τότε:
  - $P(\emptyset|B)=0$
  - $P(A'|B)=1-P(A|B)$
  - $P(A-Γ|B)=P(AΓ'|B)=P(A|B)-P(AΓ|B)$
  - Αν $Γ \subseteq A$, τότε $P(Γ|B)\leq P(A|B)$
  - $P(A \cup Γ|B)=P(A|B)+P(Γ|B)-P(AΓ|B)$

Παράδειγμα (συν.)

- Τα ενδεχόμενα Λ1Λ2, Λ1′Λ2′, Λ1Λ2′ και Λ1′Λ2 είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, οπότε



Ιδιότητες

- $P(\emptyset) = 0$
- Για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\nu$ ισχύει $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_\nu)$ (πεπερασμένη προσθετικότητα)
- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ είναι αριθμησίμως άπειρα ενδεχόμενο του ΔΧ Ω, τότε $P(A) = P(\{\alpha_1\}) + P(\{\alpha_2\}) + \cdots$ (ισχύει και για πεπερασμένα ενδεχόμενα)

P(Λ1Λ2)+P(Λ1′Λ2′)+P(Λ1Λ2′)+P(Λ1′Λ2)=1

Αναμενόμενο γιατί καλύπτουν όλο τον ΔΧ.

Πολλαπλασιαστικός νόμος

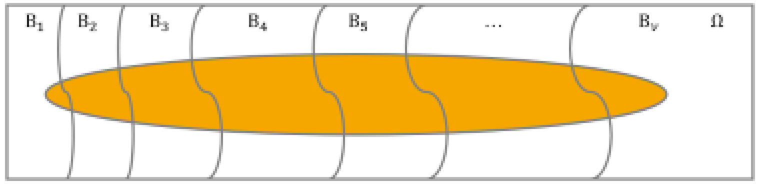
- Έστω ν $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ ενδεχόμενα του ΔΧ Ω με $\mathrm{P}(A_1A_2 \ldots A_{\nu-1}) > 0$

τότε $\mathrm{P}(A_1A_2 \ldots A_\nu) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1A_2) \ldots \mathrm{P}(A_\nu|A_1A_2 \ldots A_{\nu-1})$

Θεώρημα της ολικής πιθανότητας (βασική ιδέα)

Διαμέριση ενδεχομένου

- Έστω $B_1 B_2 \dots B_\nu$ διαμέριση και A οποιοδήποτε ενδεχόμενο του ΔΧ Ω, τότε τα ενδεχόμενα $AB_1, AB_2, \dots AB_\nu$ είναι επίσης διαμέριση.



- Πρακτική σημασία: όταν υλοποιείται το A, τότε πραγματοποιείται σε συνδυασμό μόνο με ένα από τα $B_1, B_2, \dots B_\nu$

44

$$P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_\nu)$$

Ιδιότητες

- $P(\emptyset) = 0$
- Για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\nu$ ισχύει $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_\nu)$ (πεπερασμένη προσθετικότητα)
- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ είναι αριθμησίμως άπειρα ενδεχόμενο του ΔΧ Ω, τότε $P(A) = P(\{\alpha_1\}) + P(\{\alpha_2\}) + \cdots$ (ισχύει και για πεπερασμένα ενδεχόμενα)

41

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_\nu)$$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_\nu)P(B_\nu)$$

Θεώρημα της ολικής πιθανότητας

- Έστω $\mathrm{B}_1 \mathrm{B}_2 \ldots \mathrm{B}_\nu$ διαμέριση του ΔΧ Ω ενός πειράματος τύχης με $P(\mathrm{B}_i) > 0$ για κάθε $i = 1 \ldots \nu$, τότε για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει ότι: $P(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{P}(\mathrm{AB}_i) = \sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_i)\, \mathrm{P}(\mathrm{B}_i)$

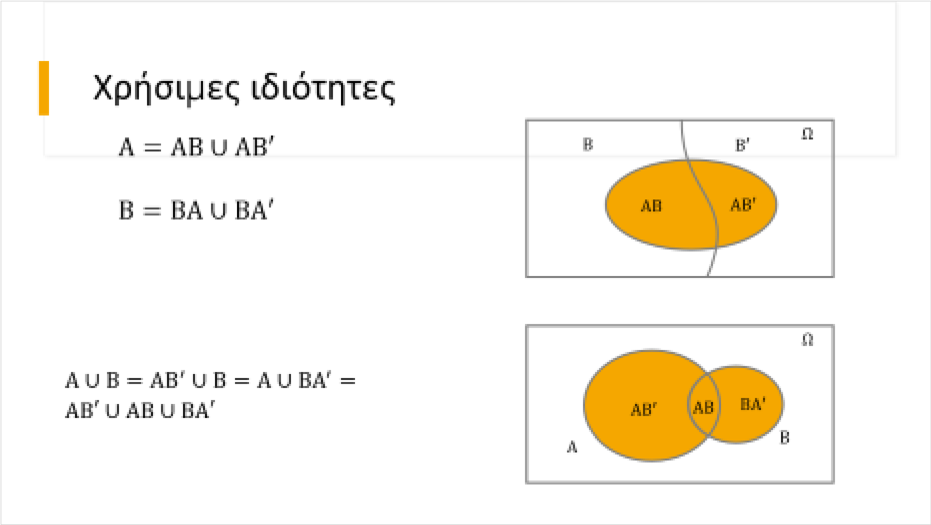
Θεώρημα της ολικής πιθανότητας (ερμηνεία)

- Με τον τύπο $P(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_i)\,\mathrm{P}(\mathrm{B}_i)$ η μη δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου A, εκφράζεται ως ο **σταθμισμένος μέσος όρος των επιμέρους δεσμευμένων πιθανοτήτων** $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_i)$ (με συντελεστές στάθμισης την αντίστοιχη πιθανότητα της διαμέρισης)

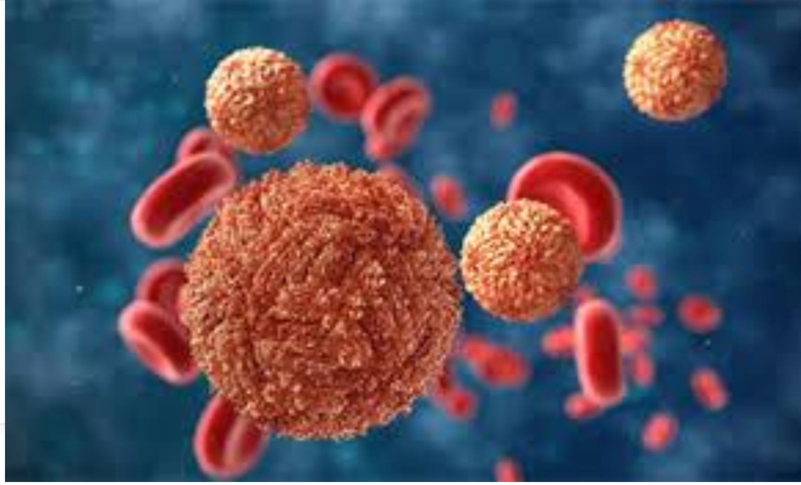
Χρήσιμη ειδική περίπτωση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας

- Έστω ενδεχόμενα A, B του ΔΧ Ω με P(B)>0
- Τα ενδεχόμενα B και B′ αποτελούν διαμέριση του Ω γιατί $B \cup B' = \Omega$ και $B \cap B' = \emptyset$
- Επομένως ισχύει:

$$P(A) = P(A|B)P(B) - P(A|B')P(B')$$



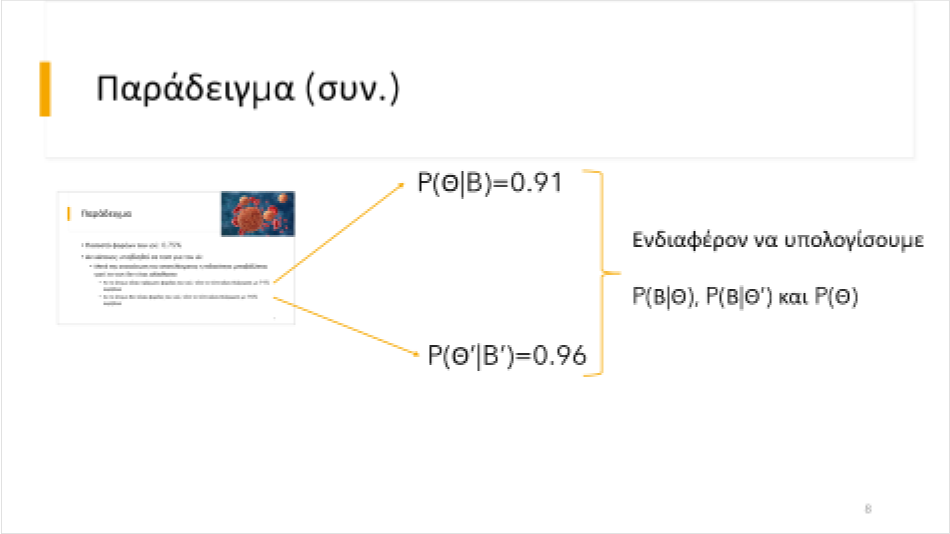
Παράδειγμα (συν)



- Ποσοστό φορέων του ιού: 0.75%
- Αν κάποιος υποβληθεί σε τεστ για τον ιό:
  - Μετά την ανακοίνωση του αποτελέσματος η πιθανότητα μεταβάλλεται γιατί το τεστ δεν είναι αλάνθαστο
    - Αν το άτομο είναι πράγματι φορέας του ιού, τότε το τέστ κάνει διάγνωση με 91% ακρίβεια
    - Αν το άτομο δεν είναι φορέας του ιού, τότε το τέστ κάνει διάγνωση με 96% ακρίβεια
- Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος να υποβληθεί στο τεστ και να «βγει» θετικό;

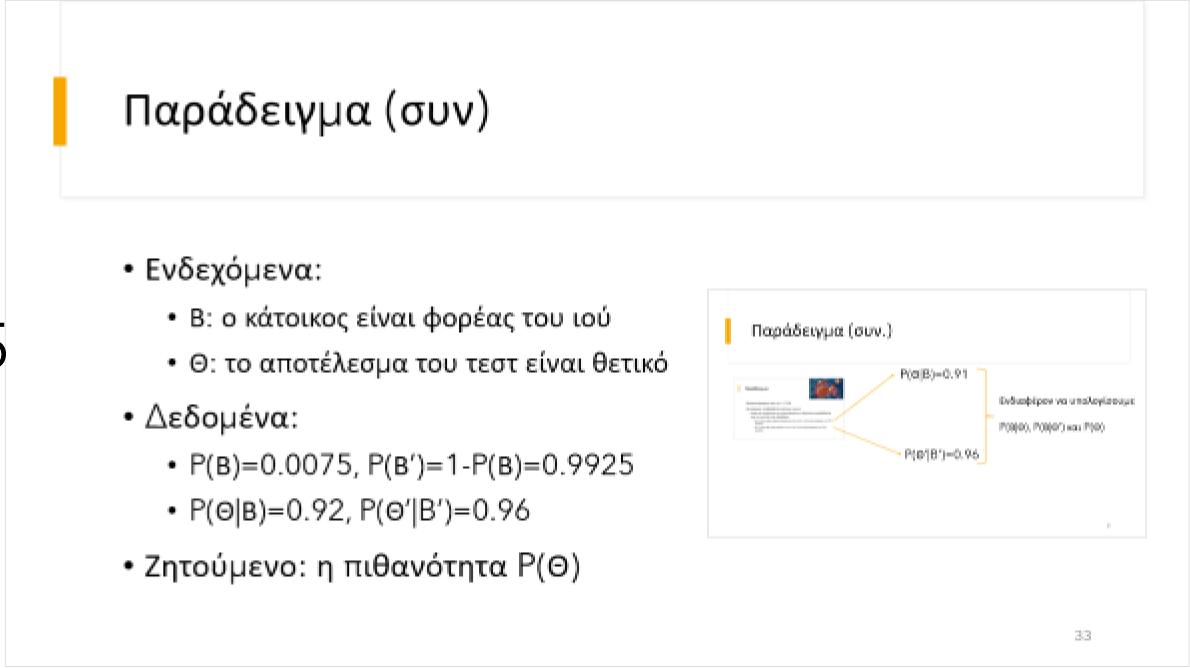
Παράδειγμα (συν)

- Ενδεχόμενα:
  - Β: ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
  - Θ: το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό
- Δεδομένα:
  - $P(B)=0.0075$, $P(B')=1-P(B)=0.9925$
  - $P(\Theta|B)=0.92$, $P(\Theta'|B')=0.96$
- Ζητούμενο: η πιθανότητα $P(\Theta)$



Παράδειγμα (συν.)

- Θεωρούμε την διαμέριση του ΔΧ Ω βάσει των B, B′.
  - Προφανώς είναι διαμέριση γιατί $B \cup B' = \Omega$ και $B \cap B' = \emptyset$
- Από το θεώρημα της ολική πιθανότητας έχουμε:
  - $P(\Theta) = \underbrace{P(\Theta|B)}_{0.92}\ \underbrace{P(B)}_{0.0075} + \underbrace{P(\Theta|B')}_{?}\ \underbrace{P(B')}_{0.9925}$

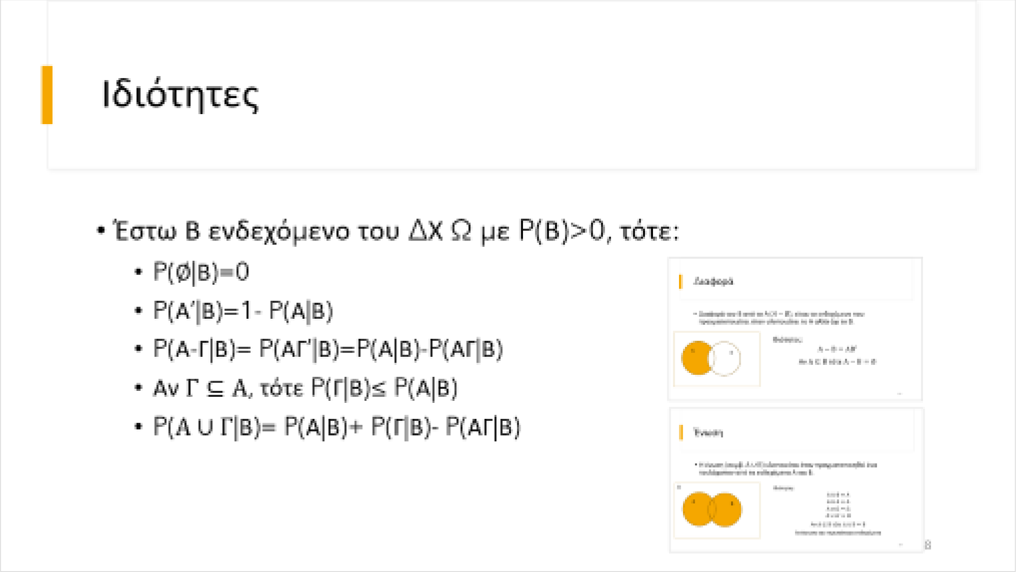

Παράδειγμα (συν)

- Ενδεχόμενα:
  - Β: ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
  - Θ: το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό
- Δεδομένα:
  - P(B)=0.0075, P(B′)=1-P(B)=0.9925
  - P(Θ|B)=0.92, P(Θ′|B′)=0.96
- Ζητούμενο: η πιθανότητα P(Θ)

33

Παράδειγμα (συν.)

- $P(\Theta|B')=1-P(\Theta'|B')=1-0.96=0.04$

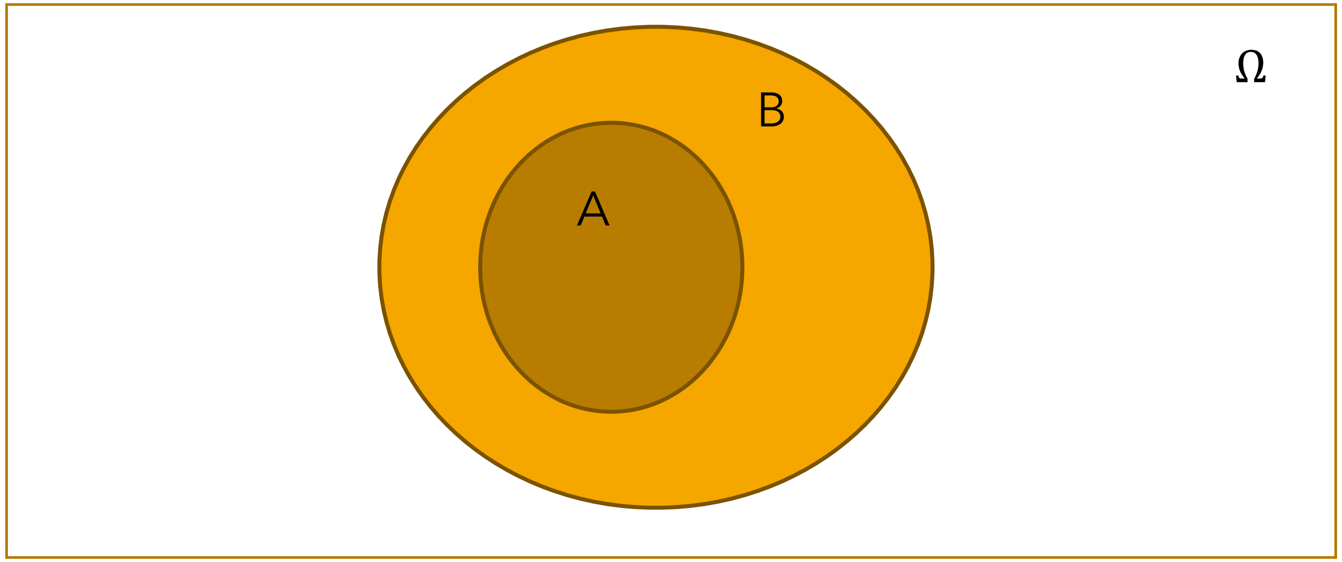


  - $P(\Theta) = P(\Theta|B)\,P(B) + P(\Theta|B')\,P(B')= 0.92*0.0075+0.04*0.9925=0.0466$

Backup

Συνεπαγωγή

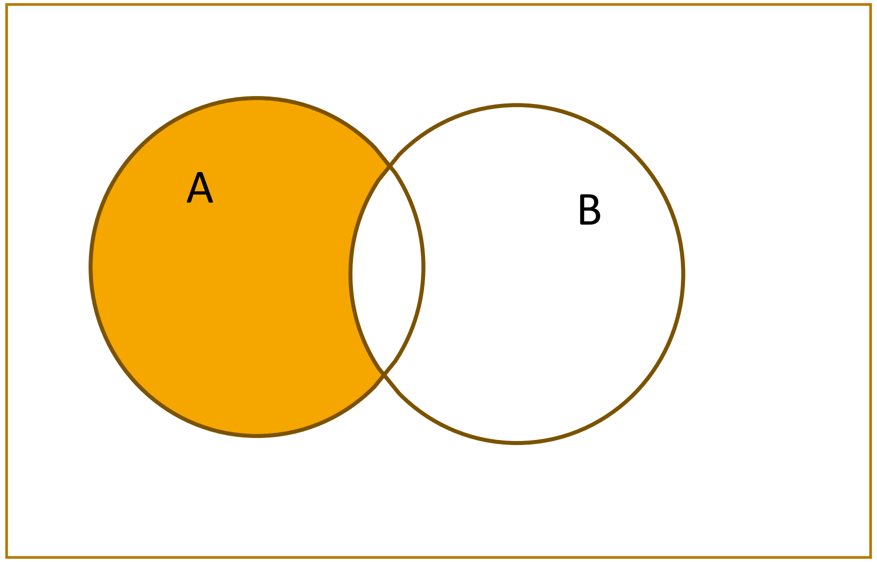
- Έστω ενδεχόμενα A και B του ΔΧ Ω. Το A συνεπάγεται το B ή ότι το A είναι υποσύνολο του B ($A \subseteq B$), αν όταν πραγματοποιείται το A τότε πραγματοποιείται και το B.



Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $B = A$

Διαφορά

- Διαφορά του B από το A ($A - B$), είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν υλοποιείται το A αλλά όχι το B.



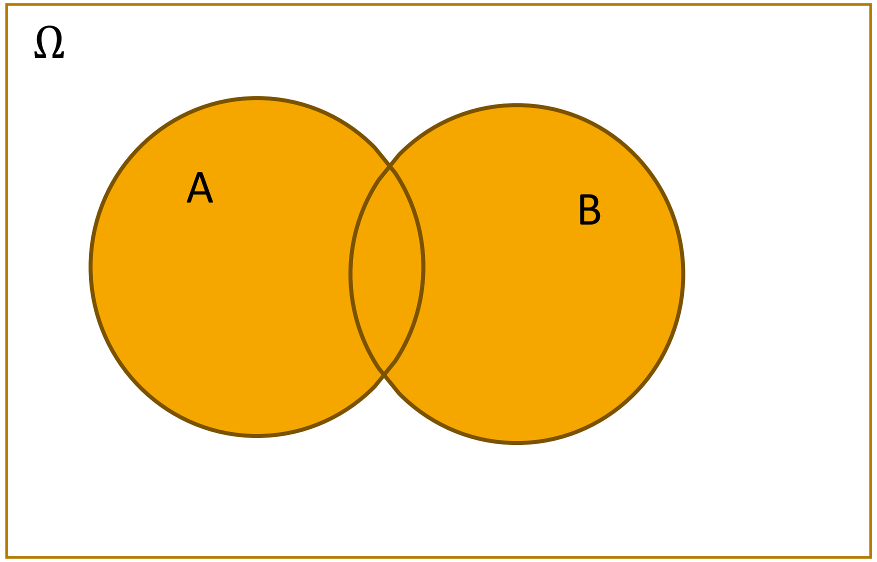
Ιδιότητες:

$$A - B = AB'$$

$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A - B = \emptyset$$

Ένωση

- Η ένωση (συμβ. $A \cup B$) υλοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B.



Ιδιότητες:

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$
$$A \cup A' = \Omega$$

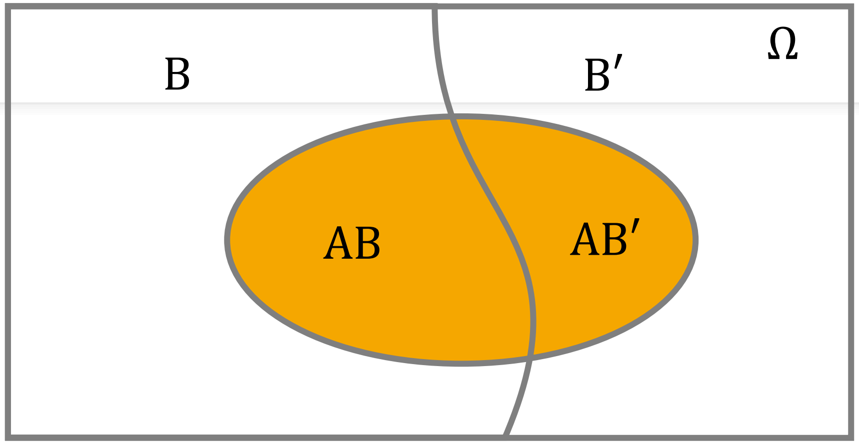
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$

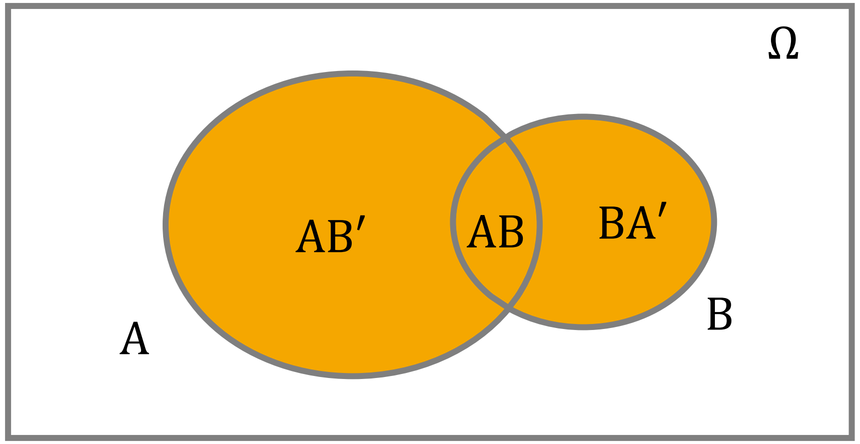
Γενίκευση και περισσότερα ενδεχόμενα

Χρήσιμες ιδιότητες

$$A = AB \cup AB'$$

$$B = BA \cup BA'$$





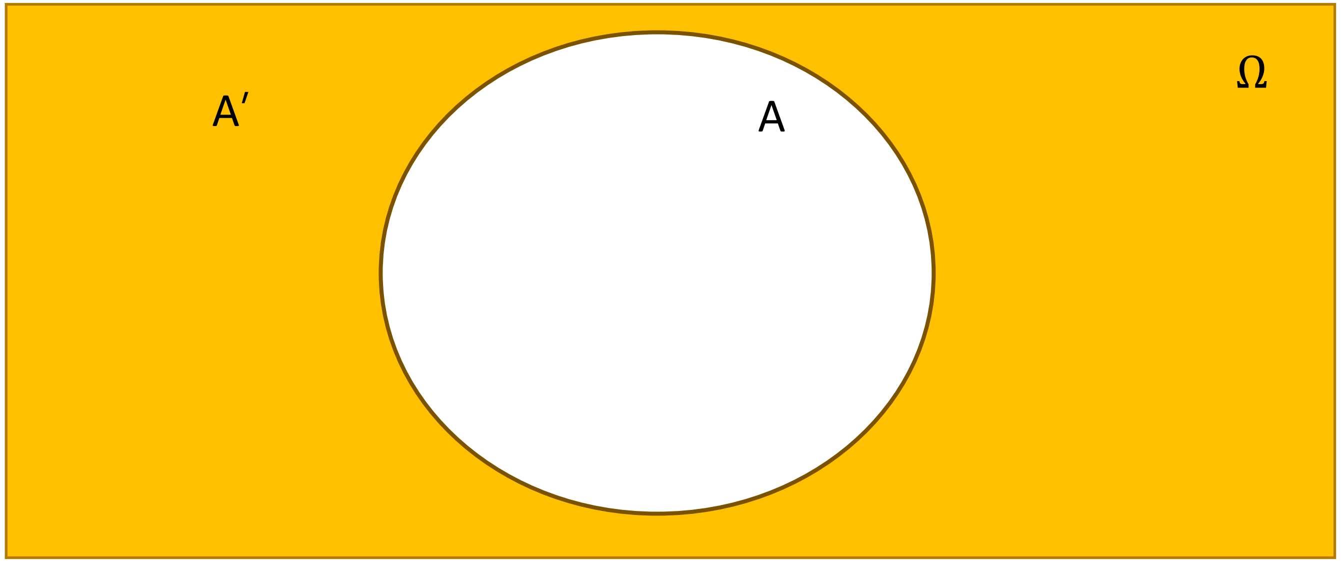
$$A \cup B = AB' \cup B = A \cup BA' = AB' \cup AB \cup BA'$$

Ιδιότητες

- $P(\emptyset) = 0$
- Για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \dots, \mathrm{A}_\nu$ ισχύει $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_\nu) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_3) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_\nu)$ (πεπερασμένη προσθετικότητα)
- Αν $\mathrm{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ είναι αριθμησίμως άπειρα ενδεχόμενο του ΔΧ Ω, τότε $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\{\alpha_1\}) + \mathrm{P}(\{\alpha_2\}) + \cdots$ (ισχύει και για πεπερασμένα ενδεχόμενα)

Συμπλήρωμα

- Το συμπλήρωμα του Α (συμβ. Α′), πραγματοποιείται αν και μόνο αν δεν πραγματοποιείται το Α

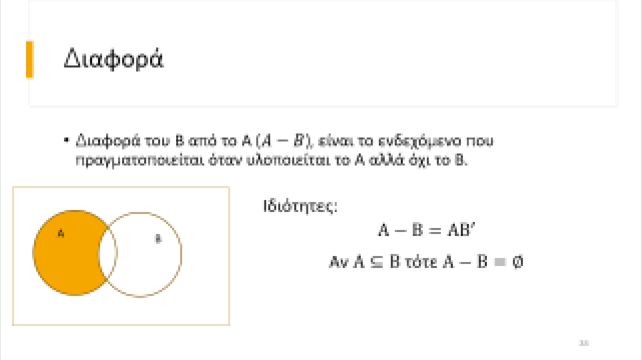


$\Omega' = \emptyset$

Ιδιότητες (συν.)

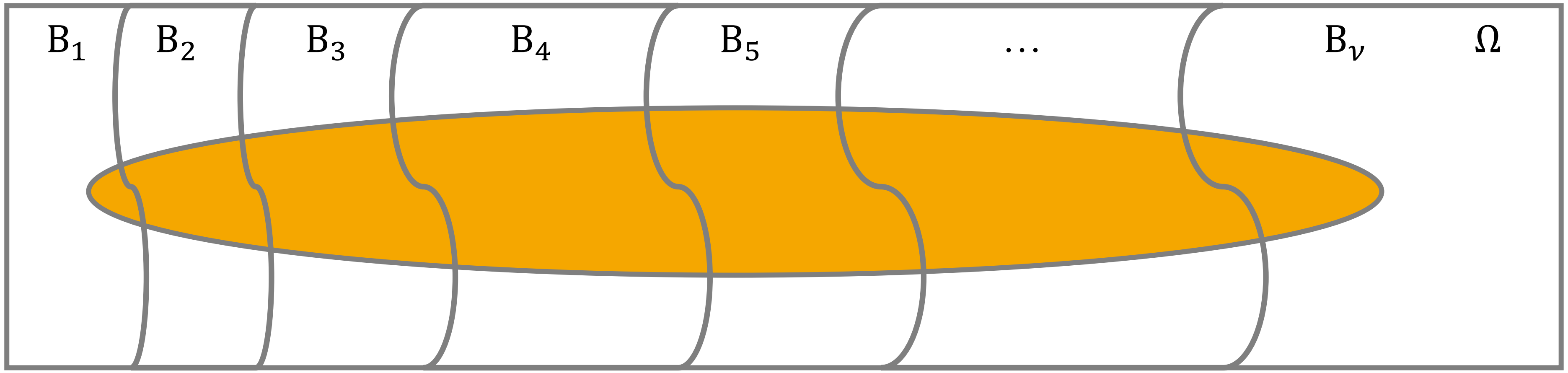
- Για οποιοσδήποτε ενδεχόμενο A, ισχύει $\mathrm{P}(\mathrm{A}') = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$

- Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B, ισχύει $P(A-B) = P(AB') = P(A) - P(AB)$



Διαμέριση ενδεχομένου

- Έστω $B_1 B_2 \ldots B_\nu$ διαμέριση και A οποιοδήποτε ενδεχόμενο του ΔΧ Ω, τότε τα ενδεχόμενα $AB_1, AB_2, \ldots AB_\nu$ είναι επίσης διαμέριση.

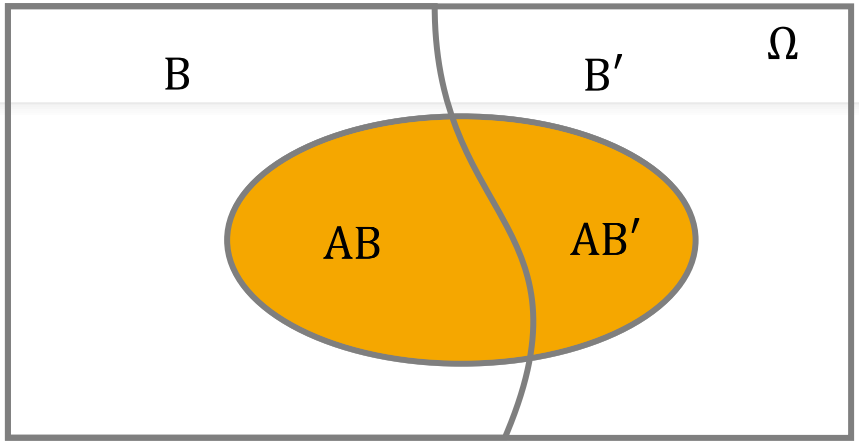


- Πρακτική σημασία: όταν υλοποιείται το A, τότε πραγματοποιείται σε συνδυασμό μόνο με ένα από τα $B_1, B_2, \ldots B_\nu$

Χρήσιμες ιδιότητες

$$A = AB \cup AB'$$

$$B = BA \cup BA'$$



$$A \cup B = AB' \cup B = A \cup BA' = AB' \cup AB \cup BA'$$