

Στατιστική Ι

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων και Τροφίμων,
Πανεπιστήμιο Πατρών

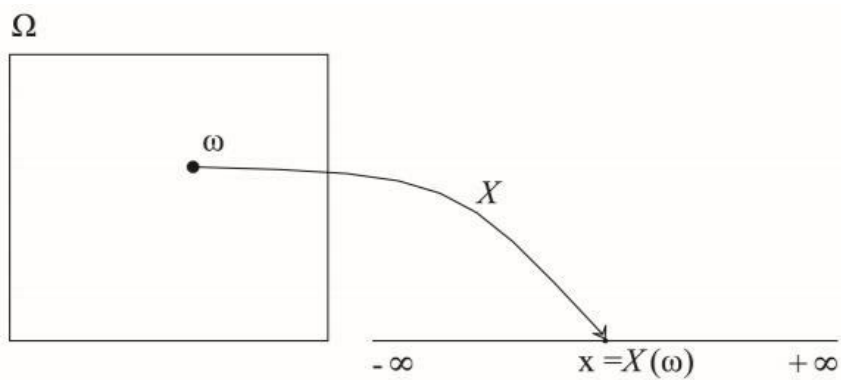


Διάλεξη 5η

Τυχαίες μεταβλητές
Συνάρτηση κατανομής
Παράμετροι διακριτών τμ



5.1 – 5.3

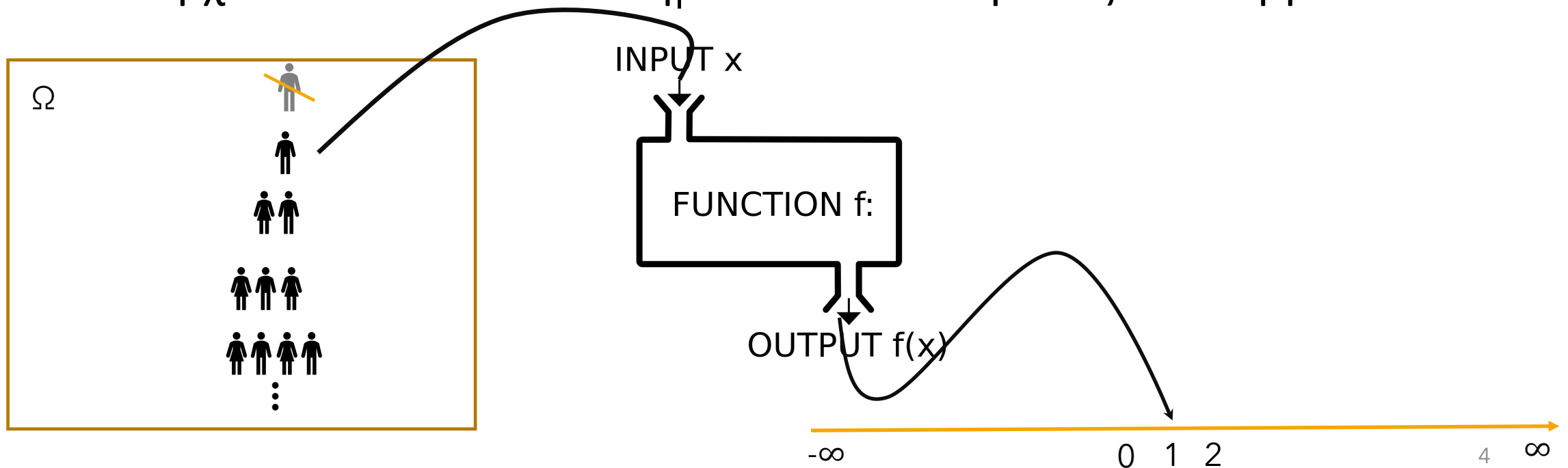


Τυχαίες μεταβλητές

- Μια **συνάρτηση** που αντιστοιχίζει το αποτέλεσμα που εμφανίζεται κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης σε έναν **πραγματικό αριθμό**

Τυχαίες μεταβλητές (συν.)

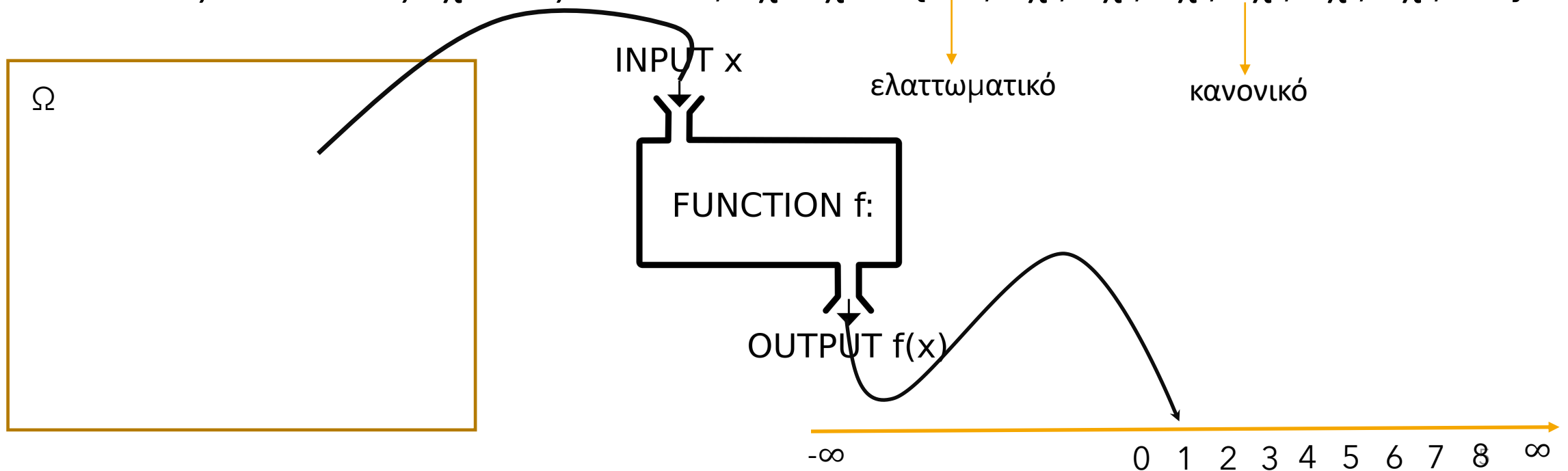
- Μια συνάρτηση που καταμετρά τον αριθμό των πελατών που εισέρχονται σε ένα κατάστημα 9-11 Δευτέρα ως και Σάββατο



Τυχαίες μεταβλητές (συν.)

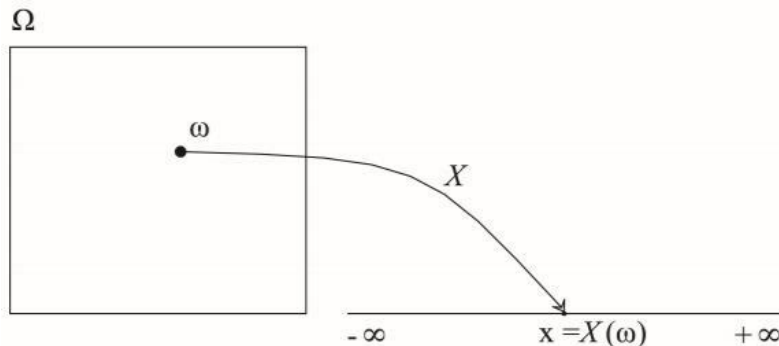
- Ελέγχεται κάθε προϊόν από μια παρτίδα οκτώ προϊόντων για να διαπιστωθεί αν είναι ή όχι ελαττωματικό

Ω = όλες οι δυνατές οχτάδες από ναι, όχι πχ $\omega = \{\text{ναι, όχι, όχι, όχι, όχι, όχι, όχι, ναι}\}$



Τυχαίες μεταβλητές (συν.)

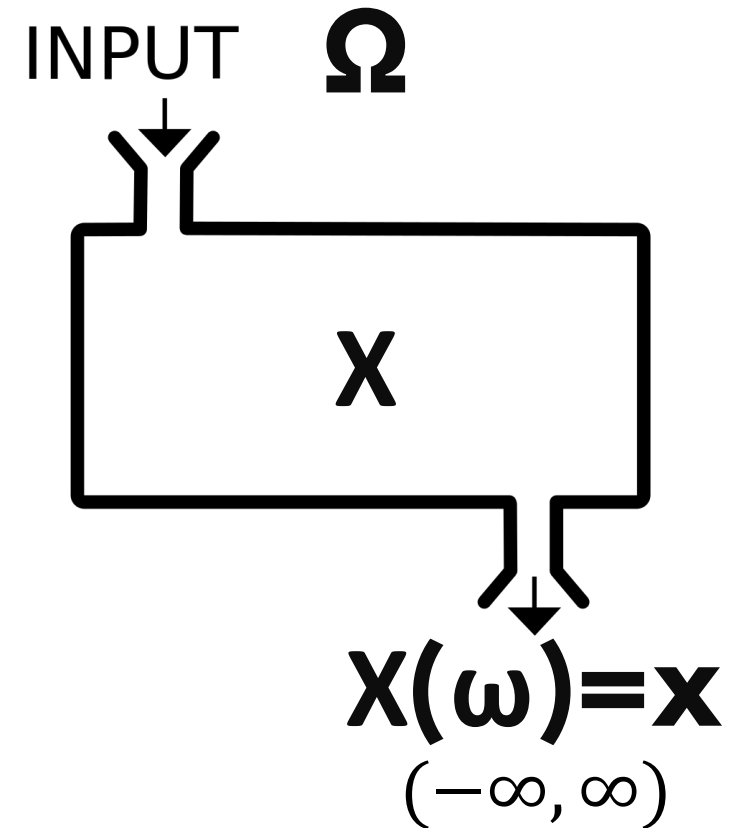
- Μια τυχαία μεταβλητή συνήθως συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα X, Y, T, Z, \dots
- Με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα x, y, t, z, \dots συμβολίζουμε τις τιμές των τυχαίων μεταβλητών
- Για να δηλώσουμε ότι όταν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης είναι το $\omega \in \Omega$ η τμ λαμβάνει την τιμή x , τότε γράφουμε $X(\omega) = x$ ή $X = x$.



Τυχαίες μεταβλητές (συν.)

- Το πεδίο τιμών είναι το $X: \Omega \rightarrow (-\infty, \infty)$

$$X(\Omega) = R_X = \{x \in (-\infty, +\infty) : X(\omega) = x, \omega \in \Omega\} \subseteq (-\infty, +\infty)$$

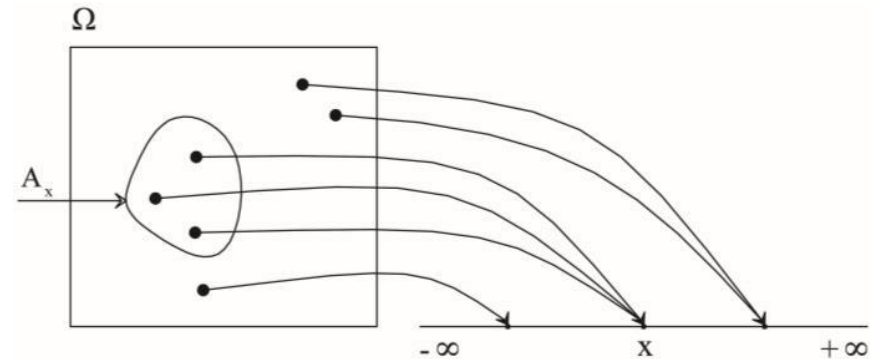


Τυχαίες μεταβλητές (συν.)

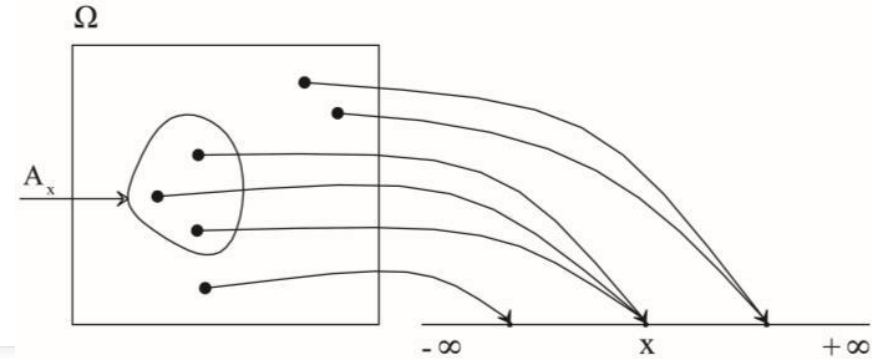
- Δεν είναι απαραίτητο μια τυχαία μεταβλητή να είναι ένα προς ένα.
- Διαφορετικά δειγματικά σημεία του δειγματικού χώρου Ω μπορεί να αντιστοιχίζονται, μέσω μιας τυχαίας μεταβλητής, σε ίσες τιμές της
- Για κάθε πραγματικό αριθμό x ορίζεται το σύνολο

$$A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

δηλαδή, ορίζεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που μέσω της τ.μ. X αντιστοιχίζονται στον πραγματικό αριθμό x

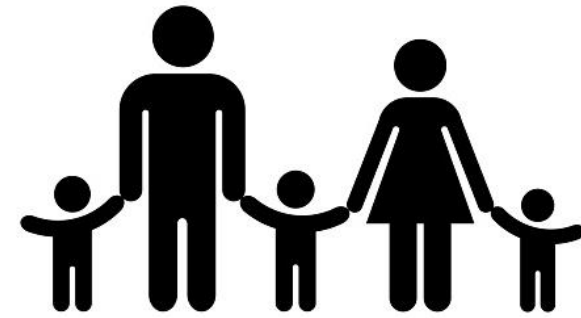


Πιθανότητα τμ



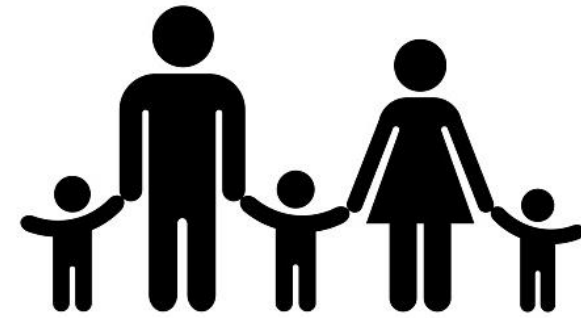
- Για κάθε ενδεχόμενο A_x ($A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$) η πιθανότητα να υλοποιηθεί (δηλαδή $P(A_x)$) ισούται με την πιθανότητα η τμ X να πάρει την τιμή x , και συμβολίζεται με $P(X(\omega)=x)$ ή απλά $P(X=x)$

Παράδειγμα



- Ποια είναι η πιθανότητα μια τρίτεκνη οικογένεια, που επιλέγεται τυχαία από τα αρχεία του Δήμου Αθηναίων, να έχει ακριβώς ένα αγόρι.

Παράδειγμα (συν)



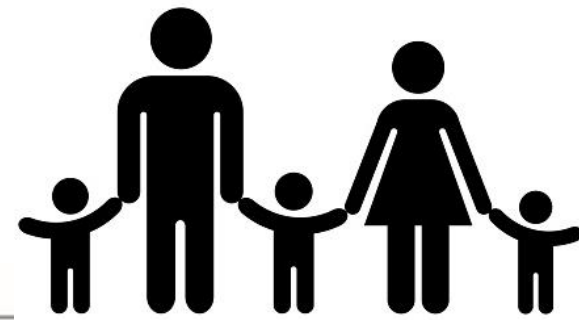
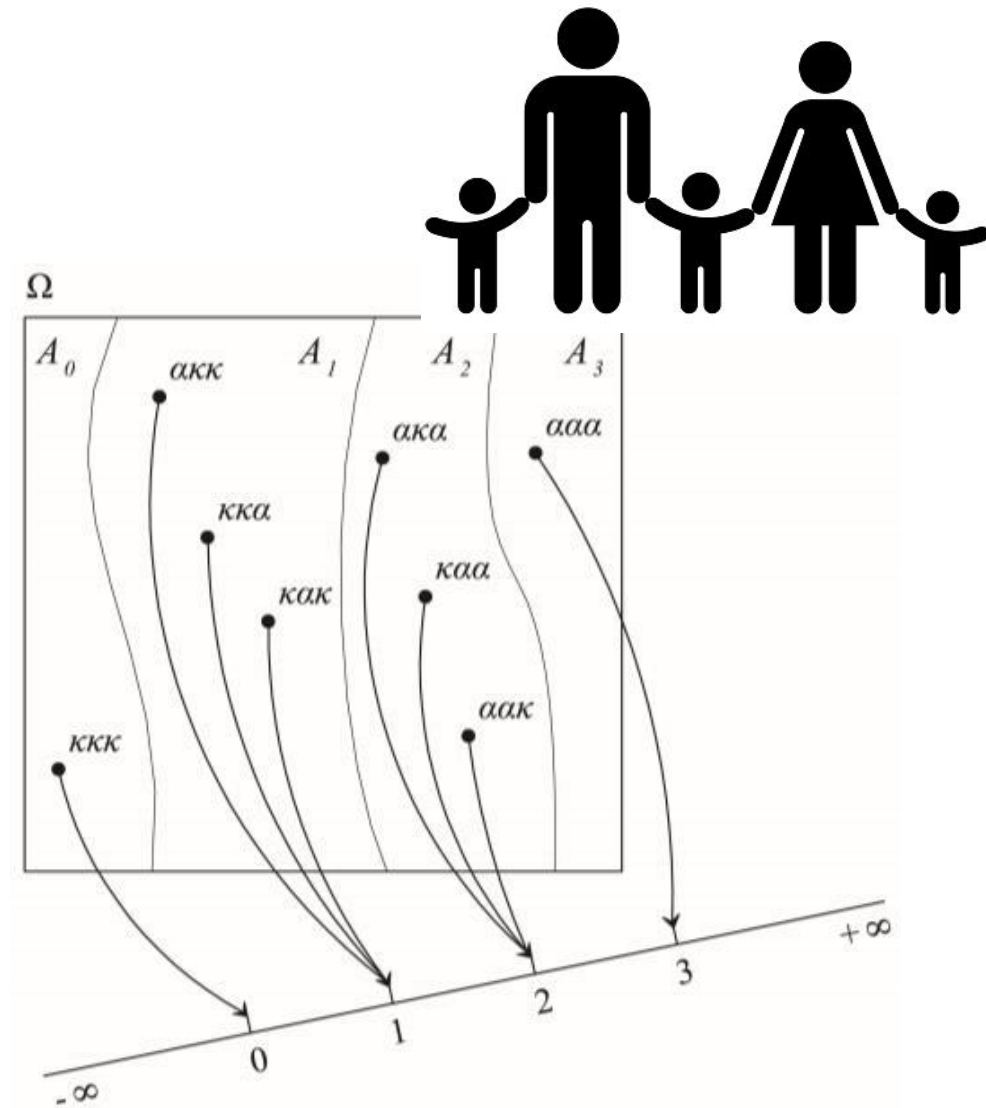
- $\Delta X \Omega = \{\alpha\alpha\alpha, \kappa\kappa\kappa, \alpha\kappa\alpha, \alpha\kappa\kappa, \kappa\kappa\alpha, \alpha\alpha\kappa, \kappa\alpha\alpha, \kappa\alpha\kappa\}$
- Κωδικοποίηση κάθε απλού ενδεχομένου με μια τριάδα:
1^ο παιδί 2^ο παιδί 3^ο παιδί
- «ακριβώς ένα αγόρι» : $\{\alpha\kappa\kappa, \kappa\kappa\alpha, \kappa\alpha\kappa\}$
- Ορίζουμε την τμ X που δέχεται σαν είσοδο (πεδίο ορισμού) όλο τον Ω και υπολογίζει ένα πραγματικό αριθμό

$$X: \{\alpha\alpha\alpha, \kappa\kappa\kappa, \alpha\kappa\alpha, \alpha\kappa\kappa, \kappa\kappa\alpha, \alpha\alpha\kappa, \kappa\alpha\alpha, \kappa\alpha\kappa\} \rightarrow (-\infty, \infty)$$

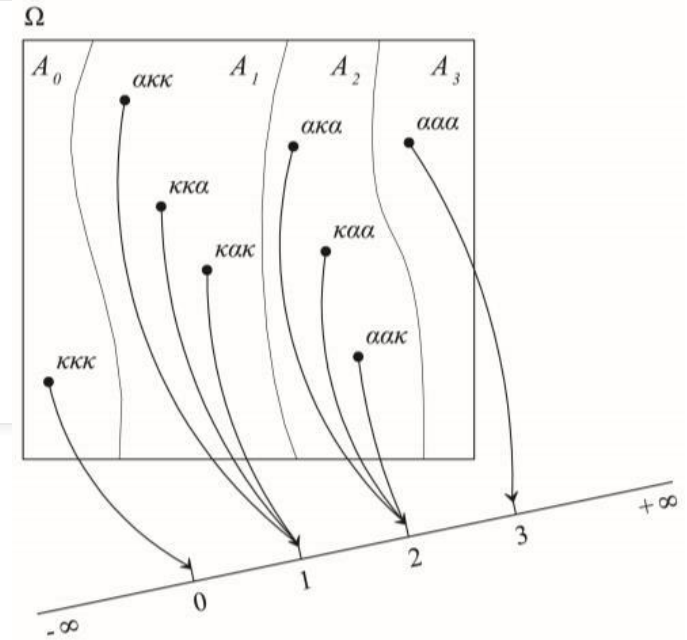
Παράδειγμα (συν)

- Πως η X αντιστοιχίζει σε κάθε ενδεχόμενο έναν αριθμό;
- Μετρώντας τον αριθμό των αγοριών ανά τριαδα:

$X(\alpha\alpha\alpha)=3$, $X(\kappa\kappa\kappa)=0$, $X(\alpha\kappa\alpha)=2$, $X(\alpha\kappa\kappa)=1$, $X(\kappa\kappa\alpha)=1$, $X(\alpha\alpha\kappa)=2$,
 $X(\kappa\alpha\alpha)=2$, $X(\kappa\alpha\kappa)=1$



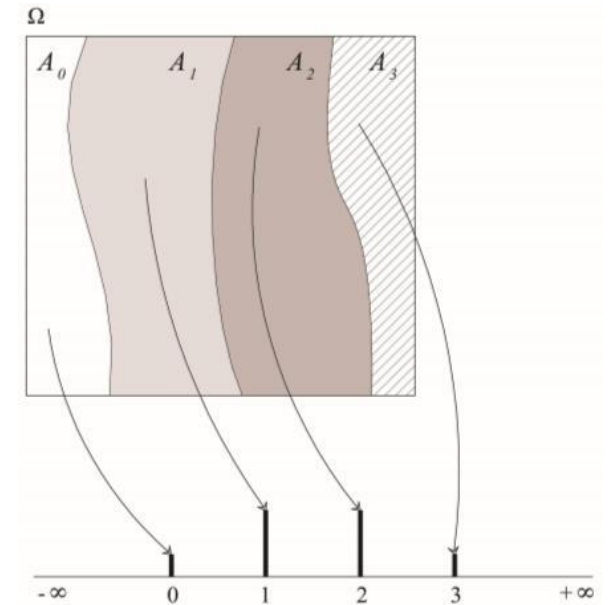
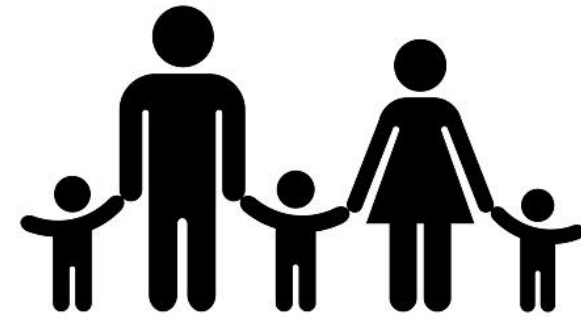
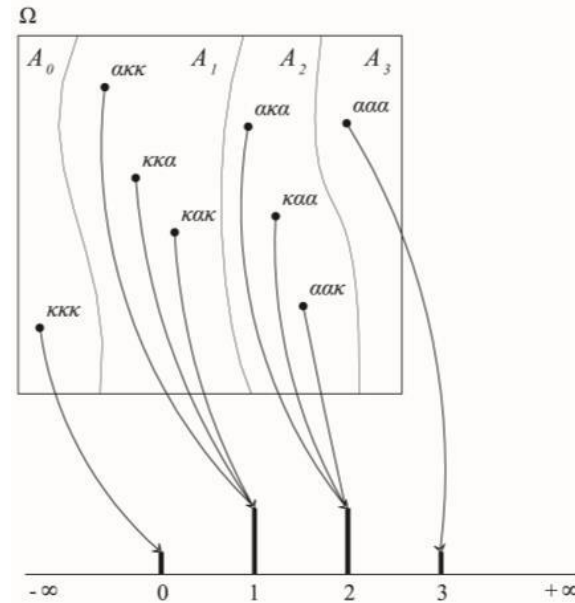
Παράδειγμα (συν)



- Το πεδίο τιμών της τμ X είναι $R_X = \{0,1,2,3\}$
- Το γεγονός «ακριβώς ένα αγόρι», αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο $\{\alpha\kappa\kappa, \kappa\kappa\alpha, \kappa\alpha\kappa\}$, που εκφράζεται από την τμ X όταν πάρει την τιμή 1
- Δηλαδή: $A_1 = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = 1\} = \{\alpha\kappa\kappa, \kappa\kappa\alpha, \kappa\alpha\kappa\}$

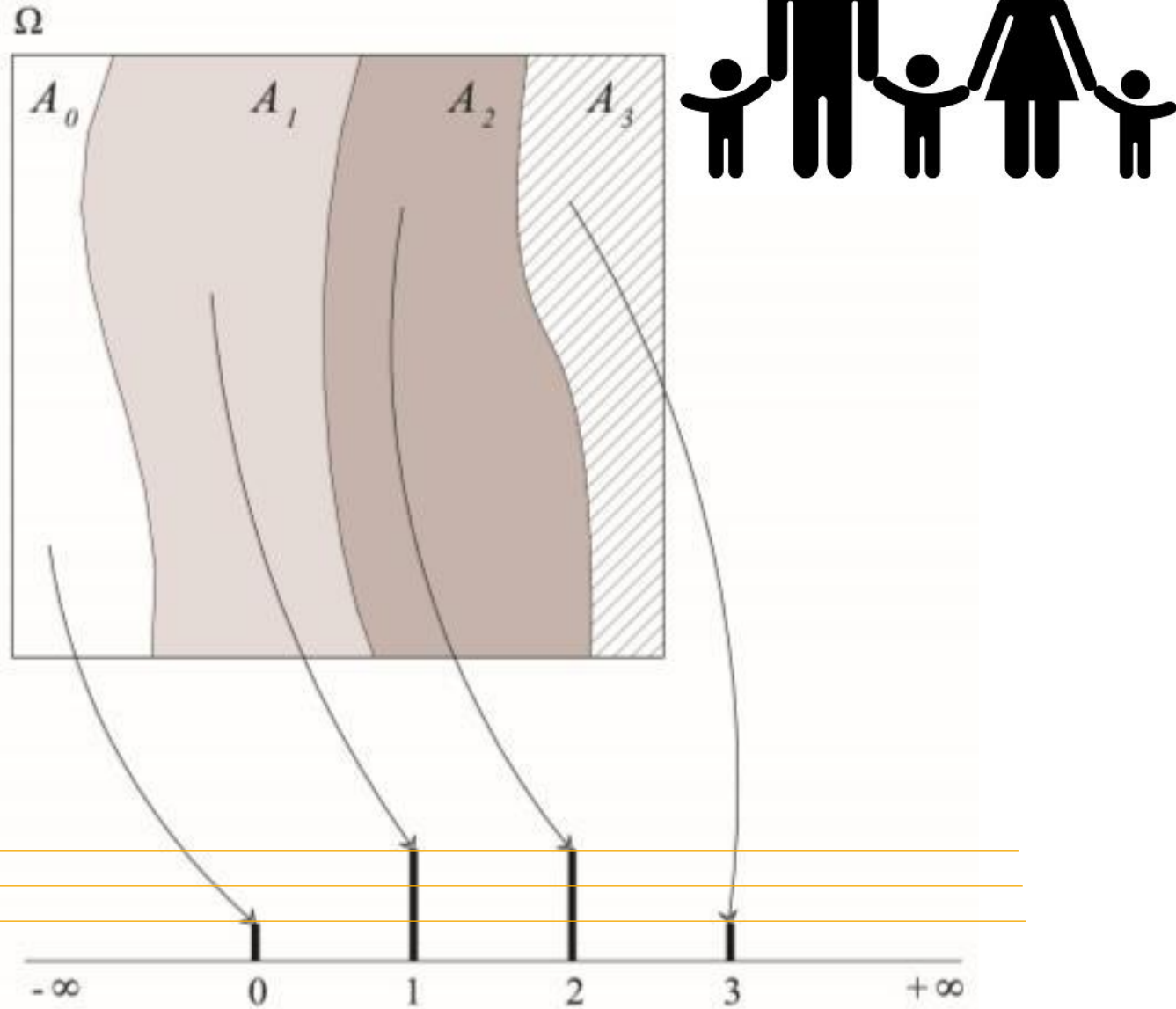
Παράδειγμα (συν)

- Μπορούμε να «ξεχάσουμε» το ενδεχόμενο {ακκ, κκα, κακ} και να υπολογίσουμε την πιθανότητα «ακριβώς ένα αγόρι» μέσω της τμ X και της τιμής $X=1$



Παράδειγμα (συν)

- Πιθανότητα «ακριβώς ένα αγόρι» $P(A_1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$
- Πιθανότητα «ακριβώς δύο αγόρια» $P(A_2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$
- Πιθανότητα «ακριβώς τρία αγόρια» $P(A_3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$
- Πιθανότητα «το πολύ ένα αγόρι»
 $P(X \leq 1) = P(X = 0) +$
 $P(X = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

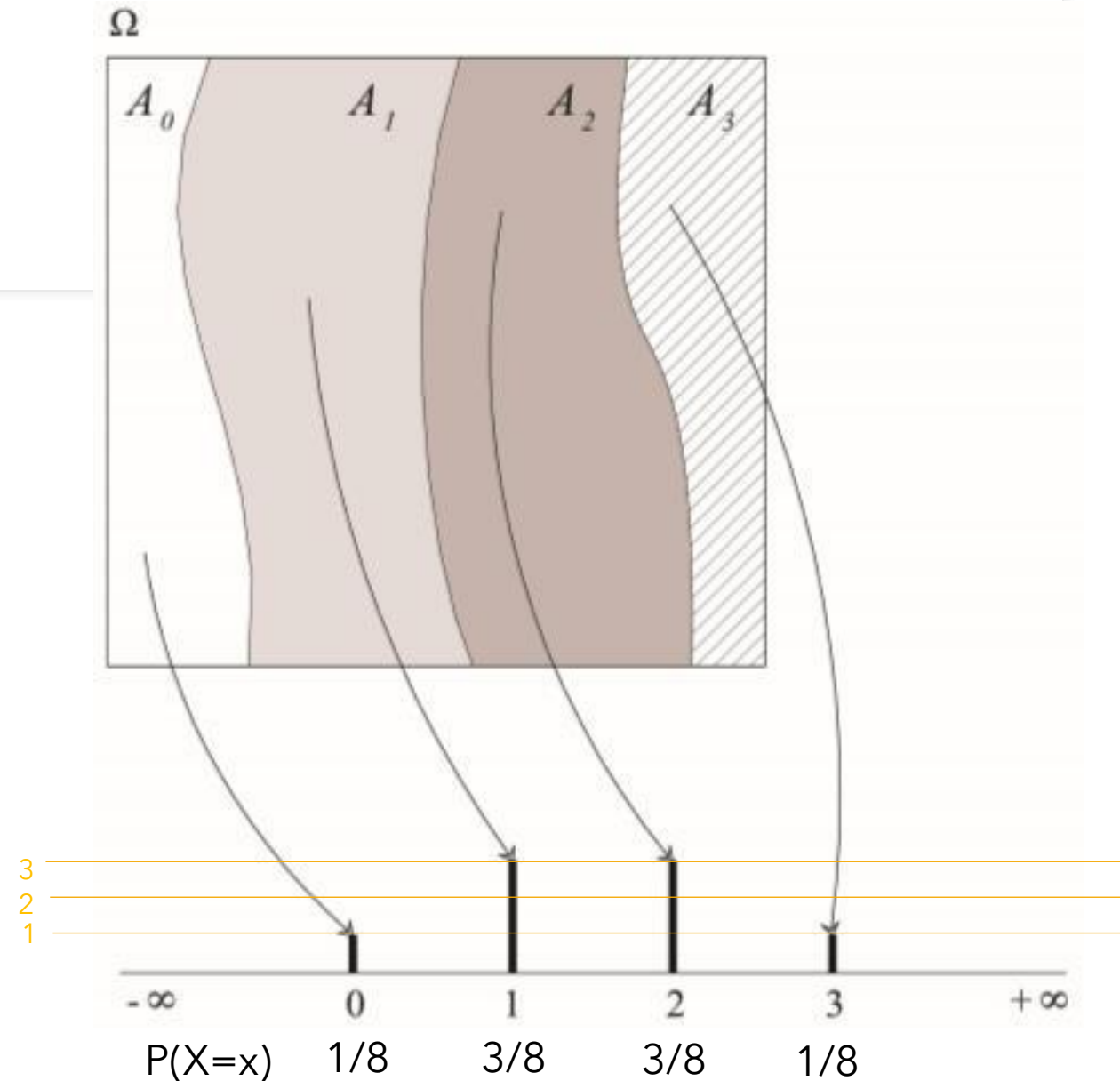


Ιδιότητες

- $P(\emptyset) = 0$
- Για οποιαδήποτε ζένα ανά δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, ισχύει $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$ (πεπερασμένη προσθετικότητα)
- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ είναι αριθμησίμως άπειρα ενδεχόμενα του Ω , τότε $P(A) = P(\{\alpha_1\}) + P(\{\alpha_2\}) + \dots$ (ισχύει και για πεπερασμένα ενδεχόμενα)

Συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής

- Όταν γνωρίζουμε πως κατανέμονται οι πιθανότητες για τις τιμές μιας τμ γνωρίζουμε τα πάντα για αυτή και τα ενδεχόμενα που εκφράζει.



Ορισμός συνάρτησης κατανομής τυχαίας μεταβλητής

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή η οποία ορίζεται σε ένα δειγματικό χώρο Ω . Η πραγματική συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad -\infty < x < +\infty$$

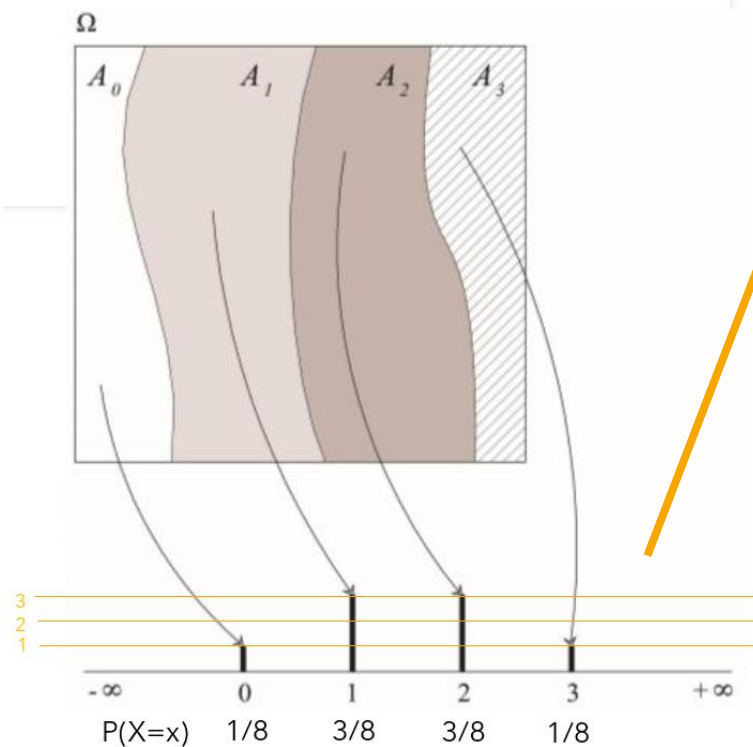
ονομάζεται συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) ή αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X (cumulative distribution function/cdf).

Παράδειγμα

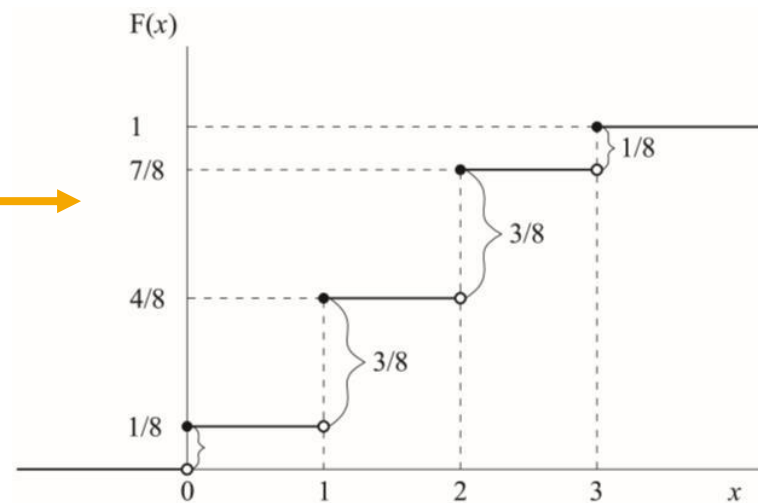


- Ποια είναι η πιθανότητα μια τρίτεκνη οικογένεια, που επιλέγεται τυχαία από τα αρχεία του Δήμου Αθηναίων

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad -\infty < x < +\infty$$



$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 4/8, & 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x < +\infty \end{cases}$$



Ιδιότητες $F(x)$ CDF

- Για κάθε τιμή του x , λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$
- Είναι αύξουσα συνάρτηση
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- Η $F(x)$ είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$

Η κάθε $F(x)$ που ζ
ισχύουν οι 3 ιδιότητες,
είναι CDF

Κατάλληλες για CDF?

Ιδιότητες F(x) CDF

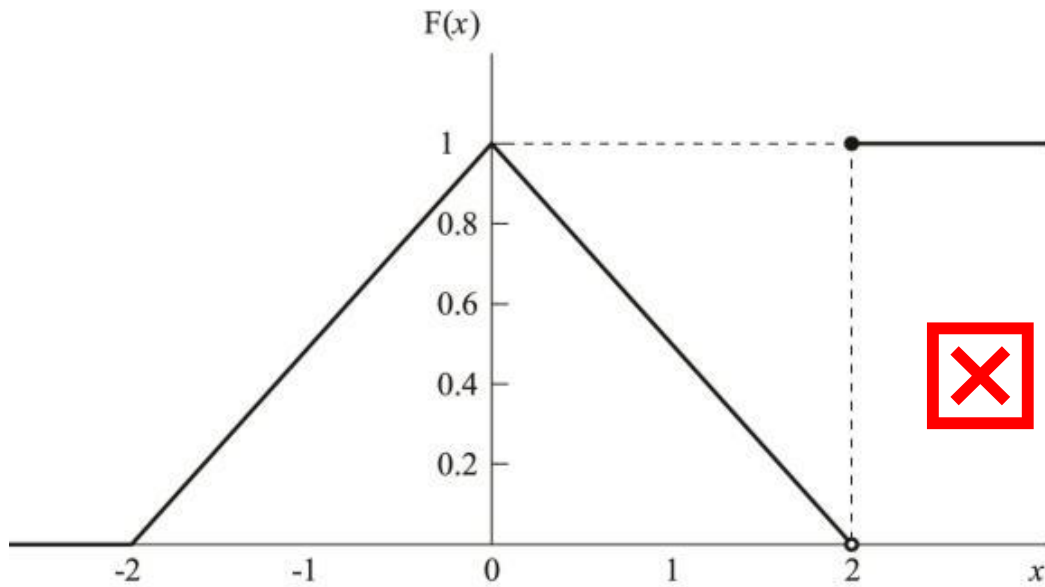
- Για κάθε τιμή του x , λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$
- Είναι αύξουσα συνάρτηση
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- Η $F(x)$ είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = x_0$

Η κάθε $F(x)$ που ικανοποιεί τις 3 ιδιότητες, είναι CDF

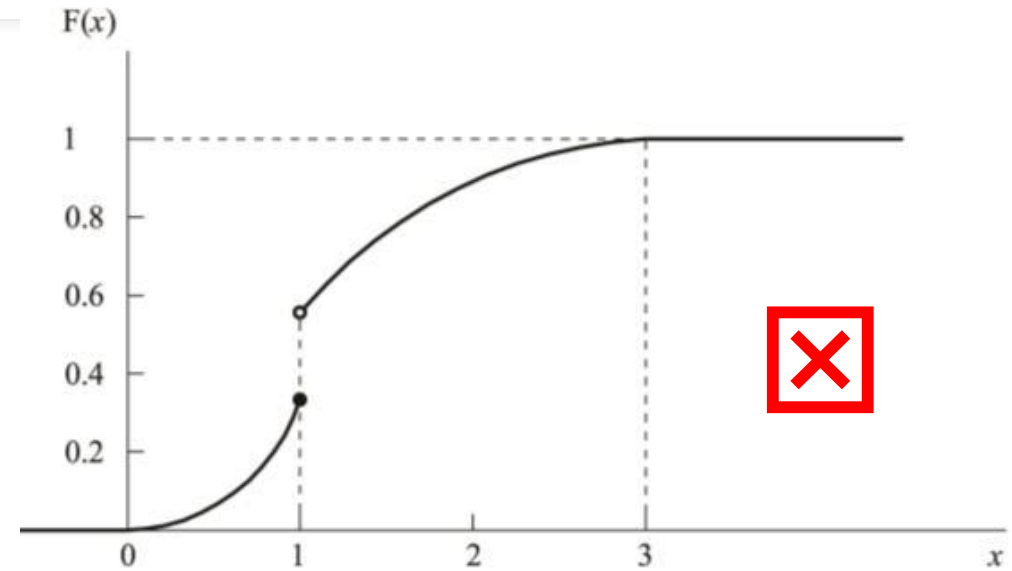
9/4/200x

Presentation Title

19



Μη αύξουσα



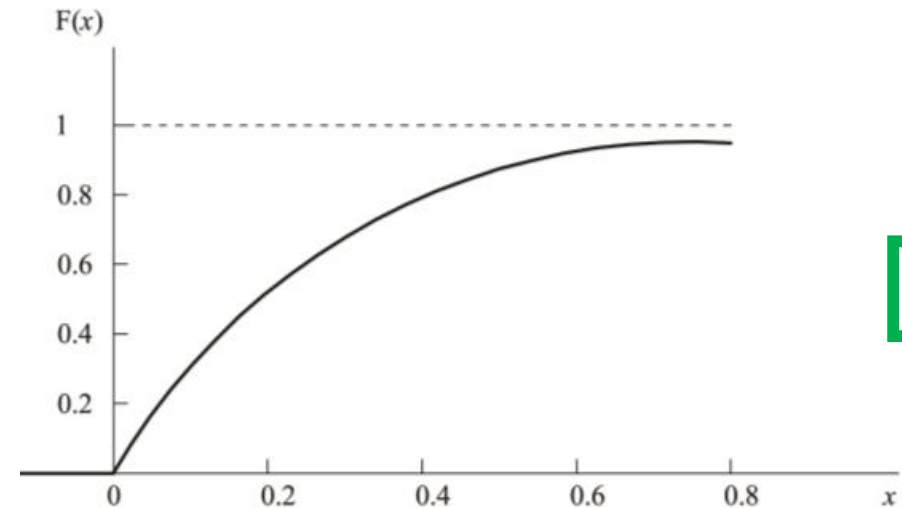
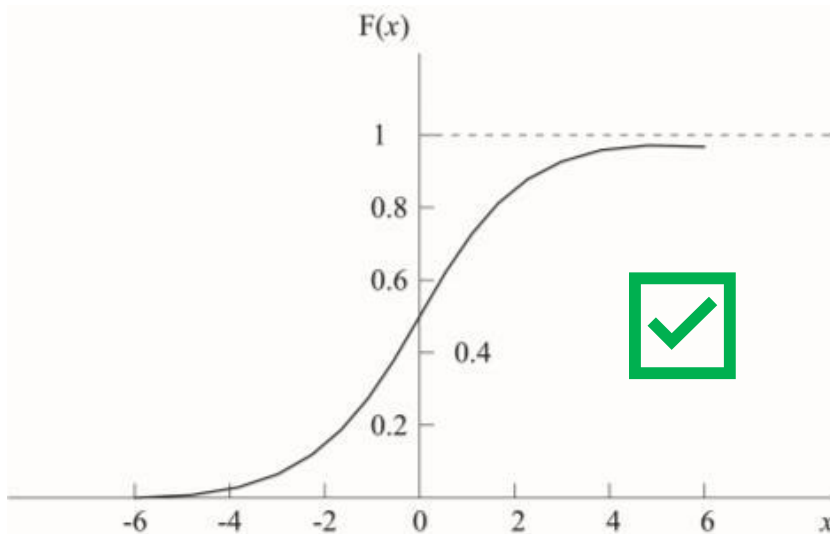
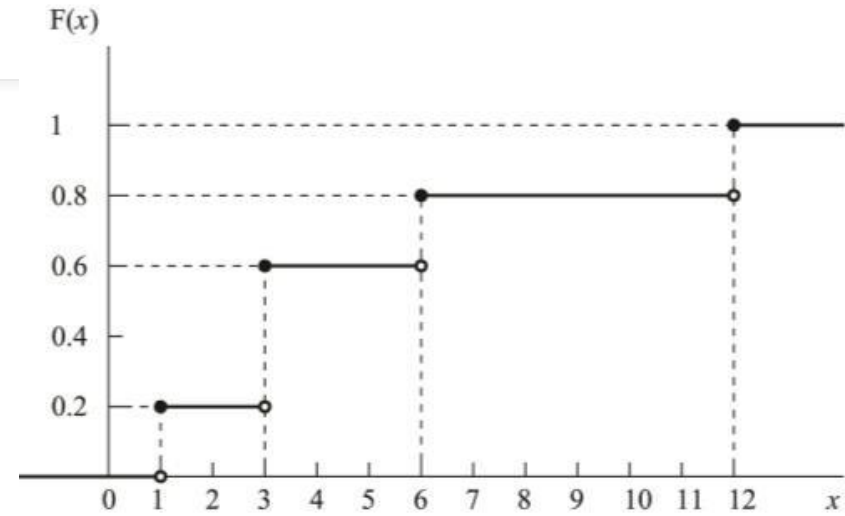
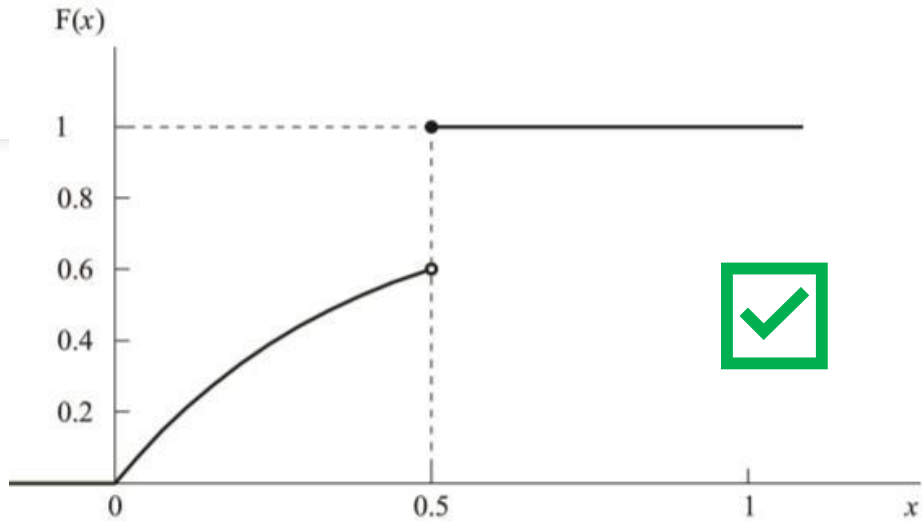
Για $x = 1$ δεν είναι δεξιά συνεχής

Κατάλληλες για CDF?

Ιδιότητες F(x) CDF

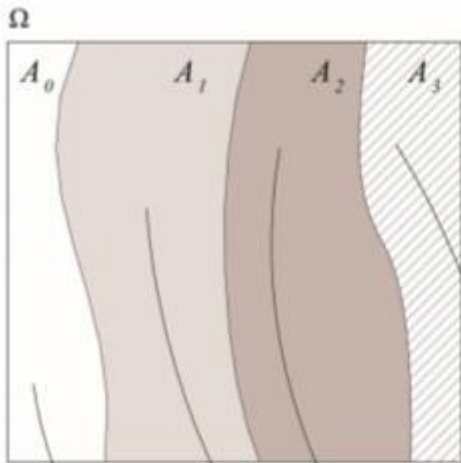
- Για κάθε τιμή του x , λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$
- Είναι αύξουσα συνάρτηση
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- Η $F(x)$ είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$

Η κάθε $F(x)$ που ικανοποιεί τις 3 ιδιότητες, είναι CDF

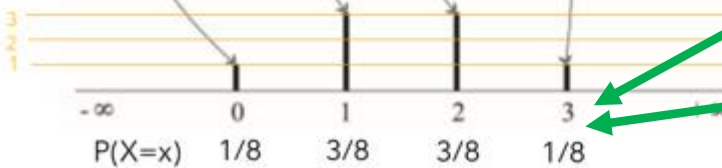
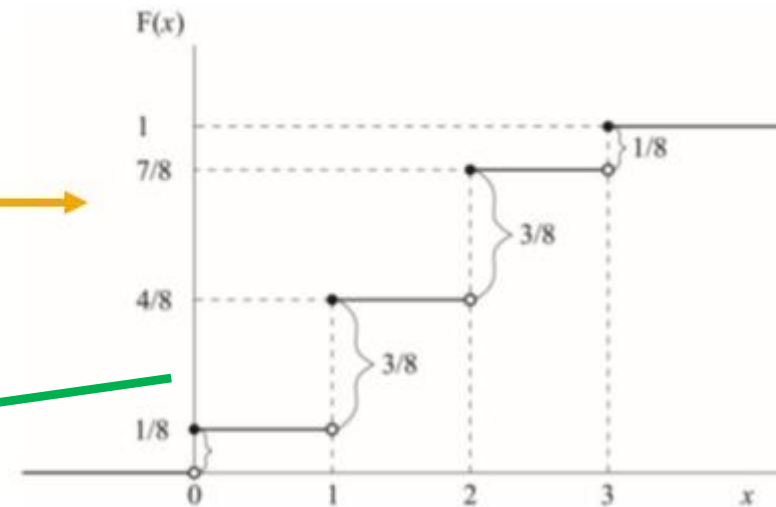


Υπολογισμός πιθανότητας από CDF

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad -\infty < x < +\infty$$



$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 4/8, & 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x < +\infty \end{cases}$$



$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad -\infty < x < +\infty$$

Υπολογισμός πιθανότητας από CDF

- Για πραγματικούς a, b ($a < b$) και $F(x)$ αθροιστική συνάρτηση κατανομής, ισχύουν

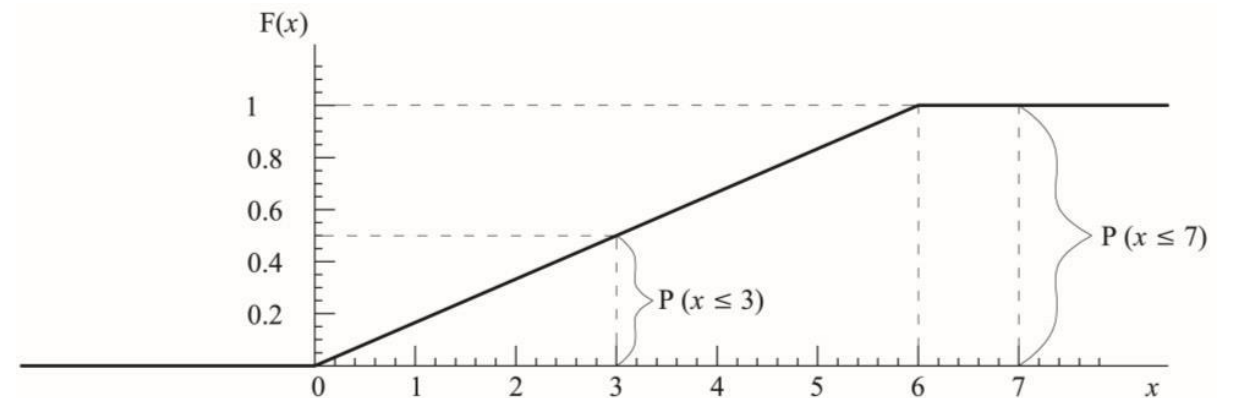
- $P(X \leq b) = F(b)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(X < b) = F(b-)$ (αριστερό όριο της F στο x)
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a-)$
- $P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a-)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$
- $P(a < X < b) = F(b-) - F(a)$
- $P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-)$

Παράδειγμα



- Η ποσότητα ελιών (σε τόνους) που επεξεργάζεται σε μια βάρδια λειτουργίας ένα ελαιοτριβείο περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x/6, & 0 \leq x < 6 \\ 1, & 6 \leq x < +\infty \end{cases}$$



Παράδειγμα (συν)



- Πιθανότητα το ελαιοτριβείο σε μια βάρδια να επεξεργαστεί το πολύ 3 τόνους: $P(X \leq 3) = F(3) = 3/6 = 1/2$
- Πιθανότητα να επεξεργασθεί σε μια βάρδια το πολύ 7 τόνους:
$$P(X \leq 7) = F(7) = 1.$$
- Πιθανότητα να επεξεργασθεί σε μια βάρδια λιγότερο από 3 τόνους $P(X < 3) = F(3-) = 3/6 = 1/2$

Υπολογισμός πιθανότητας από CDF

• Για πραγματικούς a, b ($a < b$) και $F(x)$ αθροιστική συνάρτηση κατανομής, ισχύουν

- $P(X \leq b) = F(b)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(X < b) = F(b-)$ (αριστερό όριο της F στο x)
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a-)$
- $P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a-)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$
- $P(a < X < b) = F(b-) - F(a)$
- $P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-)$

Παράδειγμα (συν)



- Πιθανότητα να επεξεργασθεί σε μια βάρδια λιγότερο από 7 τόνους $P(X < 7) = F(7-) = 1$

- Πιθανότητα το ελαιοτριβείο σε μια βάρδια να επεξεργαστεί περισσότερους από 4.5 τόνους

$$P(X > 4.5) = 1 - P(X \leq 4.5) = 1 - F(4.5) = 1 - \frac{4.5}{6} = 0.25$$

- πιθανότητα η ποσότητα που θα επεξεργαστεί το ελαιοτριβείο σε μια βάρδια να μην ξεπεράσει τους 5.5 τόνους δεδομένου ότι ήδη ξεπέρασε τους 2 τόνους

$$P(X \leq 5.5 | X > 2) = \frac{P(2 < X \leq 5.5)}{P(X > 2)} = \frac{F(5.5) - F(2)}{1 - F(2)} = \frac{3.5/6}{4/6} = 0.875$$

Δεσμευμένη πιθανότητα (ορισμός)

• Έστω ενδεχόμενα A και B του ΔΧ Ω, και $P(B) > 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B (conditional probability) ισούται με

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

• Εναλλακτικός συμβολισμός: $P_B(A)$

Υπολογισμός πιθανότητας από CDF

• Για πραγματικούς a, b ($a < b$) και $F(x)$ αθροιστική συνάρτηση κατανομής, ισχύουν

- $P(X \leq b) = F(b)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(X < b) = F(b-)$ (αριστερό όριο της F στο x)
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a-)$
- $P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a-)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$
- $P(a < X < b) = F(b-) - F(a)$
- $P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-)$



Διακριτές τυχαίες μεταβλητές



Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

- Μια τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται διακριτή ή απαριθμητή τυχαία μεταβλητή (discrete random variable) αν το σύνολο τιμών της, R_X , είναι πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο σύνολο.

Συμπληρωματικοί ορισμοί

- Αν σε μια εκτέλεση πειράματος εμφανίστηκε το ενδεχόμενο ω και $\omega \in A$, τότε λέμε το ενδεχόμενο A υλοποιήθηκε/συνέβη.
- Ο Ω περιέχει όλα τα ενδεχόμενα και οπότε είναι το «σίγουρο» ενδεχόμενο, ενώ το κενό σύνολο (\emptyset) είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.
- Πεπερασμένος δειγματικός χώρος (finite SS): αν ένα πείραμα έχει πεπερασμένο σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$).
- Αριθμήσιμος άπειρος ΔX (countably infinite SS): αν το πείραμα έχει άπειρα πολλά δυνατά αποτελέσματα, αλλά μπορούμε να τους αποδώσουμε ένα φυσικό αριθμό ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$).
- Συνεχής ΔX (continuous SS): αν το πείραμα έχει άπειρα πολλά δυνατά αποτελέσματα αλλά μη αριθμήσιμα.
- Διακριτός ΔX (discrete SS): Πεπερασμένος ή Αριθμήσιμος άπειρος ΔX

Παραδείγματα διακριτών τυχαίων μεταβλητών

τυχαία μεταβλητή που εκφράζει

- τον αριθμό των βακτηριδίων σε 1cm² μιας πλάκας Petri
- τον αριθμό των αυτοκινήτων που εισέρχονται στην αττική οδό από τον κόμβο
- Κύμης με κατεύθυνση την Ελευσίνα 6-9 το πρωί μια εργάσιμη ημέρα
- τον αριθμό των κλήσεων σε ένα τηλεφωνικό κέντρο 1-2 το μεσημέρι μια εργάσιμη ημέρα
- το ύψος της απόδοσης μιας επένδυσης
- τον αριθμό των σεισμών μεγέθους τουλάχιστον 4 Richter που συμβαίνουν σε ένα έτος στο Ιόνιο
- των θανάτων σε ένα μήνα από μια συγκεκριμένη ασθένεια σε μια πόλη
- το ύψος της αποζημίωσης ενός αγρότη για τις ζημιές από τον παγετό
- τον αριθμό των σωματιδίων που εκπέμπονται από ραδιενεργό υλικό σε ορισμένο χρονικό διάστημα
- τον αριθμό των μηχανικών βλαβών που συμβαίνουν σε ένα εργοτάξιο στη διάρκεια της απογευματινής βάρδιας
- τον αριθμό των φυτών μιας καλλιέργειας που έδωσαν περισσότερους από 5 καρπούς.

Συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας

- Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών R_X . Η πραγματική συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{για κάθε } x \in R_X \\ 0, & \text{για κάθε } x \notin R_X \end{cases}$$

ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας ή συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X (probability mass function).

Ιδιότητες συνάρτησης (μάζας) πιθανότητας

- Ως συνάρτηση πιθανότητας (ΣΠ) μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X που έχει σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots\}$ ορίζεται μια πραγματική συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

α) $f(x) = 0$, για κάθε $x \neq x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots$

β) $f(x_i) \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots$

γ) $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\nu) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$

Συνάρτηση κατανομής διακριτής τμ

- Έστω f η συνάρτηση πιθανότητας και F η συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τ.μ. X με σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

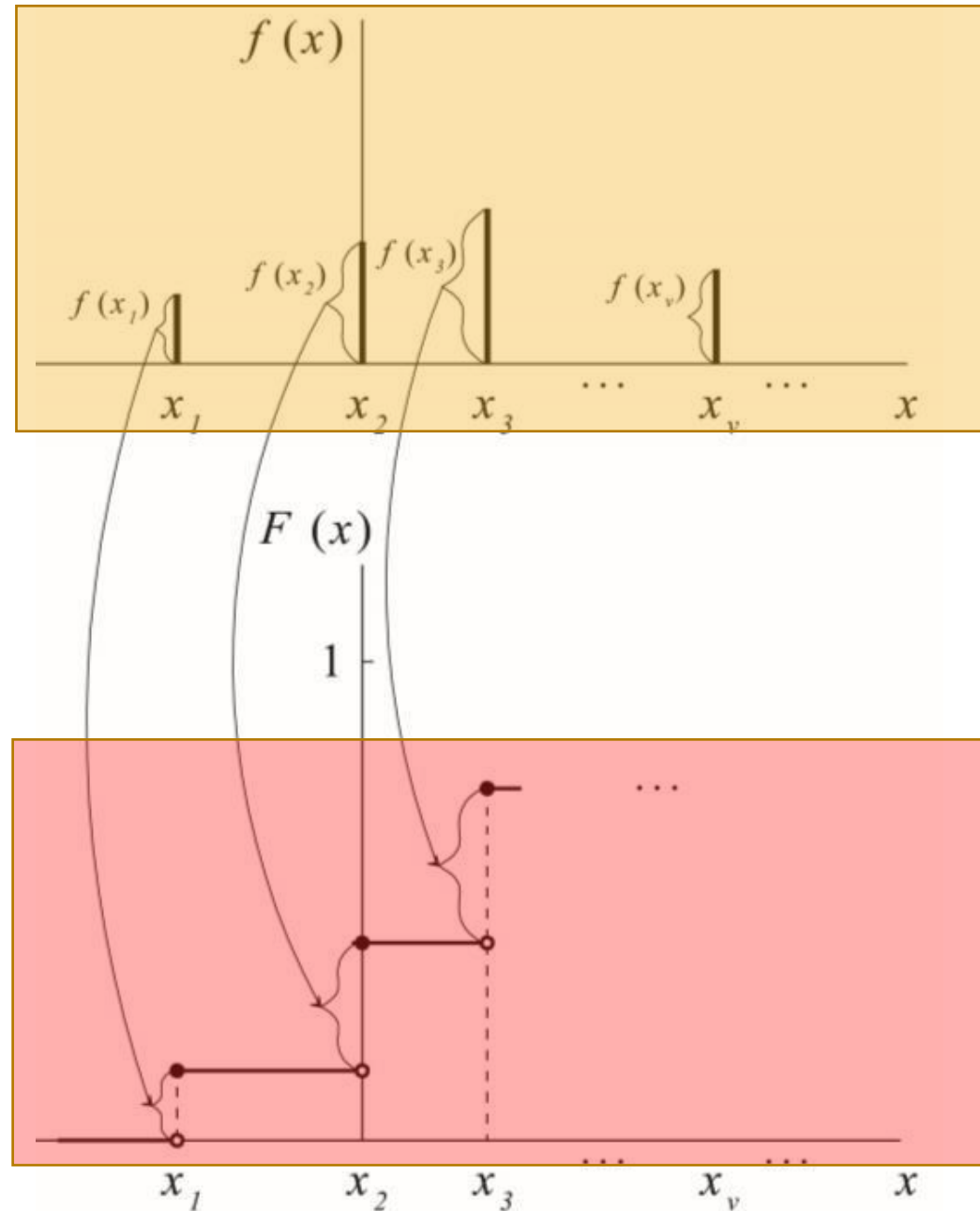
α) Η F μπορεί να υπολογισθεί μέσω της f από τον τύπο

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i: x_i \leq x} f(x_i), \quad x \in R.$$

β) Η f μπορεί να υπολογισθεί μέσω της F από τους τύπους

$$f(x_1) = F(x_1) \text{ και } f(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

Γραφική συσχέτιση συνάρτησης πιθανότητας και κατανομής



Παράδειγμα



- Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό εργατικών ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια ημέρα στη βιομηχανική ζώνη Α. Στον πίνακα αντιστοιχίας που ακολουθεί φαίνεται η συνάρτηση πιθανότητας f της Y .

y	0	1	2	3	4	5
$f(y) = P(Y = y)$	0.366	0.370	0.182	0.062	0.016	0.004
y	0	1	2	3	4	5
$f(y) = P(Y = y)$	0.366	0.370	0.182	0.062	0.016	0.004
$F(y) = P(Y \leq y)$	0.366	0.736	0.918	0.980	0.996	1.000

Συνάρτηση κατανομής διακριτής τμ

* Έστω f η συνάρτηση πιθανότητας και F η συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τ.μ. X με σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

α) Hf μπορεί να υπολογισθεί μέσω της f από τον τύπο

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(x_t), \quad x \in R.$$

β) Hf μπορεί να υπολογισθεί μέσω της F από τους τύπους
 $f(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots$

Ομοιόμορφη διακριτή τμ

Η συνάρτηση πιθανότητας f μιας ομοιόμορφης διακριτής τ.μ. X με $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_\nu\}$ είναι:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{\nu}, & x = x_1, x_2, \dots, x_\nu \\ 0, & x \neq x_1, x_2, \dots, x_\nu \end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι $F(x_k) = P(X \leq x_k) = \frac{k}{\nu}, \quad k = 1, 2, \dots, \nu.$

Παράδειγμα



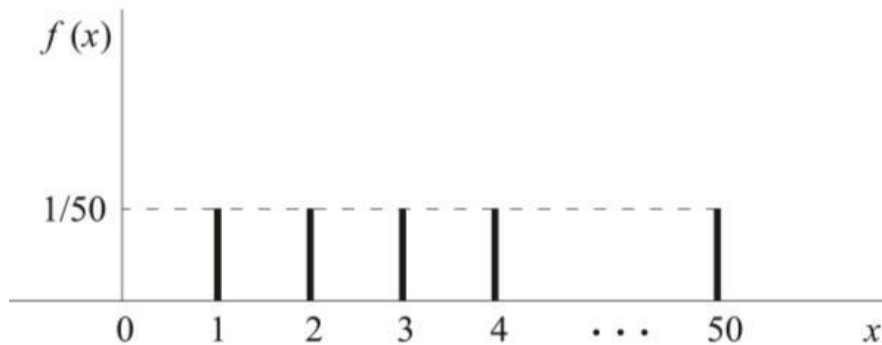
- Σε μια παρτίδα 50 προϊόντων υπάρχει ένα ελαττωματικό. Τα προϊόντα ελέγχονται το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανάθεση, μέχρι να βρεθεί το ελαττωματικό. Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν:
 - a) ακριβώς 12 έλεγχοι
 - b) το πολύ 12 έλεγχοι
 - c) περισσότεροι από 30 αλλά όχι περισσότεροι από 40 έλεγχοι

Παράδειγμα (συν)



$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{50}, & x = 1, 2, \dots, 50 \\ 0, & x \neq 1, 2, \dots, 50 \end{cases}$$

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \frac{k}{v}, \quad k = 1, 2, \dots, 50$$



Παράδειγμα (συν)



a) ακριβώς 12 έλεγχοι $P(X = 12) = f(12) = 1/50$

b) το πολύ 12 έλεγχοι $P(X \leq 12) = F(12) = 12/50$

c) περισσότεροι από 30 αλλά όχι περισσότεροι από 40 έλεγχοι
 $P(30 < X \leq 40) = F(40) - F(30) = 40/50 - 30/50 = 10/50$

Υπολογισμός πιθανότητας από CDF

• Για πραγματικούς a, b ($a < b$) και $F(x)$ αθροιστική συνάρτηση κατανομής, ισχύουν

- $P(X \leq b) = F(b)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(X < b) = F(b-)$ (αριστερό όριο της F στο x)
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a-)$
- $P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a-)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$
- $P(a < X < b) = F(b-) - F(a)$
- $P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-)$

Όμοιας αναλογίας κατανομής τυχαία μεταβλητή
Είναι ένα ομοίως αναμεταξύ τα οποία κέρδη σε ένα διαγωνισμό
για 50 ημερησίως έλεγχοι 12 ημερών
 $P(X) = P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=50)$
αναλόγως αναλογίας κατανομής τυχαία μεταβλητή
κατανομής τυχαία μεταβλητή κατανομής τυχαία μεταβλητή
κατανομής τυχαία μεταβλητή

Παράμετροι διακριτής τυχαίας μεταβλητής



Παράδειγμα



- Το κέρδος (ή ζημιά) ενός παραγωγού ανά τεμάχιο προϊόντος που παράγει είναι τυχαία μεταβλητή με τις πιθανότητες του παρακάτω πίνακα:

x (σε €)	-2	1	3	5
$f(x) = P(X = x)$	0.02	0.10	0.80	0.08

- Πόσο είναι το αναμενόμενο κέρδος;

Παράδειγμα (συν)



$$\frac{-2+1+3+5}{4} = 1.75\text{€}$$

$$(-2) \cdot 0.02 + 1 \cdot 0.10 + 3 \cdot 0.80 + 5 \cdot 0.08 = 2.86\text{€}$$



$$E(X) = (-2) \cdot P(X = -2) + 1 \cdot P(X = 1) + 3 \cdot P(X = 3) + 5 \cdot P(X = 5)$$

x (σε €)	-2	1	3	5
$f(x) = P(X = x)$	0.02	0.10	0.80	0.08

Μέση τιμή / αναμενόμενη τιμή (expected value)

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f . Η μέση τιμή της X (mean value) συμβολίζεται $E(X)$ και δίνεται από τον τύπο

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_\nu f(x_\nu) + \dots$$

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots + x_\nu P(X = x_\nu) + \dots$$

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x) = \sum_{x \in R_X} x P(X = x)$$

εφόσον η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$ συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή, αν $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| f(x_i) < \infty$

Σχόλια

- Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι μια ένδειξη για τη θέση γύρω από την οποία παίρνει τιμές η τ.μ.

Ομοιόμορφη διακριτή τμ

Η συνάρτηση πιθανότητας f μιας ομοιόμορφης διακριτής τ.μ. X με $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_\nu\}$ είναι:

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{\nu}, & x = x_1, x_2, \dots, x_\nu \\ 0, & x \neq x_1, x_2, \dots, x_\nu \end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι $F(x_k) = P(X \leq x_k) = \frac{k}{\nu}, \quad k = 1, 2, \dots, \nu$.

Υποθέτουμε $x_1 < x_2 < \dots < x_\nu$

- Η μέση τιμή της είναι

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \sum_{i=1}^{\nu} x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_\nu f(x_\nu) = \\ &= x_1 \frac{1}{\nu} + x_2 \frac{1}{\nu} + \dots + x_\nu \frac{1}{\nu} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_\nu}{\nu} \end{aligned}$$

Μέση τιμή συνάρτησης τμ

- Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f . Για οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση g της X , η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X)$ δίνεται από τον τύπο

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x)f(x)$$

εφόσον η σειρά $\sum_{x \in R_X} g(x)f(x)$ συγκλίνει απόλυτα.

Γραμμικότητα της μέσης τιμής

- Αν X διακριτή τυχαία μεταβλητή και α, β , πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

Παράδειγμα



- Ο αριθμός των προϊόντων που πουλάει μια επιχείρηση σε διάστημα μιας εβδομάδας είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, έστω X , με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \\ 0.2, & x = 1 \\ 0.6, & x = 2 \\ 0.1, & x = 3. \end{cases}$$

- Έστω ότι το κέρδος από την πώληση ενός προϊόντος είναι 200€ και ότι τα πάγια εβδομαδιαία έξοδα της επιχείρησης είναι 100€. Ενδιαφερόμαστε για το αναμενόμενο εβδομαδιαίο κέρδος της επιχείρησης

Παράδειγμα (συν)



- Πρέπει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής

$$Y = g(X) = 200X - 100$$

- Η μέση τιμή της X είναι

$$E(X) = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.1 = 1.7$$

- Οπότε η μτ της X είναι

$$E(200X - 100) = 200E(X) - 100 = 200 \cdot 1.7 - 100 = 240 \text{ €}.$$

Μέση τιμή γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων διακριτής τυχαίας μεταβλητής

- Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και k πραγματικές συναρτήσεις $g_1, g_2, g_3, \dots, g_k$ της X . Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\begin{aligned} E[\alpha_1 g_1(X) + \alpha_2 g_2(X) + \dots + \alpha_k g_k(X)] &= \\ &= \alpha_1 E[g_1(X)] + \alpha_2 E[g_2(X)] + \dots + \alpha_k E[g_k(X)] \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$E(X^2 + \beta X) = E(X^2) + \beta E(X)$$

$$E(\alpha \ln X + \beta \eta \mu X + \gamma) = \alpha E(\ln X) + \beta E(\eta \mu X) + \gamma$$

$$E[(X - \alpha)^2] = E(X^2 - 2\alpha X + \alpha^2) = E(X^2) - 2\alpha E(X) + \alpha^2$$

Μέση τιμή γραμμικού συνδυασμού διακριτών τυχαίων μεταβλητών

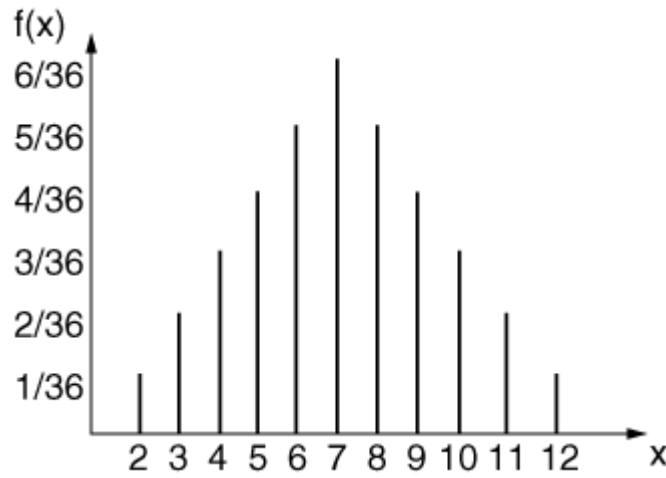
- Για οποιεσδήποτε διακριτές τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ των οποίων οι μέσες τιμές υπάρχουν και για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ ισχύει:

$$E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k) = \alpha_1 E(X_1) + \alpha_2 E(X_2) + \dots + \alpha_k E(X_k)$$

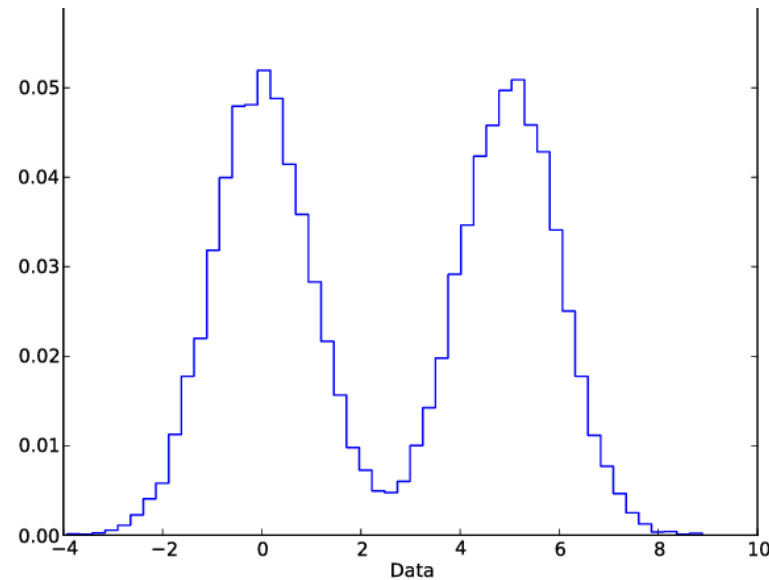
Κορυφή (mode)

Έστω $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ οι δυνατές τιμές μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X και έστω επίσης, $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k$. Μια τιμή x_v της X λέγεται κορυφή (mode) της κατανομής της αν

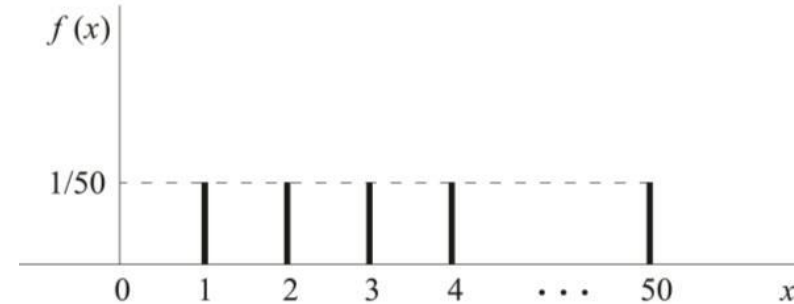
$$P(X = x_{v-1}) < P(X = x_v) \text{ και } P(X = x_{v+1}) < P(X = x_v)$$



μονοκόρυφη



δικορυφή



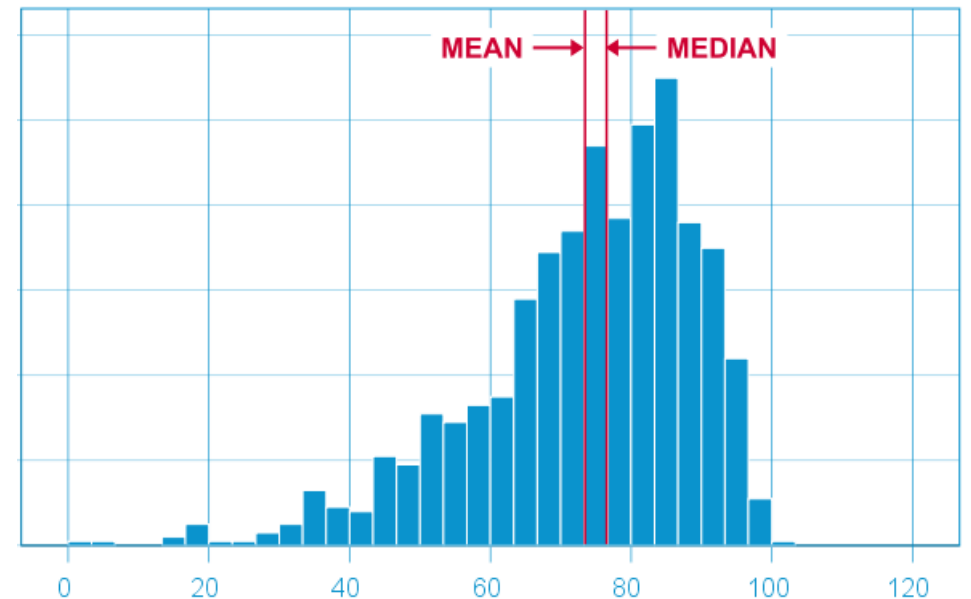
καμία κορυφή

Διάμεσος

Ένας πραγματικός αριθμός δ ονομάζεται διάμεσος (median) μιας τ.μ. ή της κατανομής μιας τ.μ. X , αν

$$P(X < \delta) \leq \frac{1}{2} \text{ και } P(X > \delta) \leq \frac{1}{2}$$

Η διάμεσος χωρίζει την κατανομή σε δύο ίσα (με όρους πιθανότητας) μέρη.



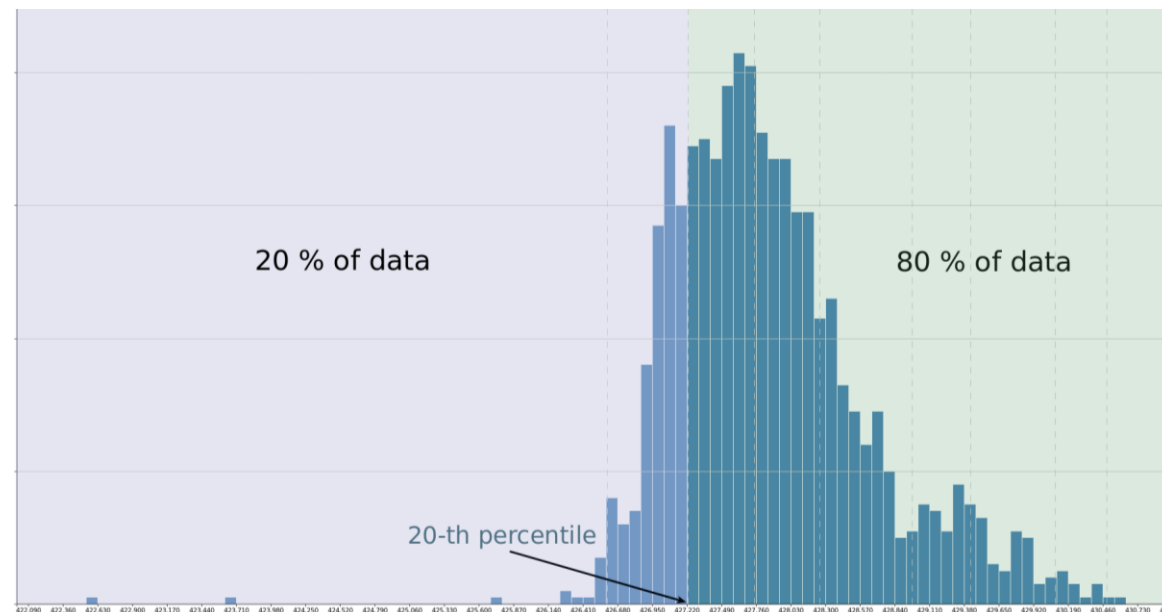
ρ-ποσοστιαίο σημείο


Ένας πραγματικός αριθμός x_p , $0 < p < 1$ ρ-ποσοστιαίο σημείο (quantile) ή 100ρ-οστό εκατοστημόριο (percentile) ή της κατανομής μιας τ.μ. X , αν

$$P(X < x_p) \leq p \text{ και } P(X > x_p) \leq 1 - p$$

το ρ-ποσοστιαίο σημείο χωρίζει την κατανομή σε δύο μέρη υπό την αναλογία p : $(1 - p)$ με $0 < p < 1$

το 0.5-ποσοστιαίο σημείο ταυτίζεται με την διαμεσο





Παράμετροι διασποράς: διακύμανση και τυπική απόκλιση



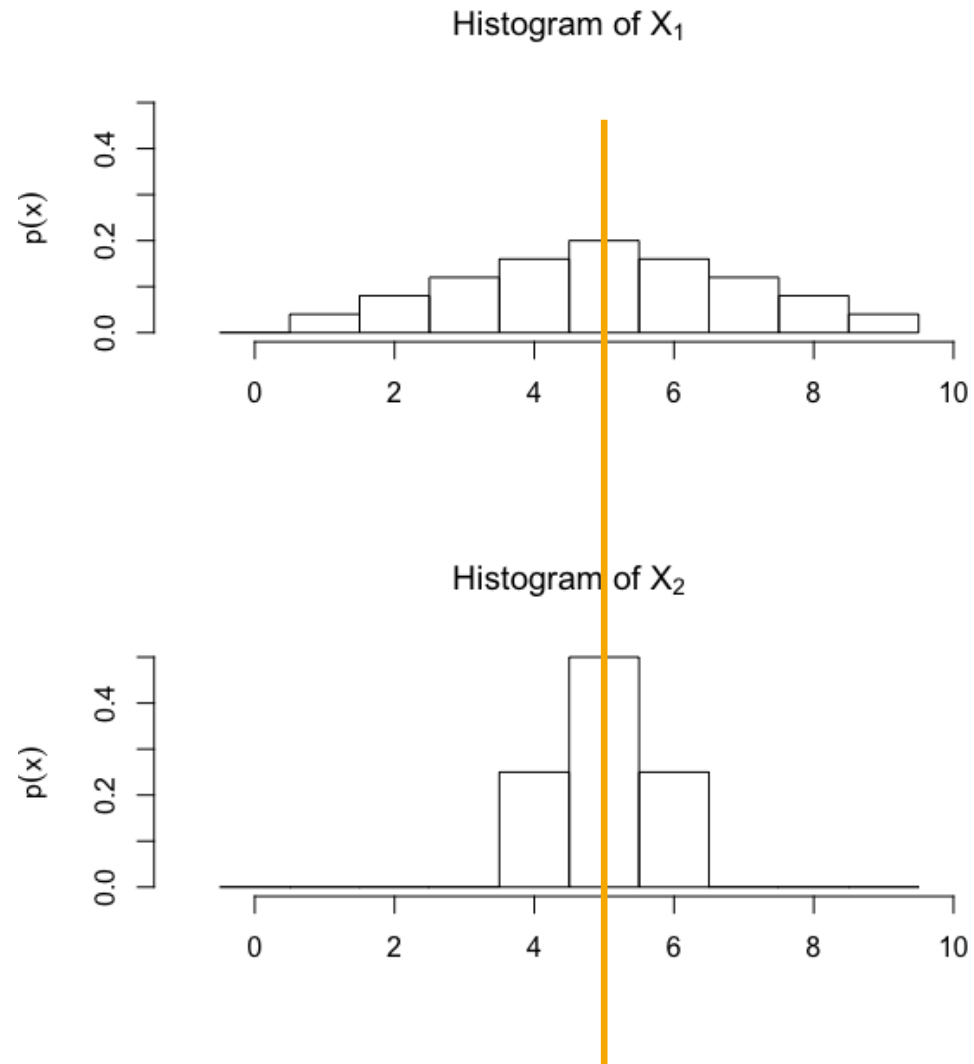
Κίνητρο

x	-1	1
$P(X = x)$	0.5	0.5

y	-1000	1000
$P(Y = y)$	0.5	0.5

Κίνητρο (συν)

- Η μέση τιμή μας δίνει όπως είδαμε μια ένδειξη για τη θέση γύρω από την οποία παίρνει τιμές η τ.μ. (σταθμισμένος μέσος)
- Δεν μας δίνει απολύτως καμία πληροφορία για το πόσο αυτές είναι διασκορπισμένες (ή συγκεντρωμένες)



Παράδειγμα



57,95	4442,23	2,56
6,37	859,28	1,25
84,64	258,63	4,85
64,58	894,27	-0,20
57,44	1683,85	8,56
8,12	895,63	2,57
54,32	1749,23	9,25
6,23	258,36	-0,23
	1857,95	-1,25
	16,37	2,59

- Η απόδοση X μιας μετοχής, έστω A , μπορεί να είναι 20%, 1% ή -20% , ανάλογα με το αν η οικονομία το ερχόμενο έτος βρεθεί σε κατάσταση ανάπτυξης, στασιμότητας ή ύφεσης. Η απόδοση Y μιας άλλης μετοχής, έστω B , μπορεί αντίστοιχα να είναι 3%, 1%, -3%. Για την οικονομία, η πιθανότητα να βρεθεί σε κατάσταση ανάπτυξης, στασιμότητας, ύφεσης, είναι αντίστοιχα 0.10, 0.80, 0.10.

Παράδειγμα (συν)



- Αναμενόμενη απόδοση της μετοχής A:

HIGH RISK

$$\mu_X = E(X) = \sum_x xf(x) = 0.2 \cdot 0.1 + 0.01 \cdot 0.8 + (-0.2) \cdot 0.1 = 0.008$$

- Αναμενόμενη απόδοση της μετοχής B:

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_y yf(y) = 0.03 \cdot 0.1 + 0.01 \cdot 0.8 + (-0.03) \cdot 0.1 = 0.008$$

LOW RISK

Μέση τιμή / αναμενόμενη τιμή (expected value)

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f . Η μέση τιμή της X (mean value) συμβολίζεται $E(X)$ και δίνεται από τον τύπο

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) + \dots$$

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots + x_n P(X = x_n) + \dots$$

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} xf(x) = \sum_{x \in R_X} xP(X = x)$$

εφόσον η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$ συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή, αν $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| f(x_i) < \infty$

Διακύμανση διακριτής τυχαίας μεταβλητής

- Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f . Έστω επίσης ότι υπάρχει η μέση τιμή $E(X) = \mu$. Διακύμανση (variance) της X ονομάζεται η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $(X - \mu)^2$ και συμβολίζεται με $Var(X)$ ή σ^2 .

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

ή

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 f(x).$$

Τυπική απόκλιση

- Η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης της X , ονομάζεται τυπική απόκλιση της X (standard deviation).

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]}$$

Σχόλια

- Η τυπική απόκλιση μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι ένα μέτρο της συγκέντρωσης (ή της διασποράς) των τιμών της γύρω από τη μέση τιμή της.
- Μια ανεπιθύμητη συνέπεια της εμφάνισης τετραγωνικής δύναμης στον ορισμό της διακύμανσης είναι ότι η μονάδα μέτρησής της δεν είναι η ίδια με τη μονάδα μέτρησης της τυχαίας μεταβλητής αλλά με το τετράγωνό της.
- Στην τυπική απόκλιση δεν εμφανίζεται το πρόβλημα αυτό .

Παράδειγμα (συν)

57,95	4442,23	2,56
6,37	859,28	1,25
84,64	258,63	4,85
64,88	894,27	-0,20
57,44	1683,85	8,56
8,12	895,63	2,57
54,32	1749,23	9,25
6,23	258,36	-0,23
	1857,95	-1,25
	16,37	2,59

- Η απόδοση X μιας μετοχής, έστω A , μπορεί να είναι 20%, 1% ή -20% , ανάλογα με το αν η οικονομία το ερχόμενο έτος βρεθεί σε κατάσταση ανάπτυξης, στασιμότητας ή ύφεσης. Η απόδοση Y μιας άλλης μετοχής, έστω B , μπορεί αντίστοιχα να είναι 3%, 1%, -3%. Για την οικονομία, η πιθανότητα να βρεθεί σε κατάσταση ανάπτυξης, στασιμότητας, ύφεσης, είναι αντίστοιχα 0.10, 0.80, 0.10.

Παράδειγμα (συν)



- Διακύμανση και την τυπική απόκλιση της απόδοσης κάθε μετοχής

$$\sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 f(x) = (0.2 - 0.008)^2 \cdot 0.1 + (0.01 - 0.008)^2 \cdot 0.8 + (-0.2 - 0.008)^2 \cdot 0.1 = 0.008$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{y \in R_Y} (y - \mu_Y)^2 f(y) = (0.03 - 0.008)^2 \cdot 0.1 + (0.01 - 0.008)^2 \cdot 0.8 + (-0.03 - 0.008)^2 \cdot 0.1 = 0.0002$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.008} = 0.089 \quad \sigma_Y = \sqrt{0.0002} = 0.014$$

$$0.089/0.014=6.357$$

Τυπική απόκλιση

- Η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης της X , ονομάζεται τυπική απόκλιση της X (standard deviation).

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]}$$

Παράδειγμα (συν)

- Αναμενόμενη απόδοση της μετοχής A: **HIGH RISK**
 $\mu_X = E(X) = \sum_x xf(x) = 0.2 \cdot 0.1 + 0.01 \cdot 0.8 + (-0.2) \cdot 0.1 = 0.008$
- Αναμενόμενη απόδοση της μετοχής B: **LOW RISK**
 $\mu_Y = E(Y) = \sum_y yf(y) = 0.03 \cdot 0.1 + 0.01 \cdot 0.8 + (-0.03) \cdot 0.1 = 0.008$

Μέση τιμή / αναμενόμενη τιμή (expected value)
Εάν η μεταβλητή τυχαία X μπορεί να πάρει τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_n με πιθανότητες $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ τότε η μέση τιμή της X είναι $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$
Εάν η μεταβλητή τυχαία Y μπορεί να πάρει τις τιμές y_1, y_2, \dots, y_m με πιθανότητες $f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_m)$ τότε η μέση τιμή της Y είναι $E(Y) = \sum_{j=1}^m y_j f(y_j)$

Χρήσιμες ιδιότητες

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(X^2) \geq [E(X)]^2, \text{ ή ισοδύναμα, } [E(X)]^2 \leq E(X^2)$$

Ομοιόμορφη τμ

- Η διακύμανση της X με βάση του του τύπου

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2}{v} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v} \right)^2$$

Ομοιόμορφη διακριτή τμ

• Η μέση τιμή της είναι

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \sum_{i=1}^v x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_v f(x_v) = \\ &= x_1 \frac{1}{v} + x_2 \frac{1}{v} + \dots + x_v \frac{1}{v} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v}\end{aligned}$$

9/4/20XX Presentation Title 44

Παράδειγμα (συν)



- Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό εργατικών ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια ημέρα στη βιομηχανική ζώνη Α. Στον πίνακα αντιστοιχίας που ακολουθεί φαίνεται η συνάρτηση πιθανότητας f της Y .

y	0	1	2	3	4	5
$f(y) = P(Y = y)$	0.366	0.370	0.182	0.062	0.016	0.004

$$E(Y) = \sum_{y \in R_Y} yf(y) = \sum_{y=0}^5 yf(y) =$$

$$= 0 \cdot (0.366) + 1 \cdot (0.370) + 2 \cdot (0.182) + 3 \cdot (0.062) + 4 \cdot (0.016) + 5 \cdot (0.004) = 1.004.$$

Μέση τιμή συνάρτησης τιμ

- Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f . Για οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση g της X , η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X)$ δίνεται από τον τύπο

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x)f(x)$$

εφόσον η σειρά $\sum_{x \in R_X} g(x)f(x)$ συγκλίνει απόλυτα

Παράδειγμα (συν)



Υπολογισμός της διακύμανσης

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) = \sum_{y \in R_Y} y^2 f(y) = \sum_{y=0}^5 y^2 f(y) =$$

$$= 0^2 \cdot (0.366) + 1^2 \cdot (0.370) + 2^2 \cdot (0.182) + 3^2 \cdot (0.062) + 4^2 \cdot (0.016) + 5^2 \cdot (0.004) = 2.02$$



$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2.02 - (1.004)^2 = 1.01$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(Y)} = \sqrt{1.01} \cong 1$$

Χρήσιμες ιδιότητες

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(X^2) \geq [E(X)]^2, \text{ ή ισοδύναμα, } [E(X)]^2 \leq E(X^2)$$

Διακύμανση και η τυπική απόκλιση του γραμμικού συνδυασμού

- Αν X διακριτή τυχαία μεταβλητή και α, β , πραγματικοί αριθμοί, τότε η διακύμανση και η τυπική απόκλιση του γραμμικού συνδυασμού $\alpha X + \beta$, δίνονται από τους τύπους

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

$$\sigma_{\alpha X + \beta} = |\alpha| \sigma_X.$$

Παράδειγμα (συν)



- Ο αριθμός των προϊόντων που πουλάει μια επιχείρηση σε διάστημα μιας εβδομάδας είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, έστω X , με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \\ 0.2, & x = 1 \\ 0.6, & x = 2 \\ 0.1, & x = 3. \end{cases}$$

- Έστω ότι το κέρδος από την πώληση ενός προϊόντος είναι 200€ και ότι τα πάγια εβδομαδιαία έξοδα της επιχείρησης είναι 100€. Ενδιαφερόμαστε για το αναμενόμενο εβδομαδιαίο κέρδος της επιχείρησης

Παράδειγμα (συν)



- Η μτ της Y είναι

$$E(200X - 100) = 200E(X) - 100 = 200 \cdot 1.7 - 100 = 240 \text{ €}.$$

- Η διακύμανση της Y είναι

$$V(200X - 100) = 200^2 V(X)$$



$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 =$$

$$= 0^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.6 + 3^2 \cdot 0.1 - (1.7)^2 = 3.5 - 2.89 = 0.61$$

$$Var(Y) = Var(200X - 100) = 200^2 Var(X) = 200^2 \cdot 0.61 = 24400 \text{ €}^2$$

$$\sigma_Y = \sqrt{24400} = 156.2 \text{ €}.$$

Διακύμανση και η τυπική απόκλιση του γραμμικού συνδυασμού

• Αν X διακριτή τυχαία μεταβλητή και α, β , πραγματικοί αριθμοί, τότε η διακύμανση και η τυπική απόκλιση του γραμμικού συνδυασμού $\alpha X + \beta$, δίνονται από τους τύπους

$$Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$$

$$\sigma_{\alpha X + \beta} = |\alpha| \sigma_X.$$

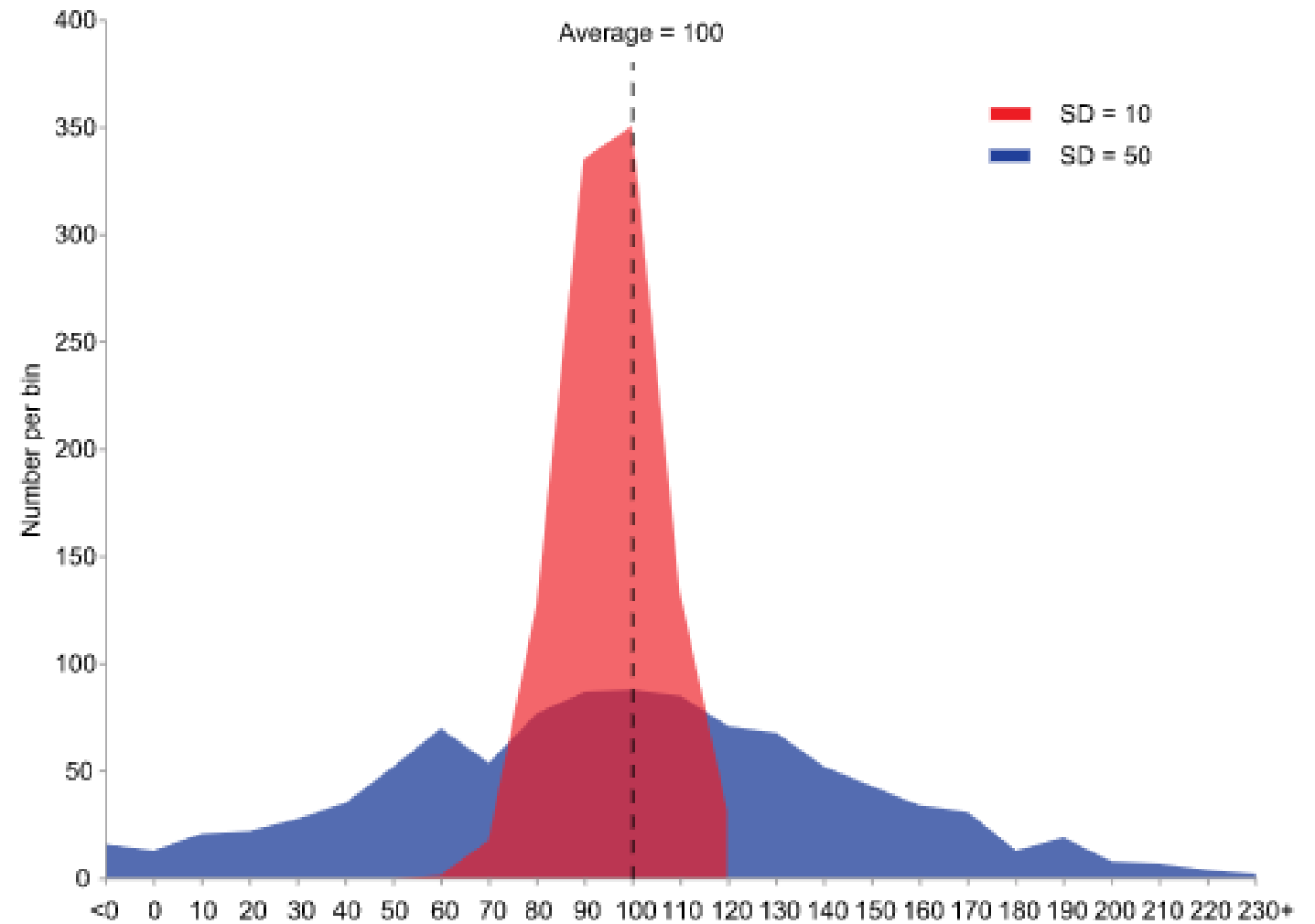
Τυποποιημένη τμ

- Μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 (άρα και τυπική απόκλιση 1), ονομάζεται τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή (standardized random variable)
- Κάθε τμ μπορεί να τυποποιηθεί αφαιρώντας την μέση τιμή και διαιρώντας με την τυπική απόκλιση

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Υπολογισμός της πιθανότητας μιας τ.μ. σε σχέση με την μέση τιμή και της τυπικής απόκλισης

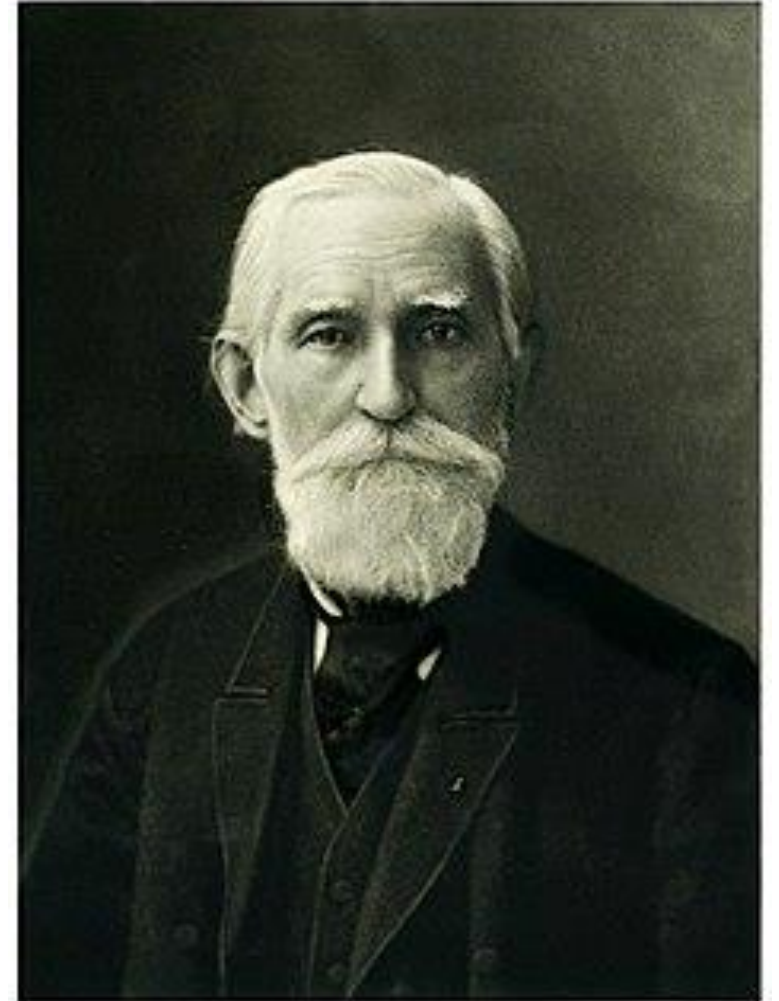
- Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι μια ένδειξη για τη θέση γύρω από την οποία παίρνει τιμές η τ.μ.
- Η τυπική απόκλιση μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι ένα μέτρο της συγκέντρωσης (ή της διασποράς) των τιμών της γύρω από τη μέση τιμή της.



Ανισότητα Chebyshev

- Αν X μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 , τότε, για κάθε $c > 0$, ισχύει ότι

$$P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$



Ανισότητα Chebyshev (συν)

- Αν θέσουμε $c = k\sigma$, τότε

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{k^2 \sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Ανισότητα Chebyshev (παραδείγματα)

- Για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X , η πιθανότητα να πάρει τιμή:
 - στο διάστημα $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ είναι τουλάχιστον 0.75
 - στο διάστημα $(\mu - 2.5\sigma, \mu + 2.5\sigma)$ είναι τουλάχιστον 0.84
 - στο διάστημα $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ είναι τουλάχιστον 0.89

k	Min. % within k standard deviations of mean
1	0%
$\sqrt{2}$	50%
1.5	55.56%
2	75%
$2\sqrt{2}$	87.5%
3	88.8889%
4	93.75%
5	96%
6	97.2222%
7	97.9592%
8	98.4375%
9	98.7654%
10	99%

Backup

Αξιωματικός ορισμός

- Έστω Ω $\Delta\mathcal{X}$ ενός πειράματος τύχης. Μια συνάρτηση $P()$ η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A του Ω αντιστοιχίζει έναν πραγματικό αριθμό $P(A)$, ονομάζεται πιθανότητα στον $\Delta\mathcal{X}$ Ω και ο αριθμός $P(A)$ θα ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου A , αν ικανοποιεί τα αξιώματα:
 1. $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A του $\Delta\mathcal{X}$ Ω
 2. $P(\Omega) = 1$
 3. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$ για οποιαδήποτε συλλογή ξένων ανά δύο ενδεχομένων A_1, A_2, A_3, \dots του $\Delta\mathcal{X}$ Ω

Ιδιότητες

• Έστω Ω ΔX ενός πειράματος τύχης. Μια συνάρτηση $P()$ η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A του Ω αντιστοιχίζει έναν πραγματικό αριθμό $P(A)$, ονομάζεται πιθανότητα στον ΔX Ω και ο αριθμός $P(A)$ θα ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου A , αν ικανοποιεί τα αξιώματα:

1. $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A του ΔX Ω
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$ για οποιαδήποτε συλλογή ξένων ανά δύο ενδεχομένων A_1, A_2, A_3, \dots του ΔX Ω

- $P(\emptyset) = 0$
- Για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ισχύει $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$ (πεπερασμένη προσθετικότητα)
- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ είναι αριθμησίμως άπειρα ενδεχόμενο του ΔX Ω , τότε $P(A) = P(\{\alpha_1\}) + P(\{\alpha_2\}) + \dots$ (ισχύει και για πεπερασμένα ενδεχόμενα)

Δεσμευμένη πιθανότητα (ορισμός)

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\chi \Omega$, και $P(B) > 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B (conditional probability) ισούται με

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Εναλλακτικός συμβολισμός: $P_B(A)$

Συμπληρωματικοί ορισμοί

- Αν σε μια εκτέλεση πειράματος εμφανίστηκε το ενδεχόμενο ω και $\omega \in A$, τότε λέμε το ενδεχόμενο A υλοποιήθηκε/συνέβη.
- Ο Ω περιέχει όλα τα ενδεχόμενα και οπότε είναι το «σίγουρο» ενδεχόμενο, ενώ το κενό σύνολο (\emptyset) είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.
- Πεπερασμένος δειγματικός χώρος (finite SS): αν ένα πείραμα έχει πεπερασμένο σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$).
- Αριθμήσιμος άπειρος ΔX (countably infinite SS): αν το πείραμα έχει άπειρα πολλά δυνατά αποτελέσματα, αλλά μπορούμε να τους αποδώσουμε ένα φυσικό αριθμό ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$).
- Συνεχής ΔX (continuous SS): αν το πείραμα έχει άπειρα πολλά δυνατά αποτελέσματα αλλά μη αριθμήσιμα.
- Διακριτός ΔX (discrete SS): Πεπερασμένος ή Αριθμήσιμος άπειρος ΔX