

Στατιστική Ι

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων και Τροφίμων,

Πανεπιστήμιο Πατρών



Διάλεξη 4η

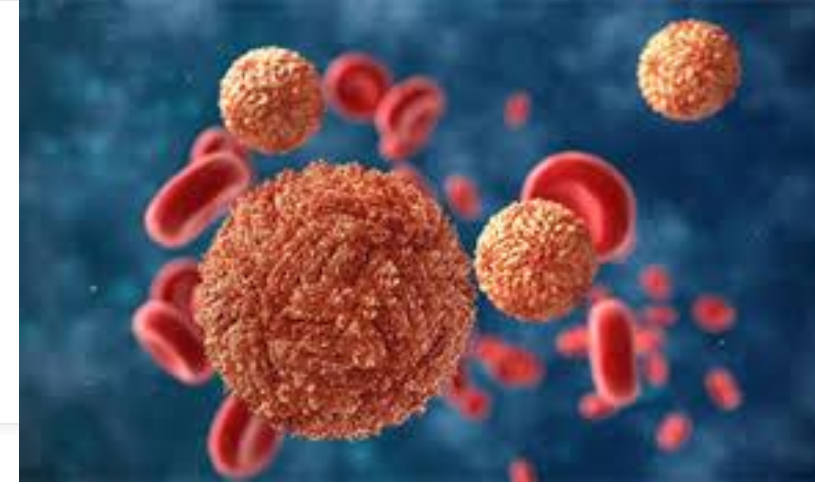
Θεώρημα του Bayes

Ανεξαρτησία ενδεχομένων



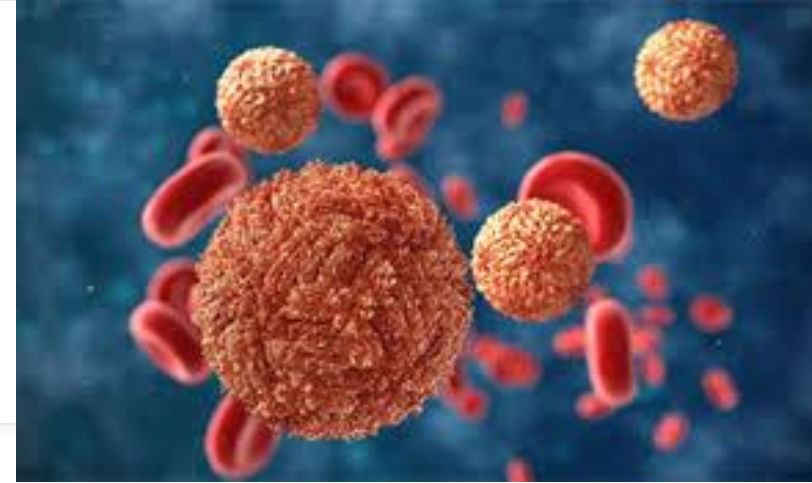
4.4 και 4.5

Παράδειγμα



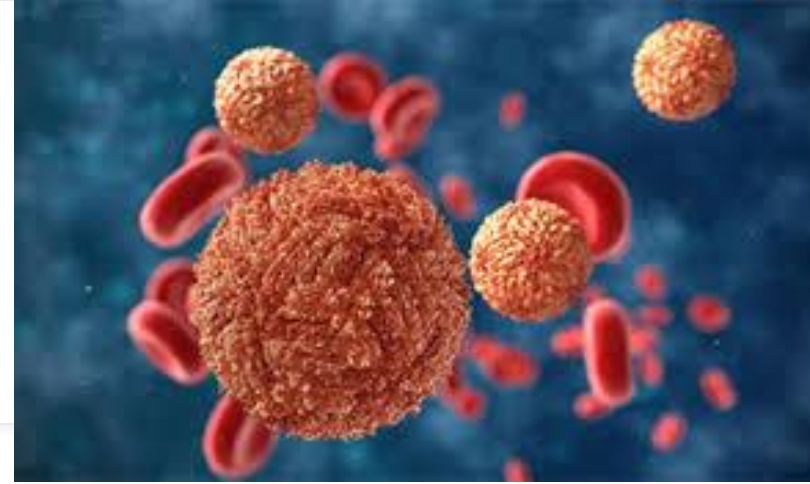
- Ποσοστό φορέων του ιού: 0.75%
- Αν κάποιος υποβληθεί σε τεστ για τον ιό:
 - Μετά την ανακοίνωση του αποτελέσματος η πιθανότητα μεταβάλλεται γιατί το τεστ δεν είναι αλάνθαστο
 - Αν το άτομο είναι πράγματι φορέας του ιού, τότε το τεστ κάνει διάγνωση με 92% ακρίβεια
 - Αν το άτομο δεν είναι φορέας του ιού, τότε το τεστ κάνει διάγνωση με 96% ακρίβεια

Παράδειγμα (συν.)



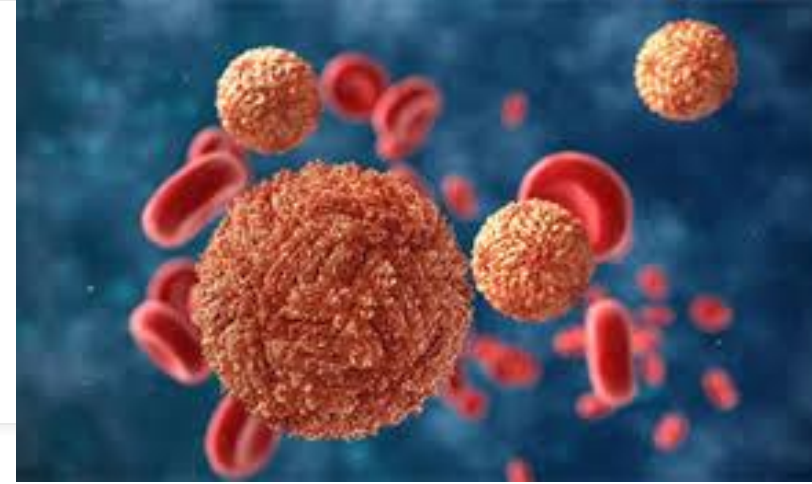
- Ενδεχόμενα:
 - B : ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
 - Θ : το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό
- Πιθανότητες από τα δεδομένα:
 - $P(B)=0.0075$
- Πως η πιθανότητα αλλάζει όταν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του τεστ για έναν κάτοικο;

Παράδειγμα (συν.)



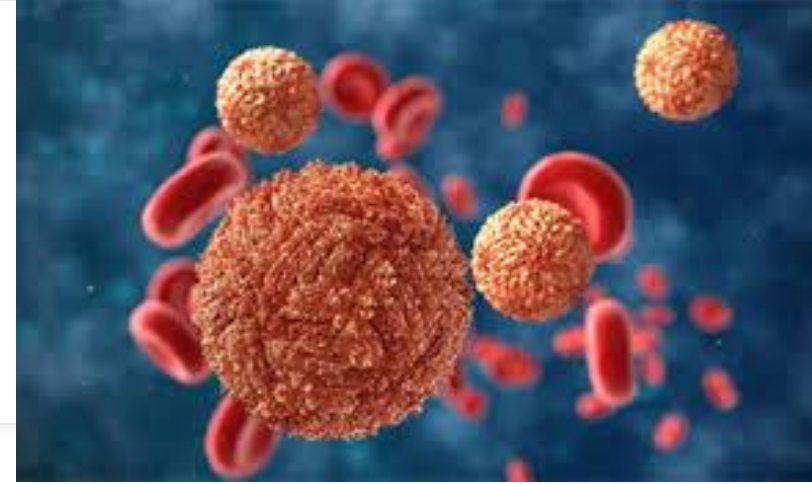
- **Ερώτηση:** ποια είναι η πιθανότητα ο συγκεκριμένος κάτοικος να είναι φορέας (ενδεχόμενο B), αν έχει πάρει τα αποτελέσματα του τέρστ (δηλ. το ενδεχόμενο Θ έχει συμβεί);
- Αν το τέρστ ήταν «τέλειο/ιδανικό» η πιθανότητα θα ήταν προφανώς 1.
- Για τα μη-τελεια τερστ: ζητάμε να υπολογίσουμε την **δεσμευμένη πιθανότητα** του B (conditional probability) δοθέντος του Θ και συμβολίζεται $P(B|\Theta)$
- Τι εννοούμε όταν γράφουμε $P(B|\Theta')$

Παράδειγμα (συν.)

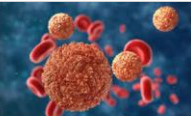


- Η πιθανότητα $P(B)$ είναι εκείνη που γνωρίζουμε πριν μάθουμε το αποτέλεσμα του τεστ και καλείται εκ των προτέρων πιθανότητα (a priori probability)
- Η πιθανότητα $P(B|\Theta)$ είναι εκείνη που προσαρμόζουμε εφόσον μάθουμε το αποτέλεσμα του τεστ και καλείται εκ των υστέρων πιθανότητα (posterior probability)

Παράδειγμα (συν.)



Παράδειγμα



- Ποσοστό φορέων του ιού: 0.75%
- Αν κάποιος υποβληθεί σε τεστ για τον ιό:
 - Μετά την ανακοίνωση του αποτελέσματος η πιθανότητα μεταβάλλεται γιατί το τεστ δεν είναι αλάνθαστο
 - Αν το άτομο είναι πράγματι φορέας του ιού, τότε το τεστ κάνει διάγνωση με 92% ακρίβεια
 - Αν το άτομο δεν είναι φορέας του ιού, τότε το τεστ κάνει διάγνωση με 96% ακρίβεια

9/4/20XX Presentation Title 3

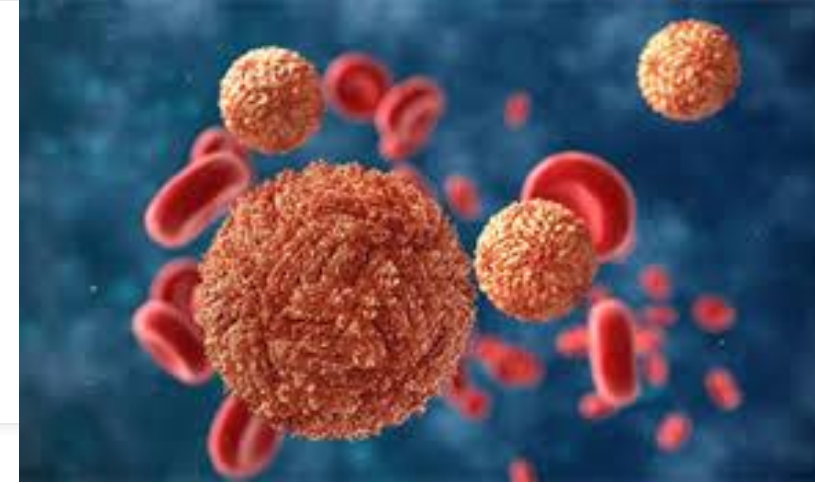
$$P(\Theta|B)=0.92$$

$$P(\Theta'|B')=0.96$$

Ενδιαφέρον να υπολογίσουμε

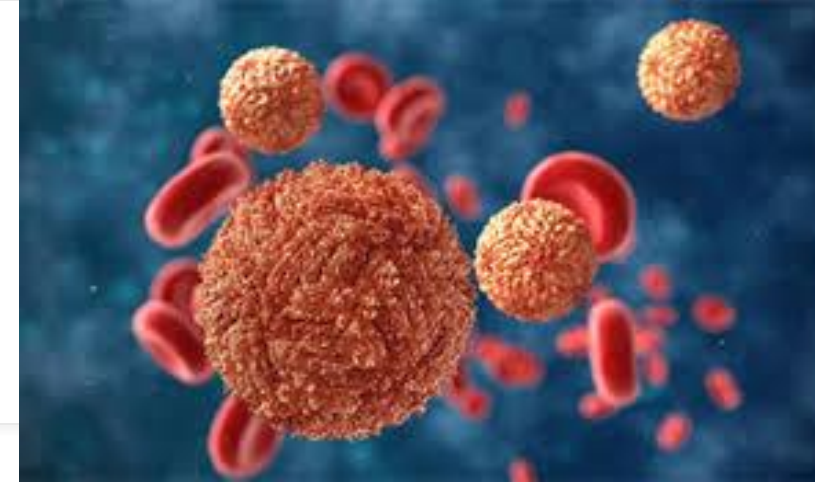
$P(B|\Theta)$, $P(B|\Theta')$ και $P(\Theta)$

Παράδειγμα (συν)




- Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος να υποβληθεί στο τεστ και να «βγει» θετικό;

Παράδειγμα (συν)



- Ενδεχόμενα:
 - B: ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
 - Θ: το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό
- Δεδομένα:
 - $P(B)=0.0075$, $P(B')=1-P(B)=0.9925$
 - $P(\Theta|B)=0.92$, $P(\Theta'|B')=0.96$
- Ζητούμενο: η πιθανότητα $P(\Theta)$

Παράδειγμα (συν.)



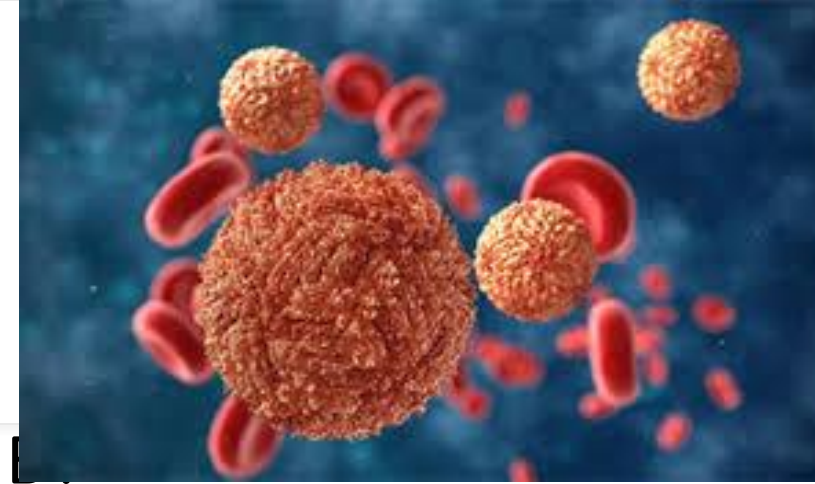
Ενδιαφέρον να υπολογίσουμε $P(B|\Theta)$, $P(B|\Theta')$ και $P(\Theta)$

$P(\Theta|B)=0.92$

$P(\Theta'|B')=0.96$

9/4/20XX Presentation Title 7

Παράδειγμα (συν.)

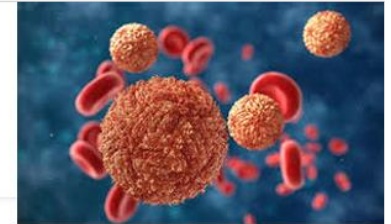


- Θεωρούμε την διαμέριση του $\Delta\chi \Omega$ βάσει των B, B'
 - Προφανώς είναι διαμέριση γιατί $B \cup B' = \Omega$ και $B \cap B' = \emptyset$
- Από το θεώρημα της ολική πιθανότητας έχουμε:
 - $P(\Theta) = P(\Theta|B) P(B) + P(\Theta|B') P(B')$

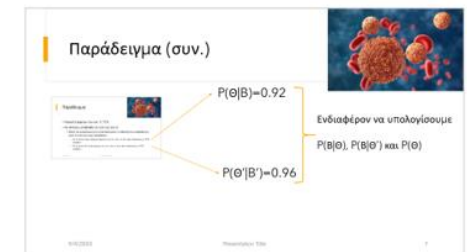
$$0.92 \quad 0.0075 \quad ? \quad 0.9925$$

Four yellow arrows point from the terms in the equation above to these numerical values: from $P(\Theta|B)$ to 0.92, from $P(B)$ to 0.0075, from $P(\Theta|B')$ to ?, and from $P(B')$ to 0.9925.

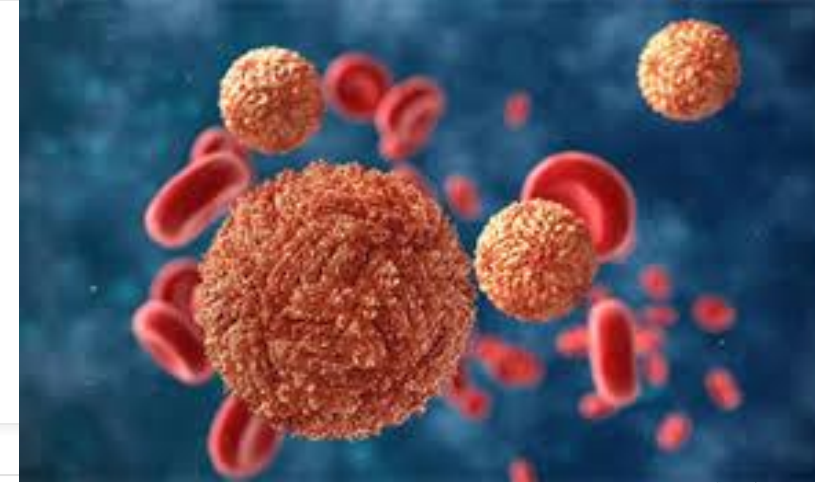
Παράδειγμα (συν)



- Ενδεχόμενα:
 - B : ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
 - Θ : το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό
- Δεδομένα:
 - $P(B)=0.0075$, $P(B')=1-P(B)=0.9925$
 - $P(\Theta|B)=0.92$, $P(\Theta'|B')=0.96$
- Ζητούμενο: η πιθανότητα $P(\Theta)$



Παράδειγμα (συν.)



- $P(\Theta|B')=1-P(\Theta'|B')=1-0.96=0.04$
- $P(\Theta) = P(\Theta|B) P(B) + P(\Theta|B') P(B')=0.92*0.0075+0.04*0.9925=0.0466$

Ιδιότητες

• Έστω B ενδεχόμενο του $\Delta X \Omega$ με $P(B)>0$, τότε:

- $P(\emptyset|B)=0$
- $P(A'|B)=1- P(A|B)$
- $P(A \cdot \Gamma|B) = P(A\Gamma|B) = P(A|B) \cdot P(\Gamma|B)$
- Αν $\Gamma \subseteq A$, τότε $P(\Gamma|B) \leq P(A|B)$
- $P(A \cup \Gamma|B) = P(A|B) + P(\Gamma|B) - P(A\Gamma|B)$

Διαφορά

• Διαφορά του B από το A [$A - B$], είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν υφίσταται το A αλλά όχι το B .

Μόρφοι: $A - B = AB'$
Αν $A \subseteq B$ τότε $A - B = \emptyset$

Ένωση

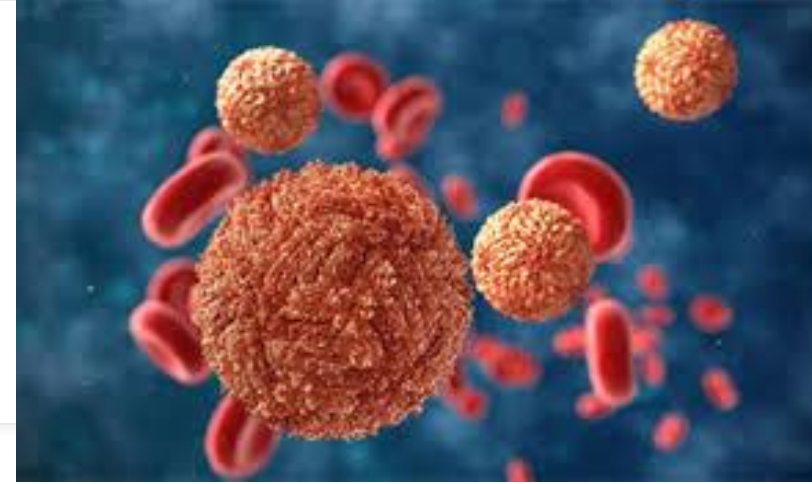
• Η Ένωση (συζ. $A \cup B$) υφίσταται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B .

Μόρφοι: $A \cup B = A$
 $A \cup B = B$
 $A \cup B = A \cup B$
Αν $A \subseteq B$ ή $A \cup B = B$
Ένωση του κοινού ενδεχόμενου

9/4/20XX

Presentation Title

Παράδειγμα (συν)



- Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος κάτοικος να υποβληθεί στο τεστ και όταν να «βγει» θετικό, να είναι πράγματι φορέας του ιού;

Παράδειγμα (συν)

Τι γνωρίζουμε/έχουμε υπολογίσει έως τώρα

- Ενδεχόμενα:
 - B: ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
 - Θ: το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό

- Πιθανότητες από τα δεδομένα:

$$P(B)=0.0075$$

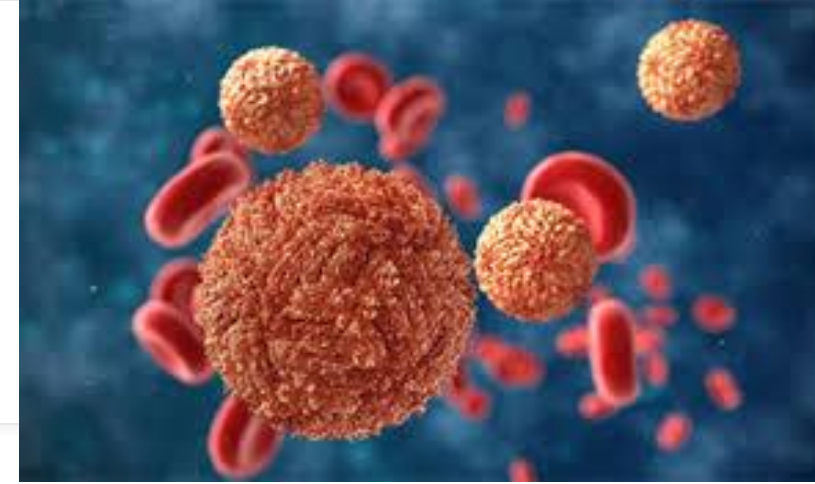
$$P(\Theta|B)=0.92$$

$$P(\Theta'|B')=0.96$$

Έχουμε υπολογίσει

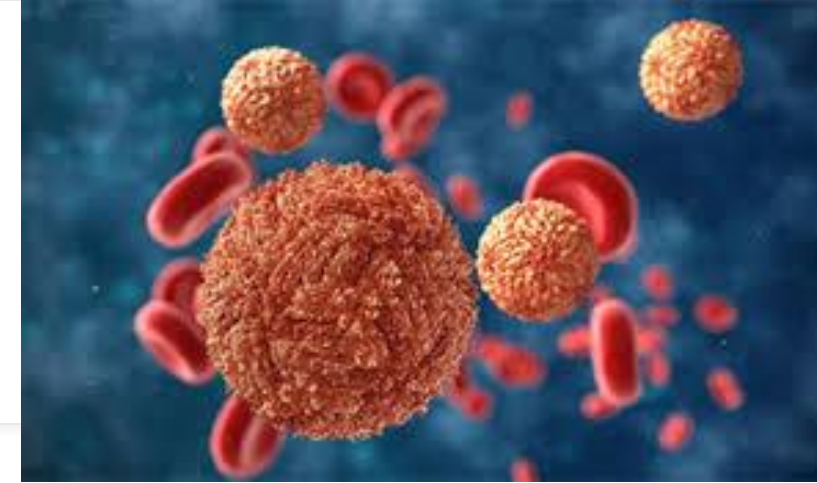
- Πιθανότητα κάποιος να υποβληθεί στο τεστ και να «βγει» θετικό

$$P(\Theta) = 0.0466$$



Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος κάτοικος να υποβληθεί στο τεστ και όταν να «βγει» θετικό, να είναι πράγματι φορέας του ιού;

Παράδειγμα (συν)



Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας

Δεσμευμένη πιθανότητα (ορισμός)

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta X \Omega$, και $P(B) > 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B (conditional probability) ισούται με

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Εναλλακτικός συμβολισμός: $P_B(A)$

9/4/20XX

Presentation Title

34

και το πολλαπλασιαστικό τύπο

Πολλαπλασιαστικός τύπος

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta X \Omega$, και $P(B) > 0$, τότε ισχύει:
 - $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$
- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta X \Omega$, και $P(A) > 0$, τότε ισχύει:
 - $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$



9/4/20XX

Presentation Title

35

$$P(B|\Theta) = \frac{P(B\Theta)}{P(\Theta)} = \frac{P(\Theta|B)P(B)}{P(\Theta)} = \frac{0.92 * 0.0075}{0.0466} = 0.1480$$

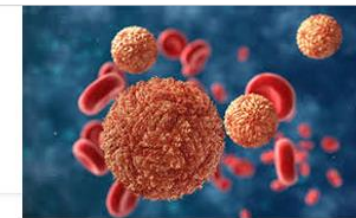
Παράδειγμα (συν)

Τι γνωρίζουμε/έχουμε υπολογίσει έως τώρα

- Ενδεχόμενα:
 - B: ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
 - Θ : το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό
- Πιθανότητες από τα δεδομένα:
 - $P(B) = 0.0075$
 - $P(\Theta|B) = 0.92$
 - $P(\Theta|B') = 0.96$

Έχουμε υπολογίσει

- Πιθανότητα κάποιος να υποβληθεί στο τεστ και να «βγει» θετικό
 $P(\Theta) = 0.0466$



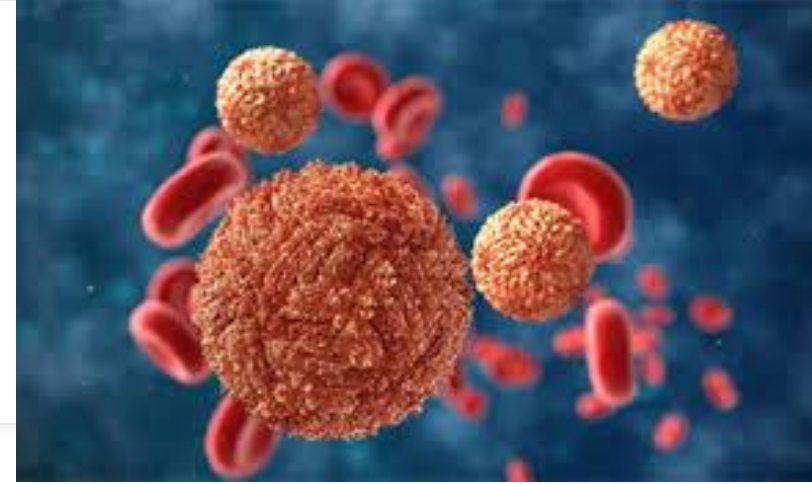
Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος κάτοικος να υποβληθεί στο τεστ και όταν να «βγει» θετικό, να είναι πράγματι φορέας του ιού;

9/4/20XX

Presentation Title

13

Παράδειγμα (συν)



- Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος κάτοικος να υποβληθεί στο τεστ και όταν να «βγει» θετικό, να είναι πράγματι φορέας του ιού;
- Απάντηση: $P(B|\Theta) = 0.1480$
- Τι σημαίνει ο αριθμός;
- Για έναν τυχαία επιλεγμένο κάτοικο που έκανε το τεστ για τον ιό, και το αποτέλεσμα βγήκε θετικό, η πιθανότητα ο συγκεκριμένος κάτοικος να έχει πραγματικά τον ιό είναι 14.8%!!!
- Η πιθανότητα ο συγκεκριμένος κάτοικος να μην φέρει τον ιό, παρόλο που έχει πάρει θετικό αποτέλεσμα στο τεστ είναι 85,2%!!!

Θεώρημα του Bayes

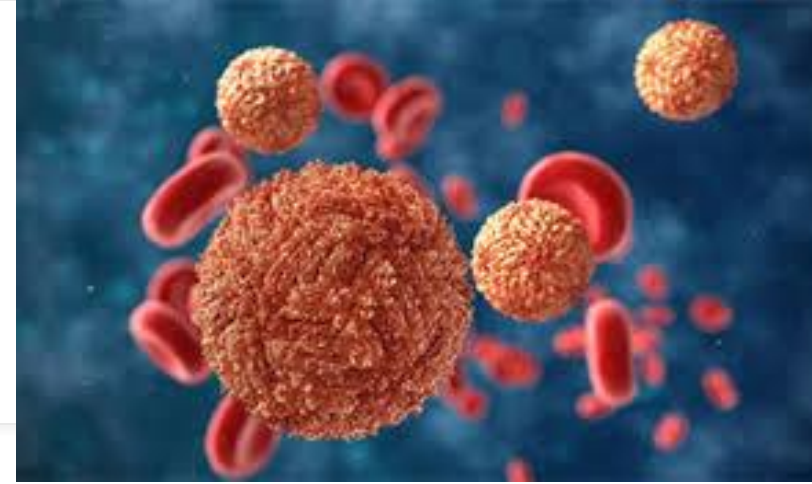
- Έστω $B_1 B_2 \dots B_n$ διαμέριση του $\Delta X \Omega$ με $P(B_i) > 0$ για όλα $i = 1, 2, \dots, n$ τότε για κάθε ενδεχόμενο A του Ω με $P(A) > 0$ ισχύει

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}$$

Θεώρημα της ολικής πιθανότητας

- Έστω $B_1 B_2 \dots B_n$ διαμέριση του $\Delta X \Omega$ ενός πειράματος τύχης με $P(B_i) > 0$ για κάθε $i = 1 \dots n$, τότε για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει ότι: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)$

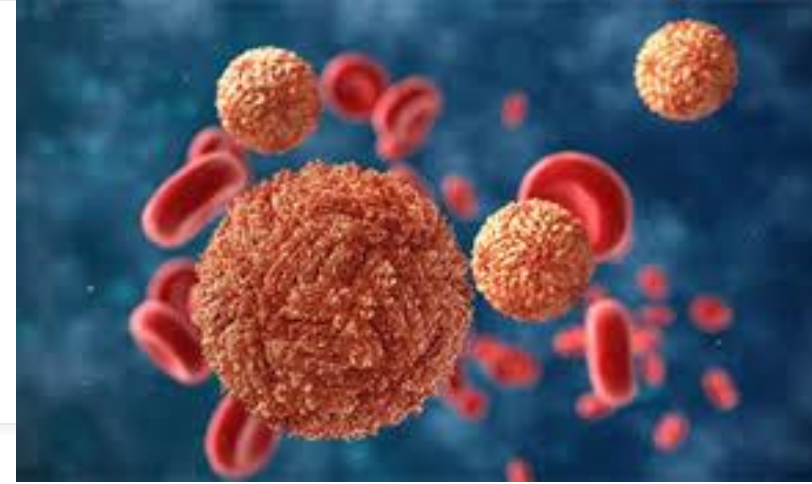
Παράδειγμα (συν)



- Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος κάτοικος να υποβληθεί στο τεστ και όταν να «βγει» θετικό, να είναι πράγματι φορέας του ιού;
- Απάντηση: $P(B|\Theta) = 0.1480$
- Τι σημαίνει ο αριθμός;
- Για έναν τυχαία επιλεγμένο κάτοικο που έκανε το τεστ για τον ιό, και το αποτέλεσμα βγήκε θετικό, η πιθανότητα ο συγκεκριμένος κάτοικος να έχει πραγματικά τον ιό είναι 14.8%!!!
- Η πιθανότητα ο συγκεκριμένος κάτοικος να μην φέρει τον ιό, παρόλο που έχει πάρει θετικό αποτέλεσμα στο τεστ είναι 85,2%!!!



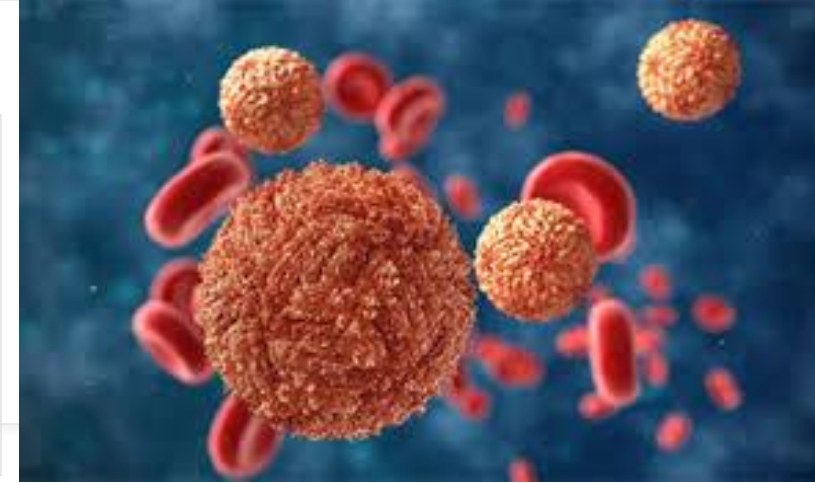
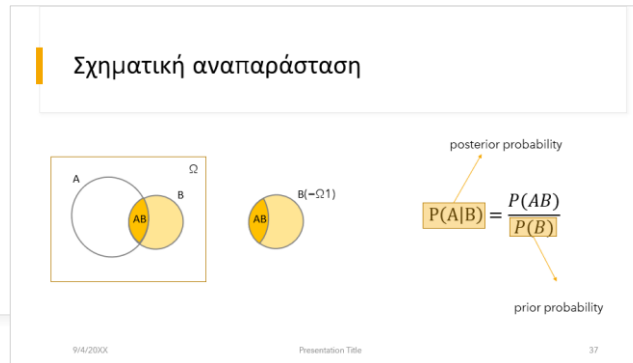
Παράδειγμα (συν)



Δεδομένα:

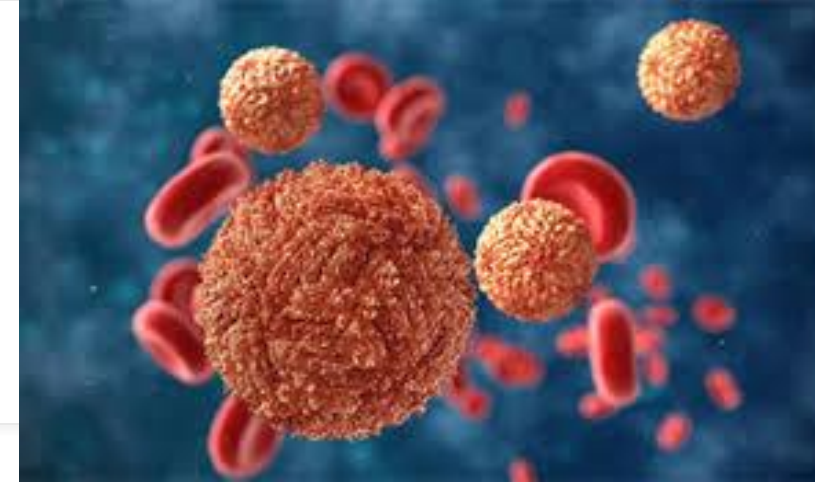
- Τα διαγνωστικό τεστ είναι πολύ αξιόπιστο. Το τεστ που διενεργείται για το αν ένας κάτοικος φέρει τον ιό:
 - κάνει σωστή διάγνωση με πιθανότητα 0.92 για τους φορείς (δηλ. αν επιλέξουμε 100 κατοίκους που φέρουν τον ιο και τους υποβάλουμε στο τεστ, για τους 92 θα βγει θετικό).
 - κάνει σωστή διάγνωση με πιθανότητα 0.96 για τους μη-φορείς (δηλ. αν επιλέξουμε 100 κατοίκους που δεν φέρουν τον ιο και τους υποβάλουμε στο τεστ, για τους 96 θα βγει αρνητικό).
 - Συνεπώς: Υπάρχει πιθανότητα 0.04 ή 4 στους 100 μη-φορείς που το τεστ τους χαρακτηρίζει ως φορείς.
- Όταν κάποιος κάτοικος υποβληθεί στο τεστ και το αποτέλεσμα βγει θετικό, τότε υπάρχει 0.1480 πιθανότητα να είναι φορέας (δηλαδή από τα 100 θετικά τεστ, μόνο 15 κάτοικοι είναι φορείς)
 - Συνεπώς, όταν κάποιος κάτοικος υποβληθεί στο τεστ και το αποτέλεσμα βγει θετικό, τότε κατά 85% πιθανότητα δεν είναι φορέας!!!

Παράδειγμα (συν)



- Γιατί;
- Υποθέτουμε μια πόλη 10000 κατοίκων:
 - Η ασθένεια είναι σπάνια (δηλ. $P(B)=0.0075$) οπότε 75 κάτοικοι φέρουν τον ιό και οι 9925 είναι μη φορείς
 - Από τους 75 φορεις το τεστ θα εντοπίσει του $0.92*75=69$, 6 φορείς δεν θα εντοπισθούν
 - Από τους 9925 μη-φορείς, οι 9528 θα βγουν αρνητικοί, ενώ $9925-9528=397$ θα βγουν θετικοί.
 - Συνεπώς στα 10000 τεστ, $397+69=466$ θα βγουν θετικά.
 - Το πηλίκο $69/466=0.1480$ είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος με θετικό αποτέλεσμα στο τεστ να είναι φορέας.
 - Αυτό συμβαίνει γιατί η πιθανότητα 0.1480 κυριαρχείται από τους 397 μη φορείς που το τεστ εντοπίζει ως θετικούς.


Παράδειγμα (συν)




- Το «παράξενο» αποτέλεσμα οφείλεται στην σπανιότητα της ασθένειας στον γενικό πληθυσμό (δηλαδή 75 στους 10000)

	P(B)			
	0.0075	0.01	0.02	0.05
P(B θ)	0.1480	0.1885	0.3194	0.5476

- **Μια διαφορετική οπτική γωνία:** Στην πραγματικότητα η πιθανότητα 14.8% είναι 20x φορές μεγαλύτερο από την αρχικό ποσοστό 0.75% στο γενικό πληθυσμό!!!



Ανεξάρτητα ενδεχόμενα



Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

- Στα παραδείγματα δεσμευμένης πιθανότητας, είδαμε ότι η πιθανότητες $P(A)$ και $P(A|B)$ ήταν γενικά διαφορετικές:
 - $P(A) < P(A|B)$
 - $P(A) > P(A|B)$
 - Δηλαδή: η γνώση ότι εμφανίστηκε το ενδεχόμενο B , μεταβάλλει την πιθανότητα/«γνώση» μας για το A
- Επίσης όταν τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα μεταξύ τους, τότε
 - $P(A|B)=0$ και $P(B|A)=0$
 - Δηλαδή: η γνώση ότι εμφανίστηκε το ενδεχόμενο B , μεταβάλλει την πιθανότητα/«γνώση» μας για το A (ότι είναι αδύνατο)
- Όταν το A είναι υποσύνολο του B , η γνώση ότι συνέβη το B μα δίνει απόλυτη γνώση για το A
 - $P(A|B)=1$

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

- Τι συμβαίνει στην περίπτωση $P(A|B) = P(A|B') = P(A)$;
- Ερμηνεία:
 - Η γνώση ότι το ενδεχόμενο B συνέβη ή δεν-συνέβη δεν προσφέρει καμία νέα γνώση σχετικά με το A.
 - Η πραγματοποίηση ή μη του ενδεχομένου B, δεν έχει καμία επίδραση στην πραγματοποίηση του A.

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

- $P(A|B) = P(A) \leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \leftrightarrow$

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = P(B) \leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

- Αν η πραγματοποίηση του B δεν έχει καμία επίδραση στο A, τότε το A δεν έχει καμία επίδραση στο B (και αντιστρόφως).

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα (ορισμός)

- Δύο ενδεχόμενα A και B του $\Delta\chi \Omega$ λέγονται ανεξάρτητα (independent events) αν ισχύει $P(AB)=P(A)P(B)$
- Αν ισχύει $P(AB) = P(A)P(B)$ τότε τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Χρήσιμες προτάσεις

- Αν A, B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα τότε είναι ανεξάρτητα και τα:
 - A' και B'
 - A και B'
 - A' και B
- Αν $P(A|B)=P(A|B')$ τότε $P(A|B)=P(A|B') = P(A)$
- Το βέβαιο Ω και αδύνατο ενδεχόμενο \emptyset είναι ανεξάρτητο με κάθε ενδεχόμενο A

Παράδειγμα



- Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 2 φορές
- Μας ενδιαφέρουν τα ενδεχόμενα:
 - Η ένδειξή στην δεύτερη ρίψη είναι «κεφαλή»
 - Η ένδειξή στην πρώτη ρίψη είναι «γράμματα»

Παράδειγμα (συν)



- Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{\kappa\kappa, \gamma\gamma, \gamma\kappa, \kappa\gamma\}$
- $A = \{\kappa\kappa, \gamma\kappa\}$ και $B = \{\gamma\gamma, \gamma\kappa\}$
- $P(A) = 2/4 = 0.5$ και $P(B) = 2/4 = 0.5$
- $P(AB) = P(\{\gamma\kappa\}) = 1/4 = 0.25$
- Οπότε $P(A)P(B) = 0.5 * 0.5 = 0.25 = P(AB)$, δηλαδή ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα (ορισμός $n > 2$)

- Θα λέμε ότι n ενδεχόμενα $A_1 A_2 \dots A_n$ ενός $\Delta\chi \Omega$ είναι ανεξάρτητα ή τελείως ανεξάρτητα αν για οποιοδήποτε σύνολο k δεικτών $i_1 i_2 \dots i_k$ από το σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$ ισχύει

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

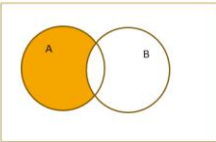
Backup

Ιδιότητες

- Έστω B ενδεχόμενο του $\Delta\chi \Omega$ με $P(B) > 0$, τότε:
 - $P(\emptyset|B) = 0$
 - $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$
 - $P(A - \Gamma|B) = P(A\Gamma'|B) = P(A|B) - P(A\Gamma|B)$
 - Αν $\Gamma \subseteq A$, τότε $P(\Gamma|B) \leq P(A|B)$
 - $P(A \cup \Gamma|B) = P(A|B) + P(\Gamma|B) - P(A\Gamma|B)$

Διαφορά

• Διαφορά του B από το A ($A - B$), είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν υλοποιείται το A αλλά όχι το B .



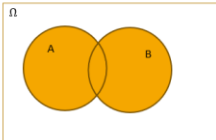
Ιδιότητες:

$$A - B = AB'$$
$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A - B = \emptyset$$

32

Ένωση

• Η ένωση (συμβ. $A \cup B$) υλοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B .



Ιδιότητες:

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$
$$A \cup A' = \Omega$$
$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A \cup B = B$$

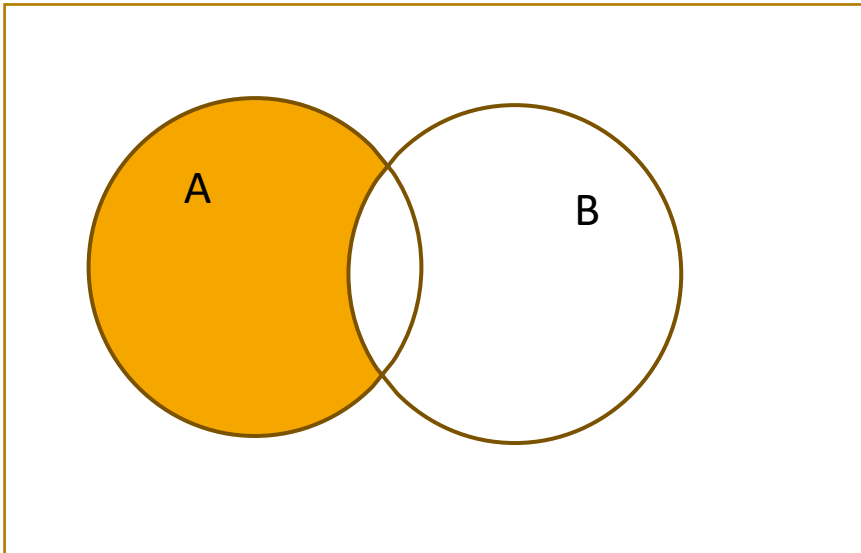
Γενίκευση και περισσότερα ενδεχόμενα

Presentation Title

33

Διαφορά

- Διαφορά του B από το A ($A - B$), είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν υλοποιείται το A αλλά όχι το B.



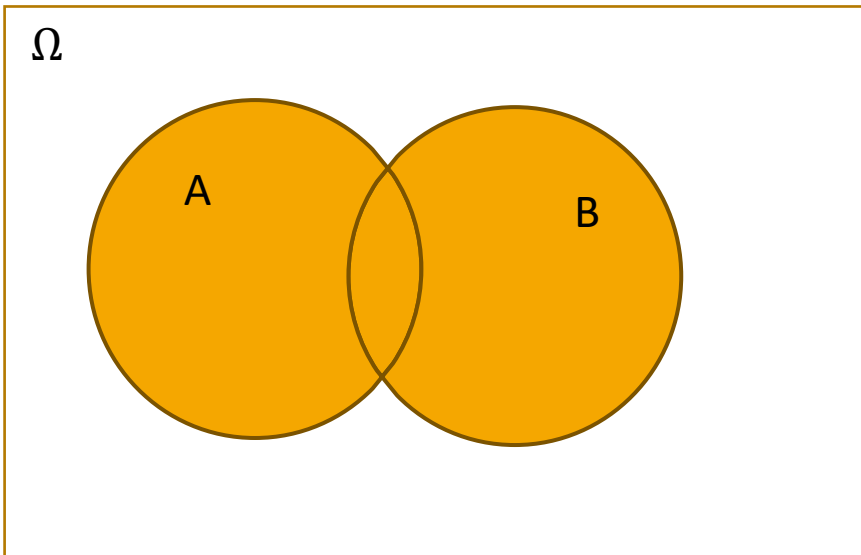
Ιδιότητες:

$$A - B = AB'$$

$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A - B = \emptyset$$

Ένωση

- Η ένωση (συμβ. $A \cup B$) υλοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B .



Ιδιότητες:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cup A' = \Omega$$

$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A \cup B = B$$

Γενίκευση και περισσότερα ενδεχόμενα

Δεσμευμένη πιθανότητα (ορισμός)

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\chi \Omega$, και $P(B) > 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B (conditional probability) ισούται με

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Εναλλακτικός συμβολισμός: $P_B(A)$

Πολλαπλασιαστικός τύπος

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\mathcal{X}$ Ω , και $P(B) > 0$, τότε ισχύει:
 - $P(AB) = P(B) * P(A|B)$
- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\mathcal{X}$ Ω , και $P(A) > 0$, τότε ισχύει:
 - $P(AB) = P(A) * P(B|A)$

Δεσμευμένη πιθανότητα (ορισμός)

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\mathcal{X}$ Ω , και $P(B) > 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B (conditional probability) ισούται με

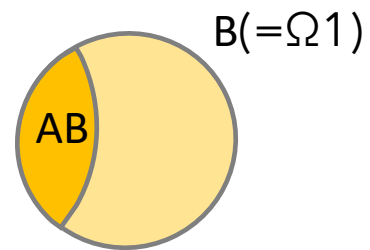
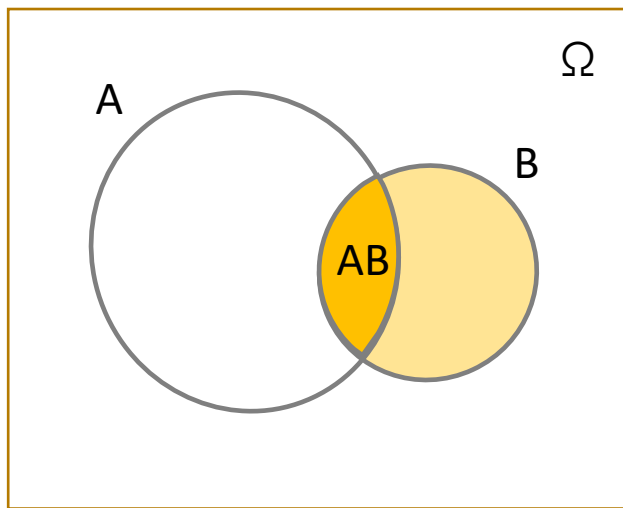
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Εναλλακτικός συμβολισμός: $P_B(A)$

Θεώρημα της ολικής πιθανότητας

- Έστω $B_1 B_2 \dots B_n$ διαμέριση του $\Delta X \Omega$ ενός πειράματος τύχης με $P(B_i) > 0$ για κάθε $i = 1 \dots n$, τότε για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει ότι:
$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)$$

Σχηματική αναπαράσταση



posterior probability

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

prior probability