

Στατιστική Ι

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων και Τροφίμων,
Πανεπιστήμιο Πατρών



Διάλεξη 3η

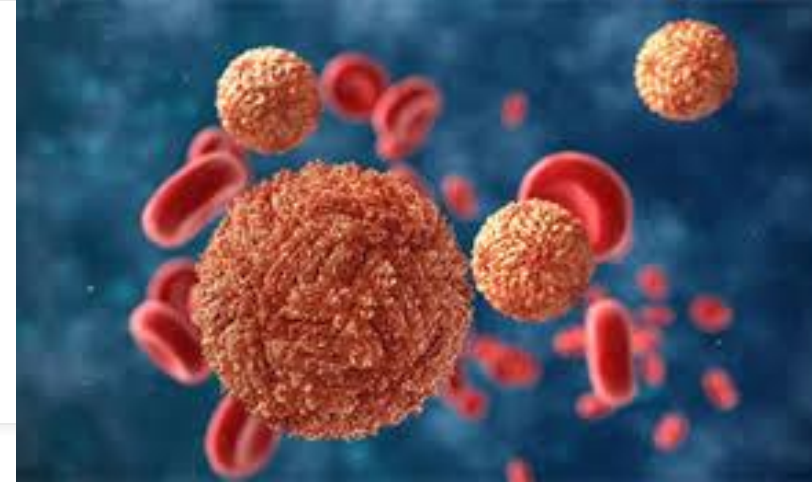


4.1 έως 4.3

Γιατί δεσμευμένη πιθανότητα

- Προκύπτει από την ερμηνεία της πιθανότητας ως μέτρο του βαθμού βεβαιότητας ενός ενδεχομένου. Είναι **δυνατό να αναθεωρηθεί και να προσαρμοσθεί κατάλληλα**, αν σε κάποιο στάδιο του τυχαίου πειράματος προκύψουν πρόσθετες πληροφορίες για την έκβασή του.
- Μια τέτοια πληροφορία μπορεί να είναι ότι κάποιο άλλο ενδεχόμενο έχει συμβεί.

Παράδειγμα



- Ποσοστό φορέων του ιού: 0.75%
- Αν κάποιος υποβληθεί σε τεστ για τον ιό:
 - Μετά την ανακοίνωση του αποτελέσματος η πιθανότητα μεταβάλλεται γιατί το τεστ δεν είναι αλάνθαστο
 - Αν το άτομο είναι πράγματι φορέας του ιού, τότε το τεστ κάνει διάγνωση με 91% ακρίβεια
 - Αν το άτομο δεν είναι φορέας του ιού, τότε το τεστ κάνει διάγνωση με 96% ακρίβεια

Παράδειγμα (συν.)

- Ενδεχόμενα:
 - B: ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
 - Θ: το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό
- Πιθανότητες από τα δεδομένα:
 - $P(B)=0.0075$
- Πως η πιθανότητα αλλάζει όταν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του τεστ για έναν κάτοικο;

Παράδειγμα (συν.)

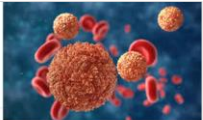
- **Ερώτηση:** ποια είναι η πιθανότητα ο συγκεκριμένος κάτοικος να είναι φορέας (ενδεχόμενο B), αν έχει πάρει τα αποτελέσματα του τέστ (δηλ. το ενδεχόμενο Θ έχει συμβεί);
- Αν το τέστ ήταν «τέλειο/ιδανικό» η πιθανότητα θα ήταν προφανώς 1.
- Για τα μη-τελεια τεστ: ζητάμε να υπολογίσουμε την **δεσμευμένη πιθανότητα** του B (conditional probability) δοθέντος του Θ και συμβολίζεται $P(B|\Theta)$
- Τι εννοούμε όταν γράφουμε $P(B|\Theta')$

Παράδειγμα (συν.)

- Η πιθανότητα $P(B)$ είναι εκείνη που γνωρίζουμε πριν μάθουμε το αποτέλεσμα του τεστ και καλείται εκ των προτέρων πιθανότητα (a priori probability)
- Η πιθανότητα $P(B|\Theta)$ είναι εκείνη που προσαρμόζουμε εφόσον μάθουμε το αποτέλεσμα του τεστ και καλείται εκ των υστέρων πιθανότητα (posterior probability)

Παράδειγμα (συν.)

Παράδειγμα



- Ποσοστό φορέων του ιού: 0.75%
- Αν κάποιος υποβληθεί σε τεστ για τον ιό:
 - Μετά την ανακοίνωση του αποτελέσματος η πιθανότητα μεταβάλλεται γιατί το τεστ δεν είναι αλάνθαστο
 - Αν το άτομο είναι πράγματι φορέας του ιού, τότε το τεστ κάνει διάγνωση με 91% ακρίβεια
 - Αν το άτομο δεν είναι φορέας του ιού, τότε το τεστ κάνει διάγνωση με 96% ακρίβεια

9/4/20XX Presentation Title 4

$$P(\Theta|B)=0.91$$

$$P(\Theta'|B')=0.96$$

Ενδιαφέρον να υπολογίσουμε

$P(B|\Theta)$, $P(B|\Theta')$ και $P(\Theta)$

Παράδειγμα



- 7 κουτιά ενός σκευάσματος σε συρτάρι φαρμακείου
- 3 κουτιά έχουν λήξει
- Πείραμα τύχης: επιλογή ενός κουτιού του σκευάσματος και κατόπιν επιλογή ενός νέου κουτιού για τον πελάτη 1 και πελάτη 2 αντίστοιχα.
- Ερώτηση: ποια η πιθανότητα ο πελάτης 2 να λάβει ληγμένο κουτί;

Παράδειγμα (συν.)

- Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
 - $\Lambda 1$: ο πελάτης 1 λαμβάνει ληγμένο κουτί
 - $\Lambda 2$: ο πελάτης 2 λαμβάνει ληγμένο κουτί
- $P(\Lambda 1) = 3/7$ και $P(\Lambda 1') = 1 - 3/7 = 4/7$
- Για τον δεύτερο πελάτη υπάρχουν δύο δυνατότητες:
 - Να έχει λάβει ο πελάτης 1 ληγμένο κουτί, οπότε εναπομένουν 2 ληγμένα: $P(\Lambda 2 | \Lambda 1) = 2/6$
 - Να έχει λάβει ο πελάτης 1 μη-ληγμένο κουτί, οπότε εναπομένουν 3 ληγμένα: $P(\Lambda 2 | \Lambda 1') = 3/6$
- Ερώτηση: ποια η πιθανότητα ο πελάτης 2 να λάβει ληγμένο κουτί;

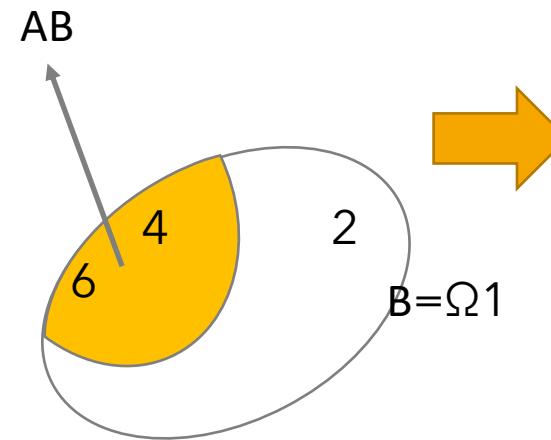
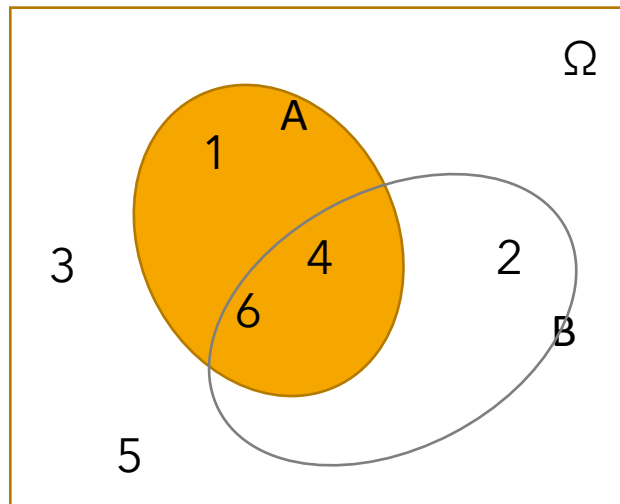
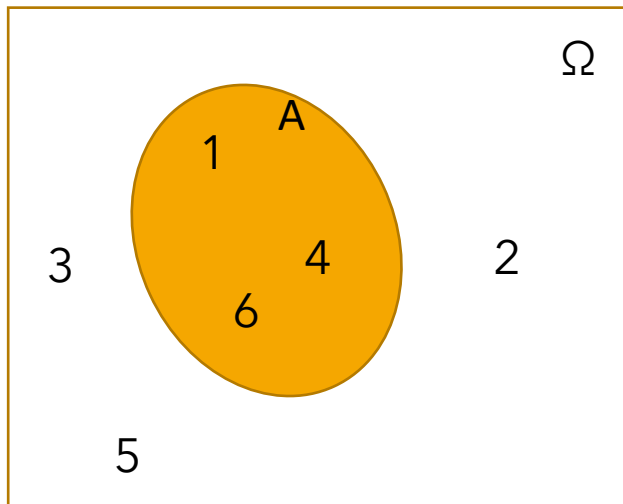
Παράδειγμα



- Έστω ότι κερδίζουμε με τα αποτελέσματα: 1, 4, 6
- Ρίχνουμε το ζάρι, και μας ανακοινώνεται ότι ήρθε ζυγός αριθμός
- Ερώτηση: Ποια είναι πιθανότητα να είμαστε νικητές;

Παράδειγμα (συν.)

- Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $A=\{1,4,6\}$ και $B=\{2,4,6\}$
- Θέλουμε να υπολογίσουμε το $P(A|B)$



$$\frac{N(AB)}{N(\Omega_1)} = \frac{2}{3} =$$
$$\frac{2/6}{3/6} = \frac{N(AB)/N(\Omega)}{N(B)/N(\Omega)} =$$
$$\frac{P(AB)}{P(B)}$$

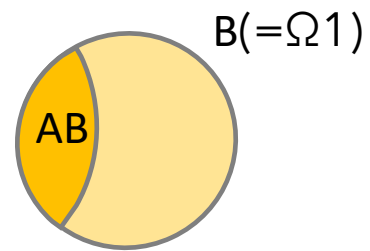
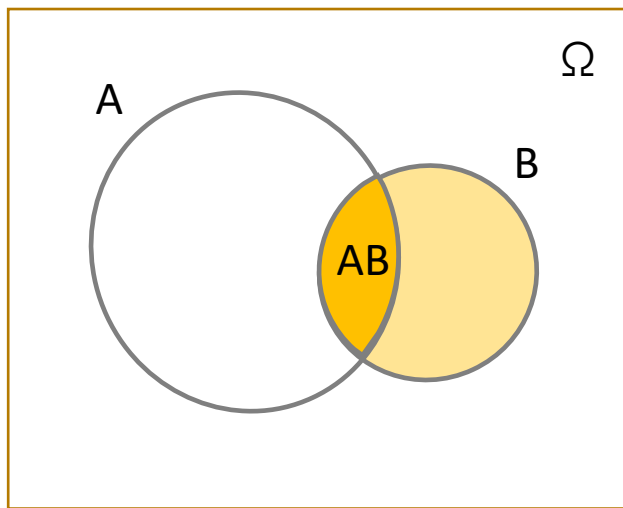
Δεσμευμένη πιθανότητα (ορισμός)

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\chi \Omega$, και $P(B) > 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B (conditional probability) ισούται με

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Εναλλακτικός συμβολισμός: $P_B(A)$

Σχηματική αναπαράσταση

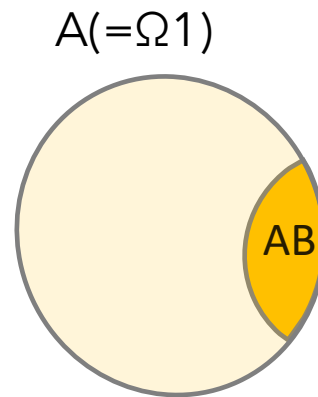
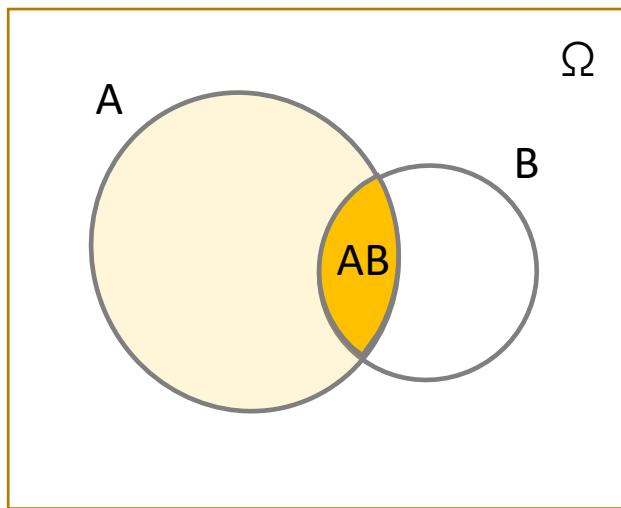


posterior probability

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

prior probability

Σχηματική αναπαράσταση



posterior probability

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

prior probability

Ιδιότητες

Έστω A, B ενδεχόμενα του $\Delta\mathcal{X}$ Ω με $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$

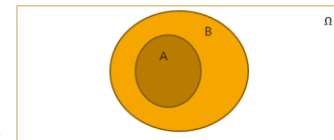
- Αν $P(A|B) > P(A)$ τότε $P(B|A) > P(B)$
 - Η εμφάνιση του ενδεχομένου B αυξάνει την πιθανότητα εμφάνισης του A και αντίστροφα (θετικά σχετιζόμενα)
- Αν $P(A|B) < P(A)$ τότε $P(B|A) < P(B)$
 - Η εμφάνιση του ενδεχομένου B μειώνει την πιθανότητα εμφάνισης του A και αντίστροφα (αρνητικά σχετιζόμενα)

Ιδιότητες

- Έστω A, B ξένα ενδεχόμενα του $\Delta X \Omega$ με $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$ τότε $P(A|B) = 0$ και $P(B|A) = 0$
- Έστω A, B ενδεχόμενα του $\Delta X \Omega$ με $B \subseteq A$ τότε $P(A|B) = 1$

Συμπεπαγωγή

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta X \Omega$. Το A συνεπάγεται το B ή ότι το A είναι υποσύνολο του B ($A \subseteq B$), αν όταν πραγματοποιείται το A τότε πραγματοποιείται και το B .



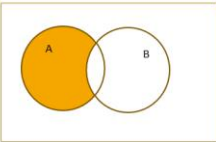
Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $B = A$

Ιδιότητες

- Έστω B ενδεχόμενο του $\Delta\chi \Omega$ με $P(B) > 0$, τότε:
 - $P(\emptyset|B) = 0$
 - $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$
 - $P(A - \Gamma|B) = P(A\Gamma'|B) = P(A|B) - P(A\Gamma|B)$
 - Αν $\Gamma \subseteq A$, τότε $P(\Gamma|B) \leq P(A|B)$
 - $P(A \cup \Gamma|B) = P(A|B) + P(\Gamma|B) - P(A\Gamma|B)$

Διαφορά

• Διαφορά του B από το A ($A - B$), είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν υλοποιείται το A αλλά όχι το B .



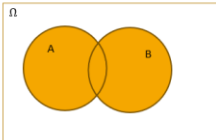
Ιδιότητες:

$$A - B = AB'$$
$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A - B = \emptyset$$

38

Ένωση

• Η ένωση (συμβ. $A \cup B$) υλοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B .



Ιδιότητες:

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$
$$A \cup A' = \Omega$$
$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A \cup B = B$$

Γενίκευση και περισσότερα ενδεχόμενα

39

Παράδειγμα

- Έστω ενδεχόμενα A, B του $\Delta\chi \Omega$ με:
 - πιθανότητα εμφάνισης του A αλλά όχι του B να είναι 0.15
 - πιθανότητα εμφάνισης του B αλλά όχι το A είναι 0.1
 - πιθανότητα να μην εμφανισθεί το A ούτε το B είναι 0.7
- Ποια η πιθανότητα να συμβεί το A όταν έχει συμβεί το B ;

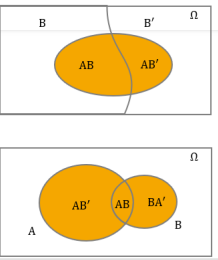
Παράδειγμα (συν.)

- Δίνονται $P(AB')=0.15$, $P(A'B)=0.1$ και $P((A \cup B)')=0.7$

Χρήσιμες ιδιότητες

$A = AB \cup AB'$
 $B = BA \cup BA'$

$A \cup B = AB' \cup B = A \cup BA' = AB' \cup AB \cup BA'$



Ιδιότητες

- $P(\emptyset) = 0$
- Για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ισχύει $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$ (πεπερασμένη προσθετικότητα)
- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ είναι αριθμησίμως άπειρα ενδεχόμενα του $\Delta\chi$, τότε $P(A) = P(\{\alpha_1\}) + P(\{\alpha_2\}) + \dots$ (ισχύει και για πεπερασμένα ενδεχόμενα)

9/4/20XX Presentation Title 41

$$P(A \cup B) = P(AB') + P(AB) + P(BA')$$

$$1 - 0.7 = 0.15 + P(AB) + 0.1 \rightarrow P(AB) = 0.05$$


$$B = BA \cup BA'$$

$$P(B) = P(BA) + P(BA') \rightarrow P(B) = 0.05 + 0.1 = 0.15$$


$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.05}{0.15} = 1/3$$

Ιδιότητες (συν.)

- Για οποιοσδήποτε ενδεχόμενο A , ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$



- Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B , ισχύει $P(A - B) = P(AB') = P(A) - P(AB)$



9/4/20XX Presentation Title 43

Δεσμευμένη πιθανότητα (ορισμός)

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\chi$, και $P(B) > 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B (conditional probability) ισούται με

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Εναλλακτικός συμβολισμός: $P_B(A)$

9/4/20XX Presentation Title 13

Ιδιότητες

- Έστω B ενδεχόμενο του $\Delta X \Omega$ με $P(B) > 0$. Ισχύουν τα ακόλουθα:
 - $P(A|B) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A του Ω
 - $P(\Omega|B) = 1$
 - $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu \cup \dots | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \dots + P(A_\nu|B) + \dots$
για οποιαδήποτε ακολουθία $A_1, A_2, \dots, A_\nu, \dots$ ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω .

Πολλαπλασιαστικός τύπος

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\mathcal{X}$ Ω , και $P(B) > 0$, τότε ισχύει:
 - $P(AB) = P(B) * P(A|B)$
- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\mathcal{X}$ Ω , και $P(A) > 0$, τότε ισχύει:
 - $P(AB) = P(A) * P(B|A)$

Δεσμευμένη πιθανότητα (ορισμός)

- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\mathcal{X}$ Ω , και $P(B) > 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B (conditional probability) ισούται με

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Εναλλακτικός συμβολισμός: $P_B(A)$

Παράδειγμα (συν.)



- 7 κουτιά ενός σκευάσματος σε συρτάρι φαρμακείου
- 3 κουτιά έχουν λήξει
- Πείραμα τύχης: επιλογή ενός κουτιού του σκευάσματος και κατόπιν επιλογή ενός νέου κουτιού για τον πελάτη1 και πελάτη2 αντίστοιχα.
- Ερωτήσεις: να υπολογισθεί η πιθανότητα
 - a) Να δοθούν και στους 2 πελάτες ληγμένα κουτιά
 - b) Να δοθούν και στους 2 πελάτες μη-ληγμένα κουτιά
 - c) Στον πελάτη1 να δοθεί κουτί ληγμένο και στον πελάτη2 μη-ληγμένο
 - d) Στον πελάτη1 να δοθεί κουτί μη-ληγμένο και στον πελάτη2 ληγμένο

Παράδειγμα (συν.)

- a) $P(\Lambda 1 \wedge 2) = P(\Lambda 1) * P(\Lambda 2 | \Lambda 1) = (3/7) * (2/6) = 1/7$
- b) $P(\Lambda 1' \wedge 2') = P(\Lambda 1') * P(\Lambda 2' | \Lambda 1') = (4/7) * (1 - P(\Lambda 2 | \Lambda 1')) = (4/7) * (3/6) = 2/7$

Παράδειγμα (συν.)

- Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
 - $\Lambda 1$: ο πελάτης 1 λαμβάνει ληγμένο κουτί
 - $\Lambda 2$: ο πελάτης 2 λαμβάνει ληγμένο κουτί
- $P(\Lambda 1) = 3/7$ και $P(\Lambda 1') = 1 - 3/7 = 4/7$
- Για τον δεύτερο πελάτη υπάρχουν δύο δυνατότητες:
 - Να έχει λάβει ο πελάτης 1 ληγμένο κουτί, οπότε εναπομένουν 2 ληγμένα: $P(\Lambda 2 | \Lambda 1) = 2/6$
 - Να έχει λάβει ο πελάτης 1 μη-ληγμένο κουτί, οπότε εναπομένουν 3 ληγμένα: $P(\Lambda 2 | \Lambda 1') = 3/6$
- Ερώτηση: ποια η πιθανότητα ο πελάτης 2 να λάβει ληγμένο κουτί;

9/4/20XX

9/4/20XX

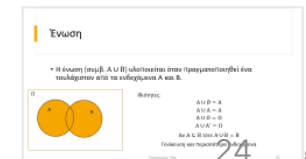
Presentation Title

Presentation Title

10

Ιδιότητες

- Έστω B ενδεχόμενο του $\Delta X \Omega$ με $P(B) > 0$, τότε:
 - $P(\emptyset | B) = 0$
 - $P(A' | B) = 1 - P(A | B)$
 - $P(A - \Gamma | B) = P(\Gamma' | B) = P(A | B) - P(\Gamma | B)$
 - Αν $\Gamma \subseteq A$, τότε $P(\Gamma | B) \leq P(A | B)$
 - $P(A \cup \Gamma | B) = P(A | B) + P(\Gamma | B) - P(\Gamma | B)$



9/4/20XX

Presentation Title

24

8

Παράδειγμα (συν.)

- c) $P(\Lambda 1 \Lambda 2') = P(\Lambda 1) * P(\Lambda 2' | \Lambda 1) = (3/7) * (1 - P(\Lambda 2 | \Lambda 1)) = (3/7) * (1 - 2/6) = 2/7$
- d) $P(\Lambda 1' \Lambda 2) = P(\Lambda 1') * P(\Lambda 2 | \Lambda 1') = (4/7) * (3/6) = 2/7$

Παράδειγμα (συν.)

- Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
 - $\Lambda 1$: ο πελάτης 1 λαμβάνει ληγμένο κουτί
 - $\Lambda 2$: ο πελάτης 2 λαμβάνει ληγμένο κουτί
- $P(\Lambda 1) = 3/7$ και $P(\Lambda 1') = 1 - 3/7 = 4/7$
- Για τον δεύτερο πελάτη υπάρχουν δύο δυνατότητες:
 - Να έχει λάβει ο πελάτης 1 ληγμένο κουτί, οπότε εναπομένουν 2 ληγμένα: $P(\Lambda 2 | \Lambda 1) = 2/6$
 - Να έχει λάβει ο πελάτης 1 μη-ληγμένο κουτί, οπότε εναπομένουν 3 ληγμένα: $P(\Lambda 2 | \Lambda 1') = 3/6$
- Ερώτηση: ποια η πιθανότητα ο πελάτης 2 να λάβει ληγμένο κουτί;

9/4/20XX

9/4/20XX

Presentation Title

Presentation Title

10

Ιδιότητες

- Έστω B ενδεχόμενο του $\Delta X \Omega$ με $P(B) > 0$, τότε:
 - $P(\emptyset | B) = 0$
 - $P(A' | B) = 1 - P(A | B)$
 - $P(A - \Gamma | B) = P(\Gamma' | B) = P(A | B) - P(\Gamma | B)$
 - Αν $\Gamma \subseteq A$, τότε $P(\Gamma | B) \leq P(A | B)$
 - $P(A \cup \Gamma | B) = P(A | B) + P(\Gamma | B) - P(\Gamma | B)$

Διαφορά

• Διαφορά του B από το A [$A - B$] είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν υφίσταται το A αλλά όχι το B.

Κώδικες: $A - B = AB$
Αν $A \subseteq B$ τότε $A - B = \emptyset$

Ένωση

• Η Ένωση (συν.) $A \cup B$ υφίσταται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B.

Κώδικες: $A \cup B = A + B - AB$
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$
Γινόμενο και παραγοντικό: $A \cap B = AB$
Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε $A \cap B = \emptyset$

9/4/20XX

Presentation Title

25 8

Παράδειγμα (συν.)

- Τα ενδεχόμενα $\Lambda_1\Lambda_2$, $\Lambda_1'\Lambda_2'$, $\Lambda_1\Lambda_2'$ και $\Lambda_1'\Lambda_2$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, οπότε

Ιδιότητες

- $P(\emptyset) = 0$
- Για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ισχύει $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$ (πεπερασμένη προσθετικότητα)
- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ είναι αριθμησίμως άπειρα ενδεχόμενο του ΔX Ω , τότε $P(A) = P(\{\alpha_1\}) + P(\{\alpha_2\}) + \dots$ (ισχύει και για πεπερασμένα ενδεχόμενα)

$$P(\Lambda_1\Lambda_2) + P(\Lambda_1'\Lambda_2') + P(\Lambda_1\Lambda_2') + P(\Lambda_1'\Lambda_2) = 1$$

Αναμενόμενο γιατί καλύπτουν όλο τον ΔX .

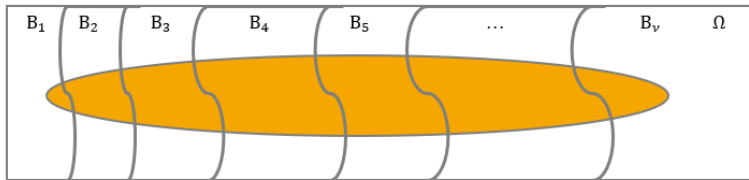
Πολλαπλασιαστικός νόμος

- Έστω n A_1, A_2, \dots, A_n ενδεχόμενα του $\Delta\chi \Omega$ με $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$
τότε $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$

Θεώρημα της ολικής πιθανότητας (βασική ιδέα)

Διαμέριση ενδεχομένου

- Έστω B_1, B_2, \dots, B_ν διαμέριση και A οποιοδήποτε ενδεχόμενο του ΔX Ω , τότε τα ενδεχόμενα $AB_1, AB_2, \dots, AB_\nu$ είναι επίσης διαμέριση.



- Πρακτική σημασία: όταν υλοποιείται το A , τότε πραγματοποιείται σε συνδυασμό μόνο με ένα από τα B_1, B_2, \dots, B_ν

44

$$P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_\nu)$$

Ιδιότητες

- $P(\emptyset) = 0$
- Για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\nu$ ισχύει $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_\nu)$ (πεπερασμένη προσθετικότητα)
- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ είναι αριθμησίμως άπειρα ενδεχόμενα του ΔX Ω , τότε $P(A) = P(\{\alpha_1\}) + P(\{\alpha_2\}) + \dots$ (ισχύει και για πεπερασμένα ενδεχόμενα)

9/4/20XX

Presentation Title

41

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_\nu)$$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_\nu)P(B_\nu)$$

Θεώρημα της ολικής πιθανότητας

- Έστω $B_1 B_2 \dots B_n$ διαμέριση του $\Delta X \Omega$ ενός πειράματος τύχης με $P(B_i) > 0$ για κάθε $i = 1 \dots n$, τότε για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει ότι:
$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)$$

Θεώρημα της ολικής πιθανότητας (ερμηνεία)

- Με τον τύπο $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)$ η μη δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου A , εκφράζεται ως ο **σταθμισμένος μέσος όρος των επιμέρους δεσμευμένων πιθανοτήτων** $P(A|B_i)$ (με συντελεστές στάθμισης την αντίστοιχη πιθανότητα της διαμέρισης)

Χρήσιμη ειδική περίπτωση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας

- Έστω ενδεχόμενα A, B του $\Delta\chi \Omega$ με $P(B) > 0$
- Τα ενδεχόμενα B και B' αποτελούν διαμέριση του Ω γιατί $B \cup B' = \Omega$ και $B \cap B' = \emptyset$
- Επομένως ισχύει:

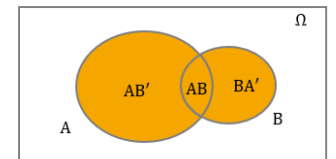
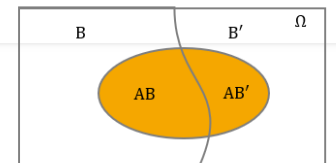
$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')$$

Χρήσιμες ιδιότητες

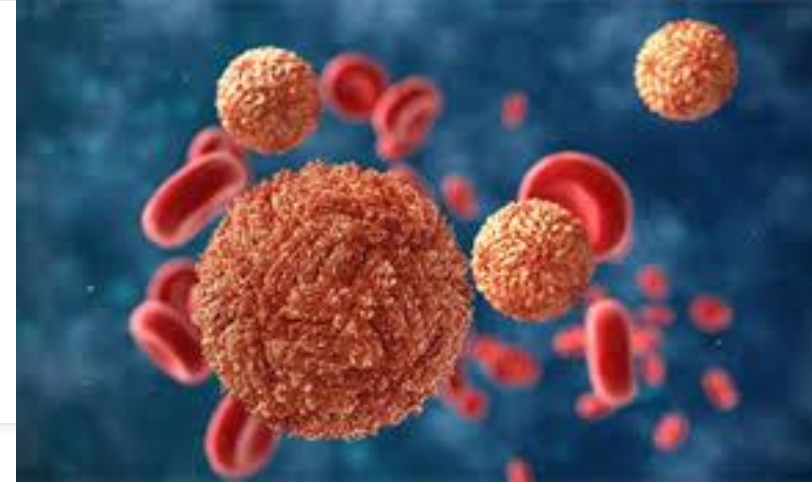
$$A = AB \cup AB'$$

$$B = BA \cup BA'$$

$$A \cup B = AB' \cup B = A \cup BA' = AB' \cup AB \cup BA'$$



Παράδειγμα (συν)



- Ποσοστό φορέων του ιού: 0.75%
- Αν κάποιος υποβληθεί σε τεστ για τον ιό:
 - Μετά την ανακοίνωση του αποτελέσματος η πιθανότητα μεταβάλλεται γιατί το τεστ δεν είναι αλάνθαστο
 - Αν το άτομο είναι πράγματι φορέας του ιού, τότε το τεστ κάνει διάγνωση με 91% ακρίβεια
 - Αν το άτομο δεν είναι φορέας του ιού, τότε το τεστ κάνει διάγνωση με 96% ακρίβεια
- Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος να υποβληθεί στο τεστ και να «βγει» θετικό;

Παράδειγμα (συν)

- Ενδεχόμενα:
 - B: ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
 - Θ: το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό
- Δεδομένα:
 - $P(B)=0.0075$, $P(B')=1-P(B)=0.9925$
 - $P(\Theta|B)=0.92$, $P(\Theta'|B')=0.96$
- Ζητούμενο: η πιθανότητα $P(\Theta)$

Παράδειγμα (συν.)

Παράδειγμα

- Ποσοστό φορέων του ιού: 0.75%
- Αν κάποιος υποβληθεί σε τεστ για τον ιό:
 - Είναι πιο ακριβές από οποιοδήποτε άλλο τεστ για τον ιό: γιατί το ποσοστό των αληθινών θετικών είναι 92%
 - Αν κάποιος είναι φορέας του ιού, τότε το τεστ είναι θετικό με 92% πιθανότητα
 - Αν κάποιος δεν είναι φορέας του ιού, τότε το τεστ είναι αρνητικό με 96% πιθανότητα

$P(\Theta|B)=0.91$

$P(\Theta'|B')=0.96$

Ενδιαφέρον να υπολογίσουμε $P(B|\Theta)$, $P(B|\Theta')$ και $P(\Theta)$

9/4/20XX Presentation Title 8

Παράδειγμα (συν.)

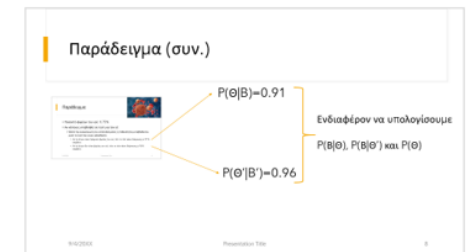
- Θεωρούμε την διαμέριση του $\Delta\chi \Omega$ βάσει των B, B' .
 - Προφανώς είναι διαμέριση γιατί $B \cup B' = \Omega$ και $B \cap B' = \emptyset$
- Από το θεώρημα της ολική πιθανότητας έχουμε:
 - $P(\Theta) = P(\Theta|B) P(B) + P(\Theta|B') P(B')$

$$0.92 \quad 0.0075 \quad ? \quad 0.9925$$

Four orange arrows point from the terms in the equation above to the corresponding values below: from $P(\Theta|B)$ to 0.92, from $P(B)$ to 0.0075, from $P(\Theta|B')$ to ?, and from $P(B')$ to 0.9925.

Παράδειγμα (συν)

- Ενδεχόμενα:
 - B : ο κάτοικος είναι φορέας του ιού
 - Θ : το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό
- Δεδομένα:
 - $P(B)=0.0075, P(B')=1-P(B)=0.9925$
 - $P(\Theta|B)=0.92, P(\Theta'|B')=0.96$
- Ζητούμενο: η πιθανότητα $P(\Theta)$



Παράδειγμα (συν.)

- $P(\Theta|B')=1-P(\Theta'|B')=1-0.96=0.04$
- $P(\Theta) = P(\Theta|B) P(B) + P(\Theta|B') P(B')=0.92*0.0075+0.04*0.9925=0.0466$

Ιδιότητες

• Έστω B ενδεχόμενο του $\Delta X \Omega$ με $P(B)>0$, τότε:

- $P(\emptyset|B)=0$
- $P(A'|B)=1-P(A|B)$
- $P(A \cdot \Gamma|B) = P(A\Gamma|B) = P(A|B) \cdot P(\Gamma|B)$
- Αν $\Gamma \subseteq A$, τότε $P(\Gamma|B) \leq P(A|B)$
- $P(A \cup \Gamma|B) = P(A|B) + P(\Gamma|B) - P(A\Gamma|B)$

9/4/20XX

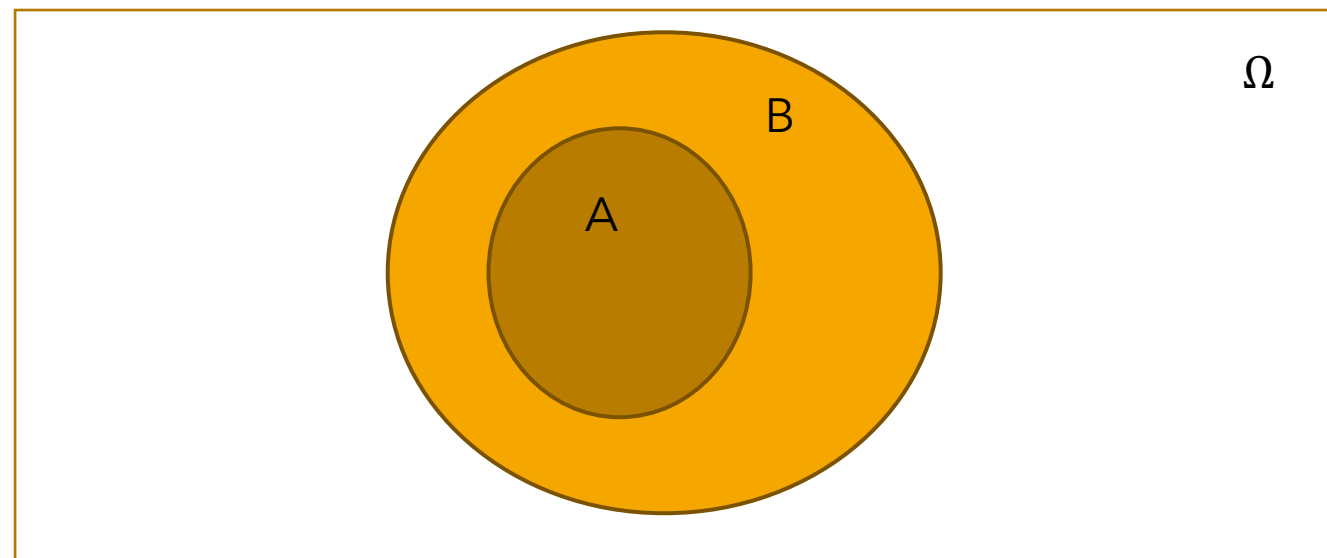
Presentation Title

8

Backup

Συνεπαγωγή

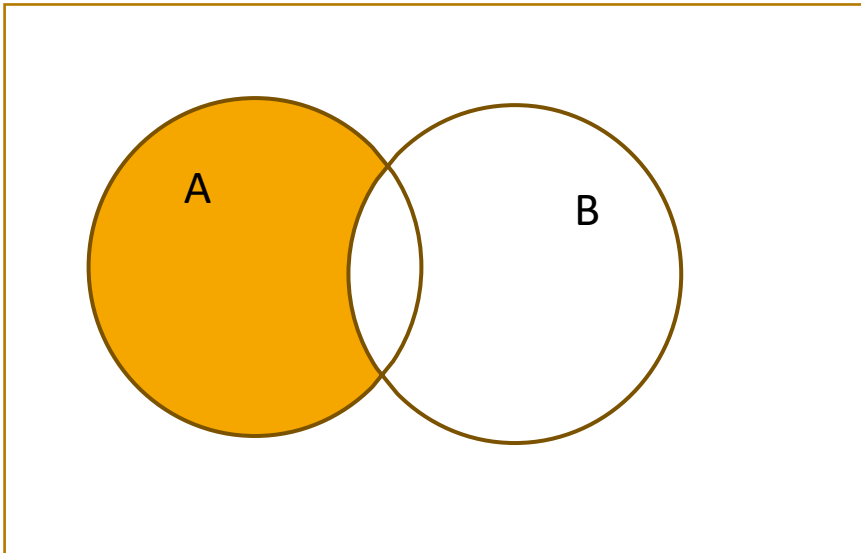
- Έστω ενδεχόμενα A και B του $\Delta\chi \Omega$. Το A συνεπάγεται το B ή ότι το A είναι υποσύνολο του B ($A \subseteq B$), αν όταν πραγματοποιείται το A τότε πραγματοποιείται και το B .



Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $B = A$

Διαφορά

- Διαφορά του B από το A ($A - B$), είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν υλοποιείται το A αλλά όχι το B.



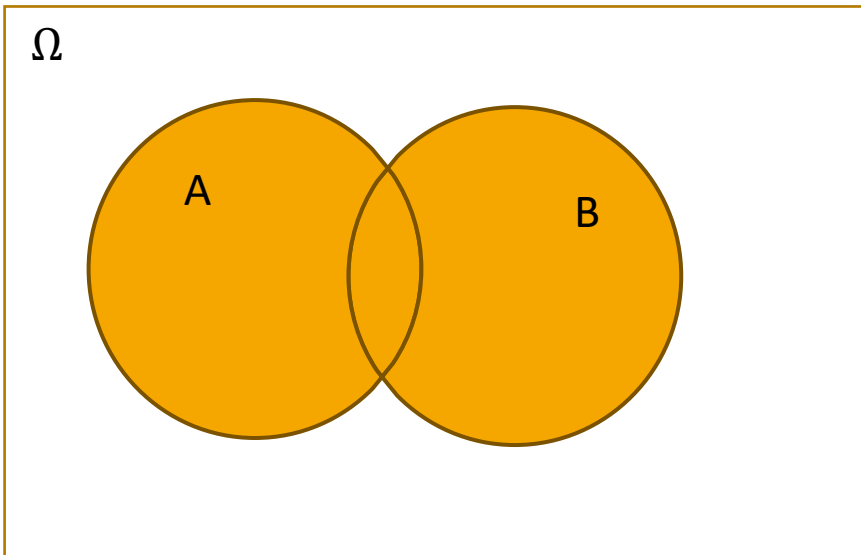
Ιδιότητες:

$$A - B = AB'$$

$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A - B = \emptyset$$

Ένωση

- Η ένωση (συμβ. $A \cup B$) υλοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B .



Ιδιότητες:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cup A' = \Omega$$

$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A \cup B = B$$

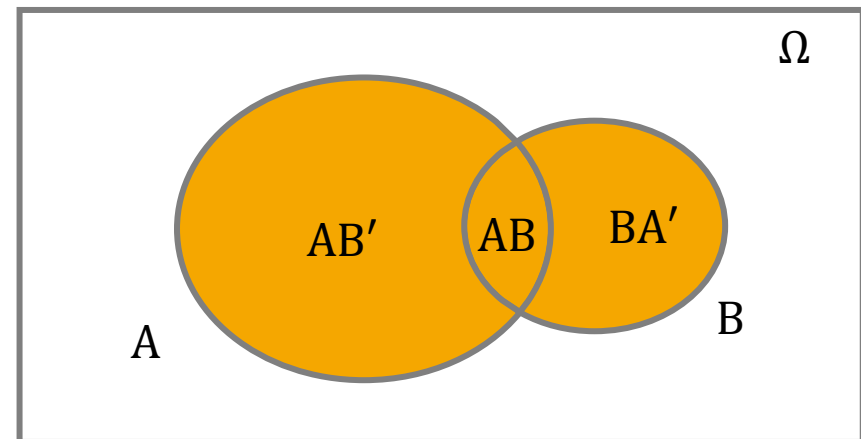
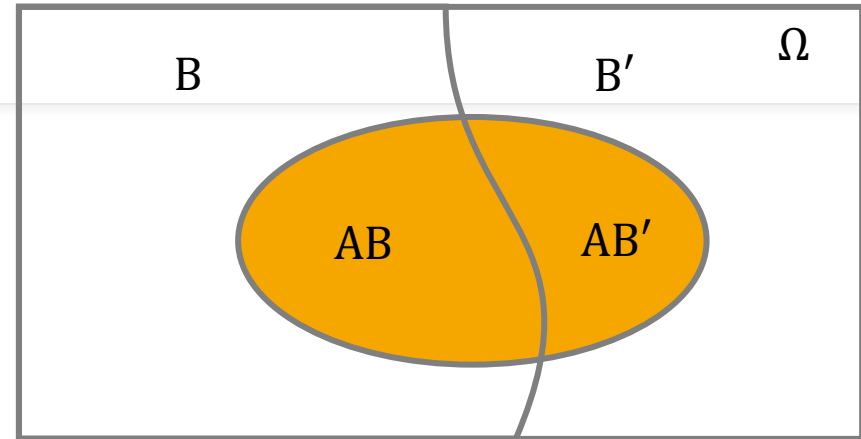
Γενίκευση και περισσότερα ενδεχόμενα

Χρήσιμες ιδιότητες

$$A = AB \cup AB'$$

$$B = BA \cup BA'$$

$$A \cup B = AB' \cup B = A \cup BA' = AB' \cup AB \cup BA'$$

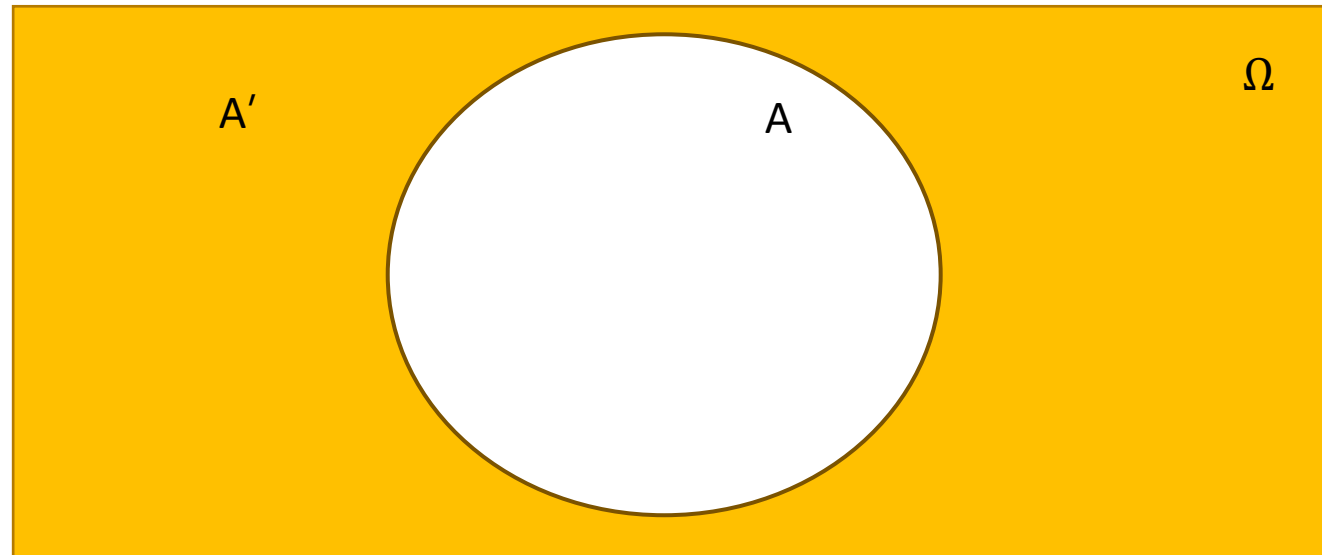


Ιδιότητες

- $P(\emptyset) = 0$
- Για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ισχύει $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$ (πεπερασμένη προσθετικότητα)
- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ είναι αριθμησίμως άπειρα ενδεχόμενο του ΔX Ω , τότε $P(A) = P(\{\alpha_1\}) + P(\{\alpha_2\}) + \dots$ (ισχύει και για πεπερασμένα ενδεχόμενα)

Συμπλήρωμα

- Το συμπλήρωμα του A (συμβ. A'), πραγματοποιείται αν και μόνο αν δεν πραγματοποιείται το A



$$\Omega' = \emptyset$$

Ιδιότητες (συν.)

- Για οποιοσδήποτε ενδεχόμενο A , ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$

Συμπλήρωμα

- Το συμπλήρωμα του A (συμβ. A'), πραγματοποιείται αν και μόνο αν δεν πραγματοποιείται το A

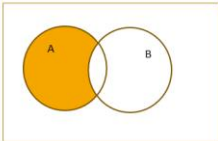


$\Omega' = \emptyset$

- Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B , ισχύει $P(A - B) = P(AB') = P(A) - P(AB)$

Διαφορά

- Διαφορά του B από το A ($A - B$), είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν υλοποιείται το A αλλά όχι το B .



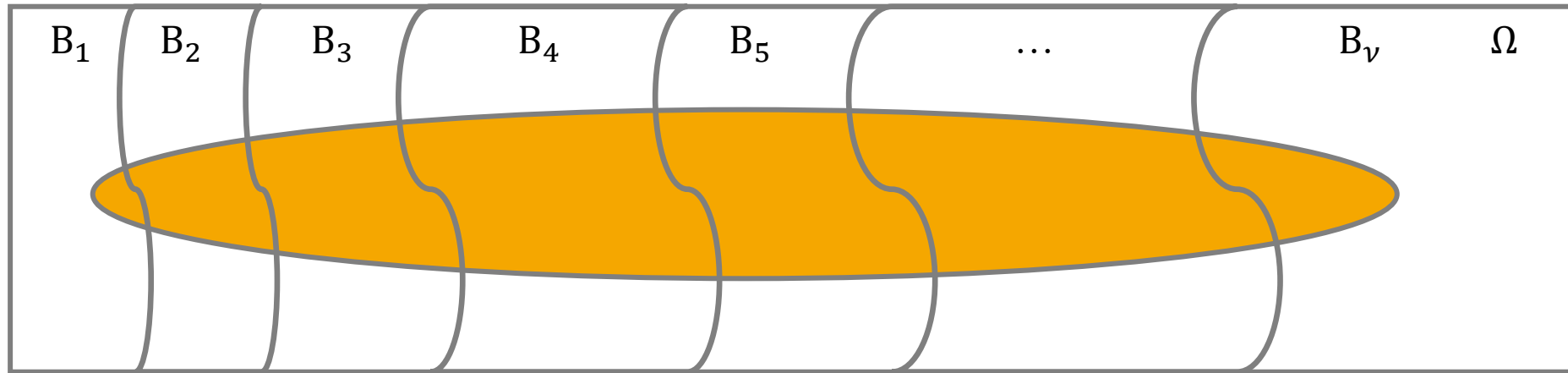
Ιδιότητες:

$$A - B = AB'$$

Αν $A \subseteq B$ τότε $A - B = \emptyset$

Διαμέριση ενδεχομένου

- Έστω $B_1 B_2 \dots B_\nu$ διαμέριση και A οποιοδήποτε ενδεχόμενο του $\Delta\mathcal{X}$ Ω , τότε τα ενδεχόμενα $AB_1, AB_2, \dots AB_\nu$ είναι επίσης διαμέριση.



- Πρακτική σημασία: όταν υλοποιείται το A , τότε πραγματοποιείται σε συνδυασμό μόνο με ένα από τα $B_1, B_2, \dots B_\nu$

Χρήσιμες ιδιότητες

$$A = AB \cup AB'$$

$$B = BA \cup BA'$$

$$A \cup B = AB' \cup B = A \cup BA' = AB' \cup AB \cup BA'$$

