Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 9: Ολοκληρώματα (Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Σκοποί ενότητας

- Να κατανοήσουν οι φοιτητές την έννοια του αόριστου ολοκληρώματος και να μπορούν να το υπολογίσουν
- Να κατανοήσουν οι φοιτητές την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και να μπορούν να το υπολογίσουν
- Να γνωρίσουν οι φοιτητές την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ως εμβαδόν
- Να μπορούν οι φοιτητές να υπολογίσουν ολοκληρώματα με άπειρα διαστήματα ολοκλήρωσης

Περιεχόμενα ενότητας

- Το αόριστο ολοκλήρωμα
- Το ορισμένο ολοκλήρωμα
- Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδόν
- Άπειρα διαστήματα ολοκλήρωσης

Αόριστο ολοκλήρωμα (1/2)

- Με την ολοκλήρωση μιας συνάρτησης βρίσκουμε όλες τις συναρτήσεις που την έχουν ως παράγωγο και ονομάζονται <u>αντιπαράγωγοι</u> ή <u>αόριστα ολοκληρώματα</u>

Αόριστο ολοκλήρωμα (2/2)

- $\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$

ό$\boldsymbol{\tau\alpha\nu}$ $\mathbf{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- Το αποτέλεσμα της διαδικασίας προσδιορισμού της τιμής ενός αθροίσματος όρων καθένας από τους οποίους τείνει στο μηδέν, καθώς το πλήθος τους τείνει στο άπειρο

Ολοκλήρωση VS παραγώγιση

- Η ολοκλήρωση και η παραγώγιση είναι πράξεις που ακυρώνουν η μία την άλλη

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\int \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{f(x)}$$

και

$$\int \mathbf{F}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{F(x)} + \boldsymbol{C}$$

Οριακές και αρχικές συνθήκες (1/3)

- Οριακές συνθήκες
  - **$y=y_0$ και $x=x_0\neq 0$**
- Αρχικές συνθήκες
  - **$y=y_0$ και $x=x_0=0$**

Οριακές και αρχικές συνθήκες (2/3)

- Όταν η καμπύλη ενός αόριστου ολοκληρώματος περνάει από ένα σημείο (x_0, y_0) μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του **C**

$$y_0 = F(x_0) + C \Leftrightarrow C = y_0 - F(x_0)$$

Οριακές και αρχικές συνθήκες (3/3)

- Το $\mathbf{y=F(x)+y_0-F(x_0)}$ είναι το μοναδικό αόριστο ολοκλήρωμα της **f(x)** η καμπύλη του οποίου περνάει από το σημείο $\mathbf{(x_0,y_0)}$

Παράδειγμα 1

- Δίνεται η συνάρτηση του οριακού κόστους $\mathbf{y'=C'(q)=6q^2+8q-25}$ και ζητείται να προσδιοριστεί η συνάρτηση του ολικού κόστους με τις αρχικές συνθήκες ($\mathbf{y_0=500}$ **όταν** $\mathbf{q_0=0}$)

Παράδειγμα 2

- Αν ο ρυθμός μεταβολής της καθαρής επένδυσης δίνεται από τη συνάρτηση $\mathbf{I(t)=80t^{1/3}}$ και το απόθεμα του κεφαλαίου **K(t)** το χρόνο **t=1** είναι **K=110**, ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση του κεφαλαίου **K(t)**

Αόριστο ολοκλήρωμα βασικών συναρτήσεων (1/6)

- Κανόνας δύναμης των αντιπαραγώγων

$$\int \boldsymbol{x^{a}dx} = \frac{\boldsymbol{x^{a+1}}}{\boldsymbol{a+1}} + \boldsymbol{C}$$

Παράδειγμα 3

- Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1. $\int dx$
2. $\int \frac{1}{x^5} dx$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Αόριστο ολοκλήρωμα βασικών συναρτήσεων (2/6)

- Γενικευμένος κανόνας δύναμης των αντιπαραγώγων

$$\int \boldsymbol{f'(x)[f(x)]^{a}dx = \frac{1}{a+1}[f(x)]^{a+1} + C}$$

Παράδειγμα 4

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

1. $$\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^{3}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Αόριστο ολοκλήρωμα βασικών συναρτήσεων (3/6)

- Γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Παράδειγμα 5

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

  1. $\int \left(2x^3 + 3\sqrt{x} - 2 \right) dx$

Αόριστο ολοκλήρωμα βασικών συναρτήσεων (4/6)

- Λογαριθμικές συναρτήσεις

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{dx} = \ln|x| + C\,, \qquad \mathbf{x \neq 0}$$

$$\int \frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\boldsymbol{f(x)}} \boldsymbol{dx} = \ln|f(x)| + C, \qquad f(x) \neq 0$$

Παράδειγμα 6

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

1. $$\int \left(\frac{1}{5x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{x}{(x^2-1)} \right) dx$$

Αόριστο ολοκλήρωμα βασικών συναρτήσεων (5/6)

- Εκθετικές συναρτήσεις

$$\int \boldsymbol{e^x dx = e^x + C}$$

$$\int \boldsymbol{e^{-x} dx = -e^{-x} + C}$$

$$\int \boldsymbol{e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, \qquad a \neq 0}$$

Αόριστο ολοκλήρωμα βασικών συναρτήσεων (6/6)

- Εκθετικές συναρτήσεις

$$\int \boldsymbol{a^{kx}dx} = \int \boldsymbol{e^{kxlna}dx} =$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}\ln\boldsymbol{a}}\boldsymbol{e^{kxlna}} + \boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}\ln\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a^{kx}} + \boldsymbol{C},$$

$$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}\ \textbf{και}\ \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$$

Παράδειγμα 7

- Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$
2. $\int 2^{5x}\, dx$
3. $\int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{x}{x^2+4}\right) dx$

Ορισμένο ολοκλήρωμα (μέθοδος υπολογισμού)

- Όταν μας δίνεται μια συνάρτηση ενός οριακού οικονομικού μεγέθους **f(x)** και ζητείται να υπολογιστεί η μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης **F(x)** του αντίστοιχου ολικού μεγέθους, όταν η τιμή της **x** μεταβάλλεται από το σημείο **x=α** στο σημείο **x=β**, κάνουμε τα εξής:
- Βρίσκουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$

και μετά υπολογίζουμε το **F(β)-F(α)**

Παράδειγμα 8

- Δίνεται η συνάρτηση του οριακού κόστους μιας επιχείρησης **$C'(q)=10-0,4q$, $0\leq q\leq 30$** όπου το **$C'(q)$** μετράται σε χιλιάδες € και η παραγόμενη ποσότητα **q** σε εκατοντάδες μονάδες ημερησίως.
- Ζητείται να προσδιοριστεί η μεταβολή στο συνολικό κόστος όταν η παραγόμενη ποσότητα μεταβάλλεται από **12** σε **16** μονάδες

Παράδειγμα 9

- Ο ρυθμός αύξησης των πωλήσεων ενός νέου προϊόντος σε σχέση με το χρόνο δίνεται από τη συνάρτηση $\mathbf{R'(t)=100-90e^{-t}}$, όπου $\mathbf{t}$ είναι ο αριθμός των ημερών που το προϊόν βρίσκεται στην αγορά.
- Ζητείται να προσδιοριστεί ο αριθμός των μονάδων που πωλούνται τις **4** πρώτες ημέρες

Παράδειγμα 10

- Αν **v(t)=96-32t** είναι η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου, όπου **t** ο χρόνος σε δευτερόλεπτα, να προσδιοριστεί η διανυθείσα απόσταση σε μέτρα στο χρονικό διάστημα μεταξύ **t=1** και **t=3** δευτερόλεπτα

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

- Αν μια συνάρτηση **f(x)** είναι συνεχής στο διάστημα **[α,β]** και **F(x)+C** ένα οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμά της στο **[α,β]** τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \mathrm{F}(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} = \mathrm{F}(\beta) - \mathrm{F}(\alpha)$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδόν (1/2)

- $\mathrm{E} = \begin{cases} \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx \,, \alpha\nu \ \mathrm{f}(x) \geq 0 \\ -\int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx \,, \alpha\nu \ \mathrm{f}(x) \leq 0 \end{cases}$

Παράδειγμα 11

- Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που φράσσεται από το γράφημα της $\mathbf{f(x)=x^2-2x}$, τον άξονα των **x** και τις κάθετες ευθείες **x=0** και **x=4**

Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδόν (2/2)

- Το εμβαδόν της περιοχής που εγκλείεται από τα γραφήματα δύο συνεχών μη αρνητικών συναρτήσεων **f(x)** και **g(x)** με **f(x)≥g(x)**, από το **x=α** στο **x=β**, δίνεται από τη σχέση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Παράδειγμα 12

- Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που φράσσεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων $\mathbf{f(x)=x^4+1}$ και $\mathbf{f(x)=2x^2}$

Γενικευμένα ή μη γνήσια ολοκληρώματα (1/5)

- Ολοκληρώματα των οποίων το ένα ή και τα δύο όρια ολοκλήρωσης είναι άπειρο:
- $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Γενικευμένα ή μη γνήσια ολοκληρώματα (2/5)

- Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ στα οποία η f(x) απειρίζεται σε κάποια τιμή του x στο [α,β]

Γενικευμένα ή μη γνήσια ολοκληρώματα (3/5)

- Το $\int_{\boldsymbol{\alpha}}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$ συγκλίνει αν το $\lim_{\boldsymbol{\beta}\to+\infty} \int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο

Γενικευμένα ή μη γνήσια ολοκληρώματα (4/5)

- Το $\int_{-\infty}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$ συγκλίνει αν το $\lim\limits_{\boldsymbol{\alpha}\to-\infty} \int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο

Παράδειγμα 13

- Η εκθετική κατανομή στη στατιστική ορίζεται ως $\mathbf{f(t)=\lambda e^{-\lambda t}}$, $\mathbf{t}\in\mathbf{[0,+\infty)}$ και $\mathbf{\lambda>0}$
- Να υπολογιστεί το εμβαδό της **f(t)** στο διάστημα $\mathbf{[0,+\infty)}$

Παράδειγμα 14

- Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

Παράδειγμα 15

- Να προσδιοριστούν οι τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ συγκλίνει

Γενικευμένα ή μη γνήσια ολοκληρώματα (5/5)

- Αν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx} = \int_{-\infty}^{\mathbf{0}} \boldsymbol{f(x)dx} + \int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx}$$

και συγκλίνουν τα ολοκληρώματα της δεξιάς πλευράς, τότε συγκλίνει και το ολοκλήρωμα στα αριστερά

Παράδειγμα 16

- Να εξεταστεί η σύγκλιση του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x e^{-a x^2} dx}$ για α>0

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Ολοκληρώματα (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128.

Σημείωμα Αδειοδότησης