Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 5: Ακολουθίες, όρια, σειρές (Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Σκοποί 1ης ενότητας

- Να μάθουν οι φοιτητές τις έννοιες της ακολουθίας, του ορίου μιας ακολουθίας και των σειρών
- Να μπορούν οι φοιτητές να υπολογίζουν το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου
- Να μπορούν οι φοιτητές να υπολογίζουν το όριο μιας ακολουθίας
- Να μπορούν οι φοιτητές να υπολογίζουν αν συγκλίνει μια σειρά

Περιεχόμενα 1ης ενότητας

- Ορισμός ακολουθίας
- Αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος
- Άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου
- Εύρεση ορίου μιας ακολουθίας
- Σειρές
- Σύγκλιση σειρών

Ορισμός ακολουθίας

- Είναι μία συνάρτηση ή ένας μηχανισμός ή ένας αλγόριθμος, έστω **f**, που απεικονίζει μονοσήμαντα κάθε φυσικό αριθμό **n** στο n-οστό της όρο **f(n)**, που συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha_n}$.

- Παραδείγματα…

Αριθμητική πρόοδος

- $\boldsymbol{\alpha_n = \alpha + (n-1) \cdot d}$

- όπου το **d** καλείται κοινή διαφορά

Γεωμετρική πρόοδος

- $\boldsymbol{\alpha_n = \alpha \cdot r^{n-1}}$

- όπου το **r** καλείται κοινός λόγος

Τι ακολουθία είναι μια εκθετική συνάρτηση;

- Η εκθετική συνάρτηση της μορφής

$$\mathbf{f(t) = Ab^t}$$

αποτελεί <u>γεωμετρική πρόοδο</u> με κοινό λόγο ίσο με **b**

$$\mathbf{A \cdot b, A \cdot b^2, A \cdot b^3, \ldots, A \cdot b^n}$$

Τι ακολουθία είναι μια λογαριθμική συνάρτηση;

- Η λογαριθμική συνάρτηση της μορφής

$$f(t) = \log A + t\log b$$

αποτελεί <u>αριθμητική πρόοδο</u> με κοινή διαφορά ίση με **logb**

$$\log A + \log b,\ \log A + 2\log b,\ \ldots,\ \log A + n\log b$$

Αξία της ράντας

- Ράντα
  - Ακολουθία καταθέσεων: καταθέτουμε το ίδιο ποσό στο τέλος κάθε μιας από **t** περιόδους

$$S_t = K\frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

- όπου
  - **K**: το ποσό που κατατίθεται κάθε χρόνο
  - **r**: το ετήσιο επιτόκιο
  - **t**: ο αριθμός των ετών που κάνουμε την κατάθεση

Παρούσα αξία μιας ράντας

- Το ποσό **V** που πρέπει να καταθέσουμε σήμερα, προκειμένου να εισπράττουμε το σταθερό ποσό των **A** € για τα επόμενα **t** έτη.

$$\boldsymbol{V = A\left[\frac{1-(1+r)^{-t}}{r}\right]}$$

- όπου
  - A: το ποσό που θα εισπράττουμε κάθε χρόνο
  - r: το ετήσιο επιτόκιο
  - t: ο αριθμός των ετών

Καθαρή Παρούσα Αξία – Net Present Value (NPV)

- **NPV** = παρούσα αξία των χρηματικών εισροών μιας επένδυσης – παρούσα αξία των χρηματικών εκροών της

- **NPV > 0** → η επένδυση είναι κερδοφόρα
- **NPV < 0** → η επένδυση δεν είναι κερδοφόρα

Παράδειγμα 1

- Μια επένδυση έχει αρχικό κόστος 500.000 € και στη συνέχεια έχει κέρδη, ως εξής:
  - Το 1ο έτος 200.000 €
  - Το 2ο έτος 180.000 €
  - Το 3ο έτος 130.000 €
  - Το 4ο έτος 150.000€
- Αν το επιτόκιο είναι **r=0,08** είναι η επένδυση αυτή κερδοφόρα;

Άθροισμα των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου

- Υπολογισμός…

Άθροισμα των η πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου

- Υπολογισμός…

Παράδειγμα 2

- Οι πωλήσεις ενός καταστήματος ήταν 727.000 € το 2000 και 1.240.000 € το 2009.
- Αν το κατάστημα είχε την ίδια ετήσια αύξηση πωλήσεων μεταξύ των ετών 2000 και 2009, ζητούνται:

1. Ποια είναι η ετήσια αύξηση των πωλήσεων;
2. Ποιες είναι οι συνολικές πωλήσεις για τα έτη 2000 έως 2009;

Όριο μιας ακολουθίας (1/12)

- Γενικά ισχύει ότι:
  - $\lim_{n \to \infty} (\alpha)^n = \begin{cases} 0\,, \text{εάν το } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty, \qquad\quad \text{εάν } \alpha > 1 \end{cases}$
- Π.χ.
  - $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
  - $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = +\infty$

Όριο μιας ακολουθίας (2/12)

- Θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά πέντε διαφορετικών ακολουθιών και θα υπολογίσουμε τα όριά τους…

Όριο μιας ακολουθίας (3/12)

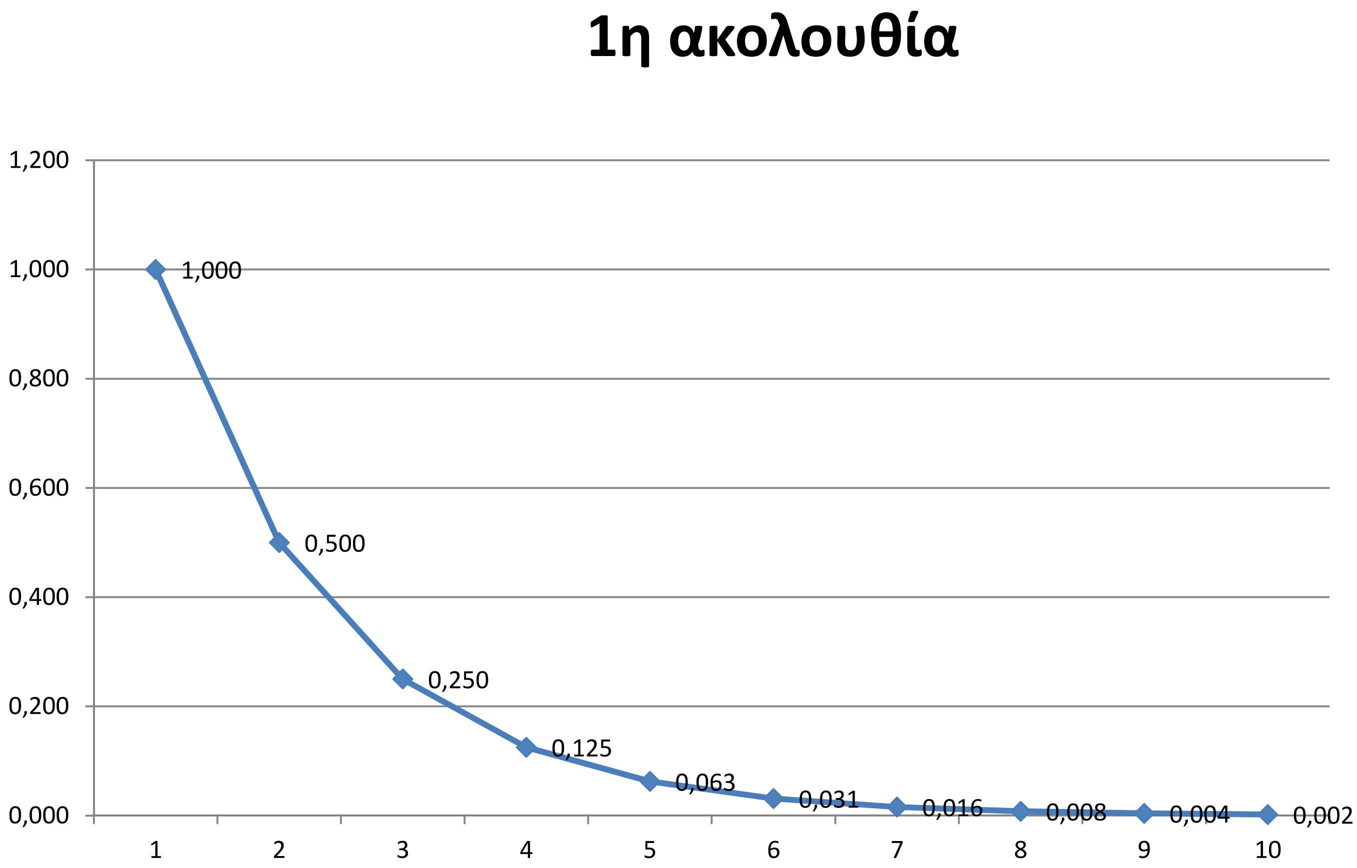
- Η 1η ακολουθία είναι: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
- Ο γενικός της όρος ισούται με:

$$\boldsymbol{f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

- Αποτελεί μια γεωμετρική πρόοδο με κοινό λόγο:

$$\boldsymbol{r = \frac{1}{2}}$$

Όριο μιας ακολουθίας (4/12)



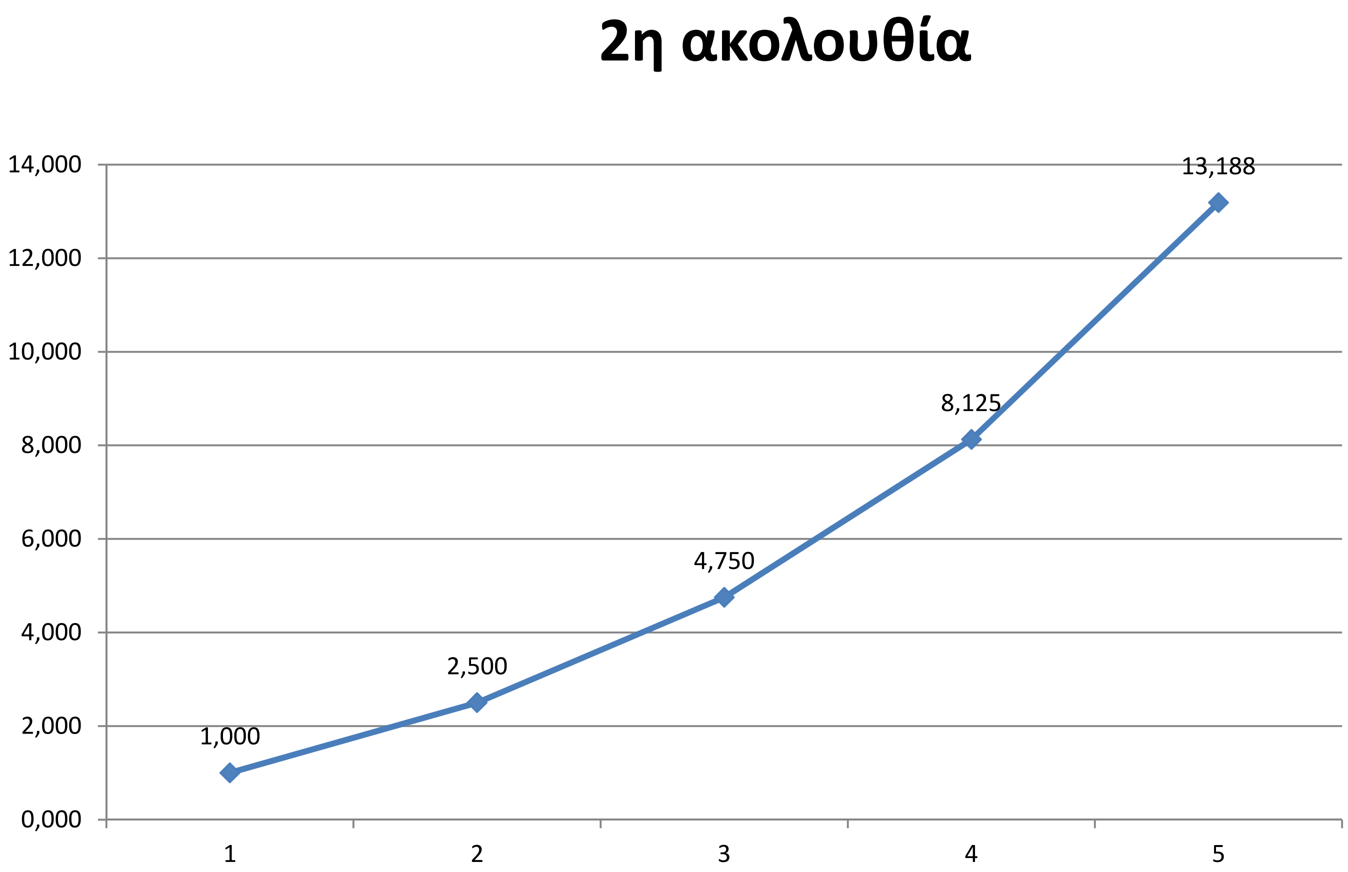
Όριο μιας ακολουθίας (5/12)

- Η 2η ακολουθία είναι: $1, \frac{5}{2}, \frac{19}{4}, \frac{65}{8}, \frac{211}{16}, \ldots$

- Ο γενικός της όρος ισούται με:

$$\boldsymbol{f(n) = \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n}}{1 - \frac{3}{2}} = 2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n} - 1\right]}$$

Όριο μιας ακολουθίας (6/12)



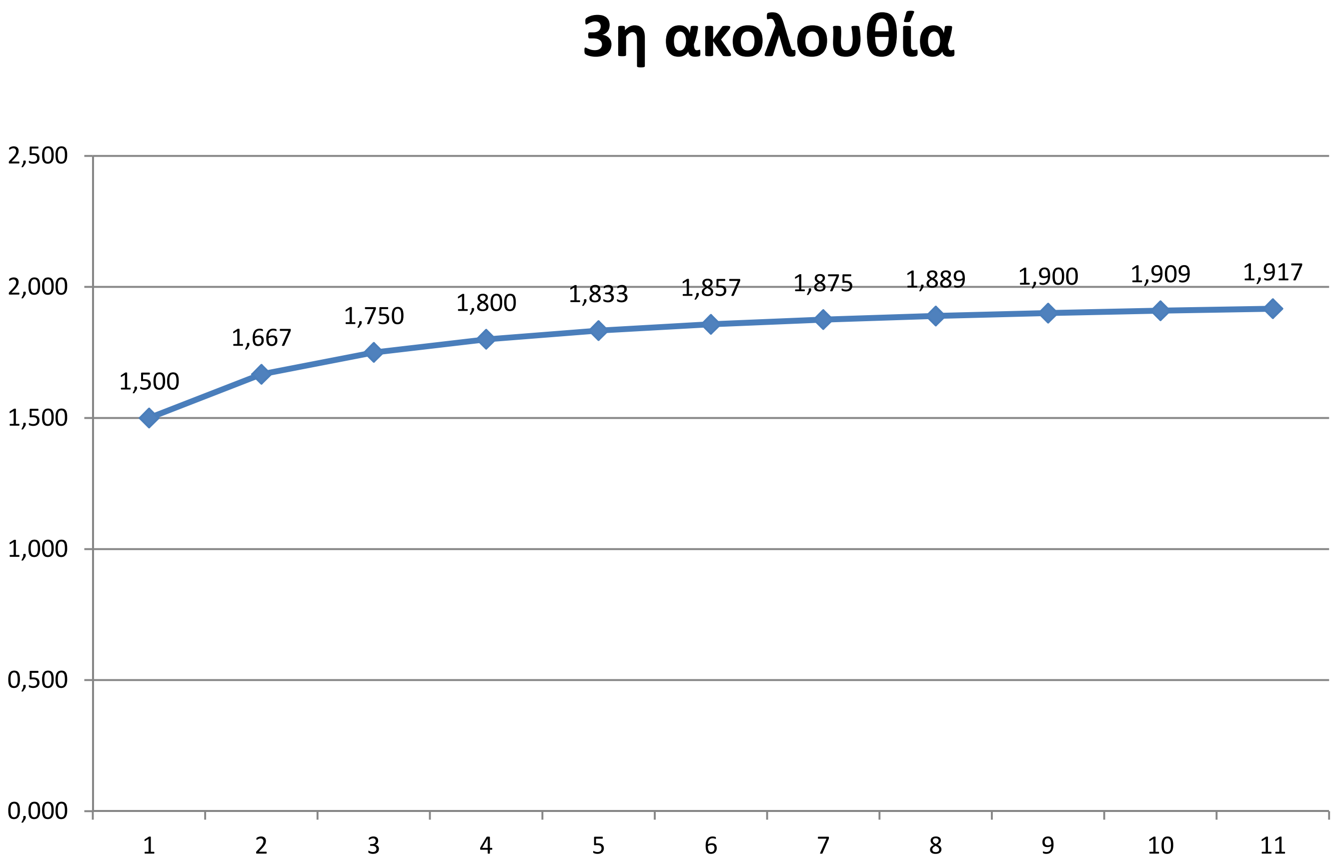
Όριο μιας ακολουθίας (7/12)

- Η 3η ακολουθία είναι: $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \ldots$

- Ο γενικός της όρος ισούται με:

$$\boldsymbol{f(n) = \frac{2n+1}{n+1}}$$

Όριο μιας ακολουθίας (8/12)



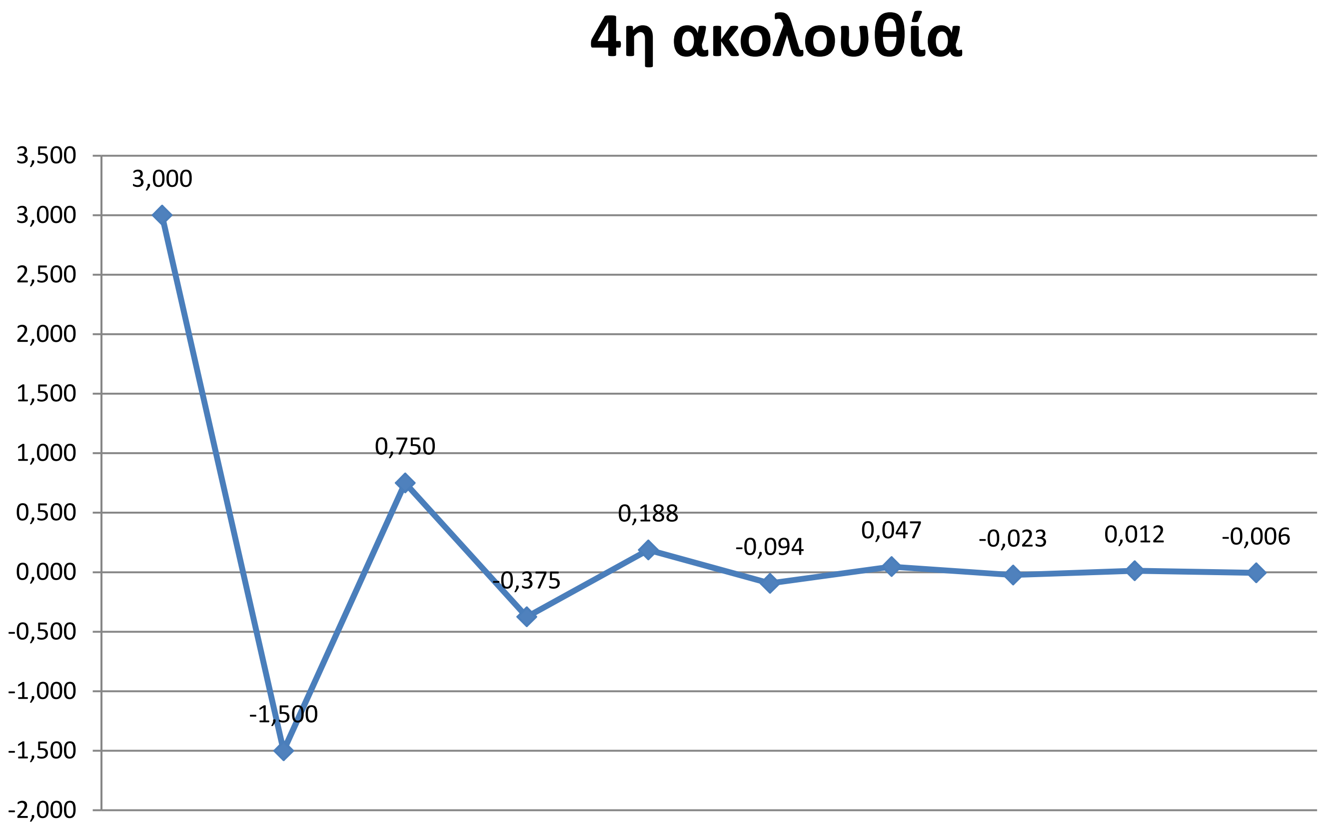
Όριο μιας ακολουθίας (9/12)

- Η 4η ακολουθία είναι: $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \ldots$

- Ο γενικός της όρος ισούται με:

$$\boldsymbol{f(n) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

Όριο μιας ακολουθίας (10/12)



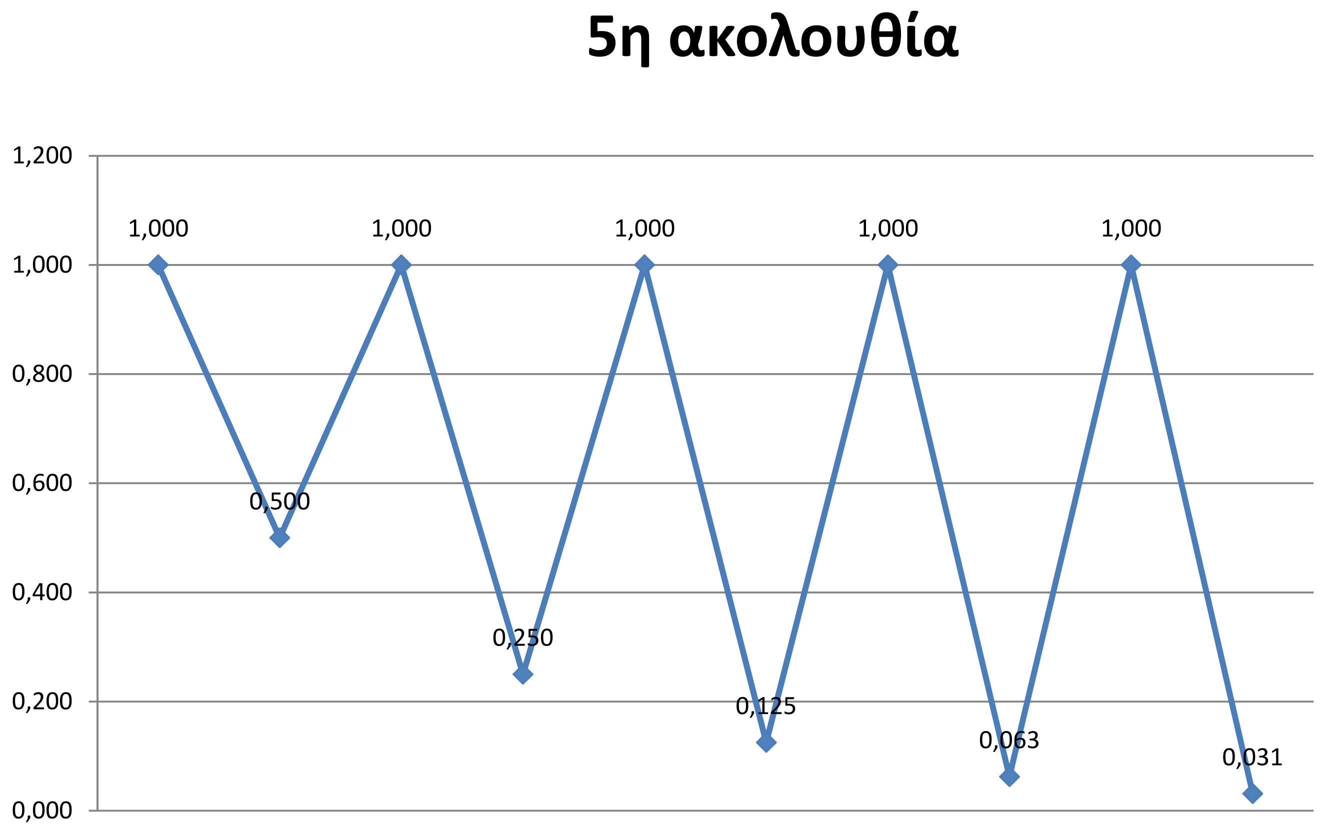
Όριο μιας ακολουθίας (11/12)

- Η 5η ακολουθία είναι: $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{8}, \ldots$

- Ο γενικός της όρος ισούται με:

$$\mathrm{f(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{n}}, & \text{εάν το n είναι άρτιος} \\ 1, & \text{εάν το n είναι περιττός} \end{cases}$$

Όριο μιας ακολουθίας (12/12)



Σειρές (1/2)

- Ορισμός
  - Αν $\boldsymbol{\alpha_i}$ ($\mathbf{i}$=1,2,3,…) είναι μία ακολουθία, τότε η ακολουθία

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{i-1}^{n} a_i \quad (n = 1, 2, 3, \dots)}$$

ονομάζεται σειρά

Σειρές (2/2)

- Επομένως, η σειρά είναι μία κατηγορία ακολουθίας, αφού αποτελεί το άθροισμα των όρων μιας ακολουθίας

Γεωμετρική σειρά (1/2)

- Έστω η γεωμετρική σειρά:

$$\boldsymbol{\alpha, \alpha r, ar^2, ar^3, \dots, ar^{k-1}}$$

- Το άθροισμα των n πρώτων όρων της ισούται με:

$$\boldsymbol{\frac{a(1-r^k)}{1-r}}$$

Γεωμετρική σειρά (2/2)

- Στην περίπτωση όπου 0<**r**<1, το $\mathbf{r}^{\mathbf{k}}$ τείνει στο μηδέν καθώς το **k** τείνει στο +∞:

$$\boldsymbol{S} = \lim_{\boldsymbol{k}\to+\infty} \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}} = \lim_{\boldsymbol{k}\to+\infty} \frac{\boldsymbol{a}\left(\mathbf{1}-\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{k}}\right)}{\mathbf{1}-\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{r}}$$

Κεϋνσυανό μοντέλο δημοσιονομικής πολιτικής (1/3)

- Αν μια κυβέρνηση δαπανήσει ένα ποσό Α € για την επέκταση, έστω του οδικού δικτύου της χώρας, τότε το εθνικό εισόδημα δεν αυξάνει μόνο κατά Α €, αλλά κατά ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιο του Α.
- Αυτό συμβαίνει διότι αρχικά η δαπάνη αυτή δημιουργεί εισόδημα Α € στις εμπλεκόμενες με τη δαπάνη επιχειρήσεις και νοικοκυριά.
- Στη συνέχεια, ένα ποσοστό (μικρό ή μεγάλο) του εισοδήματος αυτού αποταμιεύεται, ενώ το υπόλοιπο καταναλώνεται.
- Η κατανάλωση αυτή δημιουργεί επιπλέον εισόδημα σε άλλες επιχειρήσεις και νοικοκυριά, κ.ο.κ.

Κεϋνσυανό μοντέλο δημοσιονομικής πολιτικής (2/3)

- Γενικά, αν έχουμε μία δαπάνη **A** εκατομμυρίων € και το ποσοστό κατανάλωσης του εισοδήματος, που ονομάζεται <u>οριακή ροπή προς κατανάλωση </u>είναι **r** (0<**r**<1), τότε το συνολικό εισόδημα που δημιουργείται δίνεται από το παρακάτω άθροισμα:

$$\mathbf{A}+\mathbf{Ar}+\boldsymbol{Ar^{2}}+\boldsymbol{Ar^{3}}+\cdots+\boldsymbol{Ar^{n}}+\ldots$$

Κεϋνσυανό μοντέλο δημοσιονομικής πολιτικής (3/3)

- Η $\mathbf{A} + \mathbf{Ar} + \boldsymbol{Ar^2} + \boldsymbol{Ar^3} + \cdots + \boldsymbol{Ar^n}$**+…** είναι μια γεωμετρική σειρά με αρχικό όρο Α και κοινό λόγο r
- Επειδή 0<**r**<1έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{A} + \mathbf{Ar} + \boldsymbol{Ar^2} + \boldsymbol{Ar^3} + \cdots + \boldsymbol{Ar^n}\right) = A\frac{1}{1-r}$$

- Το $\boldsymbol{\frac{1}{1-r}}$ ονομάζεται <u>Κεϋνσυανός πολλαπλασιαστής</u>

Παράδειγμα 3

- Αν η αρχική δαπάνη είναι 500 εκ. € και η οριακή ροπή προς κατανάλωση είναι ίση με 0,7 πόσο θα είναι το συνολικά δημιουργούμενο εισόδημα;

Κριτήρια σύγκλισης σειρών με θετικούς όρους (1/4)

- **Κριτήριο D' Alembert**
  - Αν το όριο του λόγου του επόμενου όρου μιας σειράς με τον προηγούμενο είναι μικρότερο της μονάδας, η σειρά συγκλίνει, αν είναι μεγαλύτερο της μονάδας, η σειρά αποκλίνει, ενώ αν είναι ίσο με τη μονάδα, χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση

Κριτήρια σύγκλισης σειρών με θετικούς όρους (2/4)

- **Κριτήριο D' Alembert**
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathbf{L} < \mathbf{1}$, **η σειρά συγκλίνει**
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathbf{L} > \mathbf{1}$, **η σειρά αποκλίνει**
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathbf{L} = \mathbf{1}$, **υπάρχει αμφιβολία**

Παράδειγμα 4

- Να αποδείξετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$$

Παράδειγμα 5

- Να αποδείξετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

Κριτήρια σύγκλισης σειρών με θετικούς όρους (3/4)

- **Κριτήριο Cauchy**
  – Αν το όριο της νιοστής ρίζας του νιοστού όρου της σειράς είναι μικρότερο της μονάδας, η σειρά συγκλίνει, αν είναι μεγαλύτερο της μονάδας, η σειρά αποκλίνει, ενώ αν είναι ίσο με τη μονάδα, χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση

Κριτήρια σύγκλισης σειρών με θετικούς όρους (4/4)

- **Κριτήριο Cauchy**
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \mathbf{L} < 1$, **η σειρά συγκλίνει**
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \mathbf{L} > 1$, **η σειρά αποκλίνει**
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \mathbf{L} = 1$, **υπάρχει αμφιβολία**

Παράδειγμα 6

- Να αποδείξετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Παράδειγμα 7

- Να αποδείξετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Παράδειγμα 8

- Να αποδείξετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n}$$

Σύγκλιση σειρών με εναλλασσόμενα πρόσημα

- Απόλυτη σύγκλιση
  - Η σειρά $\sum \alpha_n$ συγκλίνει αν η σειρά $\sum |\alpha_n|$ συγκλίνει.
- Υπό συνθήκη σύγκλιση
  - Αν η σειρά $\sum \alpha_n$ συγκλίνει αλλά η σειρά $\sum |\alpha_n|$ αποκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum \alpha_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

Παράδειγμα 9

- Να αποδείξετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{3^n}$$

Παράδειγμα 10

- Να αποδείξετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}}$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης