Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 13: Η ορίζουσα και το ίχνος μιας μήτρας (Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Σκοποί ενότητας

- Να γνωρίσουν οι φοιτητές την έννοια της ορίζουσας
- Να μάθουν οι φοιτητές να υπολογίζουν μια ορίζουσα με όλους τους δυνατούς διαφορετικούς τρόπους
- Να μπορούν οι φοιτητές να επιλύουν ένα nxn γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο Cramer
- Να γνωρίσουν οι φοιτητές την έννοια του ίχνους μιας μήτρας και να μπορούν να το υπολογίζουν

Περιεχόμενα ενότητας

- Η έννοια της ορίζουσας
- Υπολογισμός μιας ορίζουσας
- Επίλυση ενός nxn γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο Cramer
- Ίχνος μήτρας

Ορίζουσα μήτρας (1/2)

- Είναι ένας αριθμός που εξαρτάται από όλα τα στοιχεία της μήτρας
- Αναφέρεται αποκλειστικά σε τετραγωνικές μήτρες
- Μια τετραγωνική μήτρα ονομάζεται ιδιάζουσα αν $\det(\mathbf{A})=0$ και μη ιδιάζουσα αν $\det(\mathbf{A})\neq 0$

Ορίζουσα μήτρας (2/2)

- Συμβολίζεται με

$$det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Υπολογισμός μιας ορίζουσας (1/2)

- Μέσω του αναπτύγματός της σε συμπαράγοντες <u>κατά τη σειρά i</u>

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(\boldsymbol{A_{ij}}),$$

όπου $\mathbf{A}_{ij}$ η (n-1)x(n-1) μήτρα που προκύπτει από την **A** αν απομακρύνουμε από αυτή τη σειρά i και τη στήλη j

Υπολογισμός μιας ορίζουσας (2/2)

- Μέσω του αναπτύγματός της σε συμπαράγοντες <u>κατά τη στήλη j</u>

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(\boldsymbol{A_{ij}}),$$

όπου $\mathbf{A}_{ij}$ η (n-1)x(n-1) μήτρα που προκύπτει από την **A** αν απομακρύνουμε από αυτή τη σειρά i και τη στήλη j

Ιδιότητες οριζουσών (1/7)

1. Η ορίζουσα μιας μήτρας 1x1 **A**=[α] ισούται με α (det(**A**) = det([α]) = α)
2. Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ τότε

   $$\det(\mathbf{A}) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$$

3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

Ιδιότητες οριζουσών (2/7)

4. Αν **A** είναι μια άνω τριγωνική ή κάτω τριγωνική μήτρα, τότε

$$\det(\mathbf{A})=\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdot\ldots\cdot\alpha_{nn}$$

Ιδιότητες οριζουσών (3/7)

5. Αν **A** μια nxn μήτρα και η **B** παράγεται από την **A** αντιμεταθέτοντας δύο σειρές ή δύο στήλες της **A**, τότε

$$\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$$

Ιδιότητες οριζουσών (4/7)

- Αν **A** μια nxn μήτρα και η **B** παράγεται από την **A**, αντικαθιστώντας μια σειρά ή μια στήλη της **A** με τη σειρά ή τη στήλη αυτή συν κάποιο μη μηδενικό πολλαπλάσιο μιας άλλης σειράς ή στήλης, τότε det(**A**)=det(**B**)

Ιδιότητες οριζουσών (5/7)

7. Αν **A** μια nxn μήτρα και η **B** παράγεται από την **A** αντικαθιστώντας μια σειρά ή μια στήλη της **A**, με λ φορές (λ≠0) τη σειρά ή τη στήλη αυτή τότε

$$\det(\mathbf{B})=\lambda\cdot\det(\mathbf{A})$$

Ιδιότητες οριζουσών (6/7)

8. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο την μήτρας **A** επί $\lambda \neq 0$, τότε η μήτρα που προκύπτει έχει ορίζουσα ίση με

$$\det(\mathbf{B}) = \lambda^n \cdot \det(\mathbf{A})$$

Ιδιότητες οριζουσών (7/7)

9. $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$

10. $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Υπολογισμός της ορίζουσας μιας μήτρας με τη μέθοδο Gauss

- Εφαρμογή της μεθόδου Gauss για τη μετατροπή της μήτρας σε πάνω τριγωνική
- Υπολογισμός του γινομένου των διαγωνίων στοιχείων της

Επίλυση γραμμικού συστήματος nxn με τη μέθοδο Cramer

- Για ένα σύστημα $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ αντικαθιστούμε τη στήλη i της **A** με το διάνυσμα **b** και συμβολίζουμε την ορίζουσα της μήτρας που θα προκύψει με $\mathbf{\Delta_i}$.
- Τότε $x_i = \dfrac{\boldsymbol{\Delta_i}}{det(A)}$

Ίχνος μήτρας

- Το ίχνος μιας nxn μήτρας **A** συμβολίζεται με tr(**A**) και ορίζεται ως το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων της.

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}$$

Ιδιότητες ίχνους μήτρας

1. $tr(\lambda_1 \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B}) = \lambda_1 tr(\mathbf{A}) + \lambda_2 tr(\mathbf{B})$
2. $tr(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}^T)$
3. $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$
4. $tr(\mathbf{AA}^T) = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$
5. $tr(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$
6. $tr(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}) = tr(\mathbf{B})$

1η Άσκηση

- Να υπολογιστούν οι ορίζουσες της μήτρας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ και της ανάστροφης $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ και να επαληθευτεί ότι $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$

$2^η$ Άσκηση

- Να υπολογιστεί η ορίζουσα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ με βάση (i) την $1^η$ σειρά, (ii) την $3^η$ σειρά και (iii) την $3^η$ στήλη

$3^η$ Άσκηση

- Να υπολογιστεί η ορίζουσα της παρακάτω μήτρας χρησιμοποιώντας
    1. απαλοιφή Gauss
    2. την $1^η$ γραμμή
    3. την $1^η$ στήλη

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Η ορίζουσα και το ίχνος μιας μήτρας (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128.

Σημείωμα Αδειοδότησης