Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 12: Μήτρες (Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Σκοποί ενότητας

- Να μπορούν οι φοιτητές να πραγματοποιούν πράξεις μεταξύ μήτρας και βαθμωτού και μεταξύ μητρών
- Να μάθουν οι φοιτητές την έννοια της ανάστροφης μήτρας και να μπορούν να την υπολογίσουν
- Να μάθουν οι φοιτητές την έννοια του βαθμού μιας μήτρας και να μπορούν να τον υπολογίσουν
- Να μάθουν οι φοιτητές την έννοια της αντίστροφης μήτρας και να μπορούν να την υπολογίσουν

Περιεχόμενα ενότητας

- Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός επί βαθμωτό
- Πολλαπλασιασμός μητρών
- Ανάστροφη μήτρας
- Βαθμός μήτρας
- Αντίστροφη μήτρας
- Μήτρες και γραμμικοί μετασχηματισμοί

Μήτρες

- Παράθεση αριθμών σε **m** γραμμές και **n** στήλες
- Διάσταση **m x n**
- Όταν **m = n** → ***τετραγωνική μήτρα***
- Εάν όλα τα μη διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με το μηδέν και τουλάχιστον ένα διαγώνιο στοιχείο είναι μη μηδενικό → ***διαγώνια μήτρα***

Ισότητα μητρών

- Δύο μήτρες είναι ίσες εάν έχουν τις ίδιες διαστάσεις και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα

Πρόσθεση μητρών

- $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}, \forall\ i, j$

Ιδιότητες πρόσθεσης μητρών

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
3. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$
4. $(\lambda+\mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$
5. $\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$
6. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$

Πολλαπλασιασμός μήτρας επί διάνυσμα

- Το γινόμενο μιας **mxn** μήτρας **A** επί ένα διάνυσμά-στήλη **n** στοιχείων **x** ισούται με ένα διάνυσμα **b**, **m** στοιχείων, τα στοιχεία b_i του οποίου ισούνται με το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{\alpha_i}$ της σειράς i της **A** επί το διάνυσμα **x**

Πολλαπλασιασμός μήτρας επί μήτρα

- Έστω η mxn μήτρα **A** και η nxk μήτρα **B**
- Τότε το γινόμενο **C** = **AB** είναι η mxk μήτρα **C**=[c_{ij}] της οποίας το στοιχείο της i-οστής σειράς και της j-οστής στήλης είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής σειράς της **A** και της j-οστής στήλης της **B**

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού μητρών

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

Μοναδιαία ή ταυτοτική μήτρα

- Η μήτρα $\mathbf{I_n}$ διάστασης nxn η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{AI_n = I_nA = A}$$

- Έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα με 1 και κάθε στοιχείο εκτός της κύριας διαγωνίου ίσο με μηδέν

Ανάστροφή μήτρα

- Η ανάστροφη μιας mxn μήτρας **A** είναι η nxm μήτρα που συμβολίζεται με $\mathbf{A}^T$ και έχει στήλες τις σειρές της **A**

Ιδιότητες ανάστροφης μήτρας

1. $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \pm \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
3. $(\lambda\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \lambda\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
4. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

Συμμετρική μήτρα

- Μια τετραγωνική μήτρα **A** ονομάζεται συμμετρική αν και μόνο αν ισχύει

$$\mathbf{A}^{T} = \mathbf{A}$$

Αντισυμμετρική μήτρα

- Μια τετραγωνική μήτρα A ονομάζεται αντίσυμμετρική αν και μόνο αν ισχύει

$$\mathbf{A^T = -A}$$

Ιδιότητες αντισυμμετρικών μητρών

- Για τις αντισυμμετρικές μήτρες **A** και **B** και για το διάνυσμα **x** ισχύουν οι ιδιότητες:
  1. $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$
  2. Το άθροισμα **A** + **B** είναι μια αντισυμμετρική μήτρα
  3. Κάθε τετραγωνική μήτρα **A** μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μιας συμμετρικής και μιας αντισυμμετρικής μήτρας ως εξής:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

Βαθμός μήτρας

- Ο βαθμός μιας μήτρας **A** συμβολίζεται με r(**A**) και ισούται προς το μέγιστο αριθμό των γραμμικών ανεξάρτητων σειρών της

Πώς βρίσκουμε το βαθμό μιας μήτρας;

- Εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss για να μετασχηματίσουμε την αρχική μήτρα σε μια κλιμακωτή μήτρα και παίρνουμε ως βαθμό της μήτρας τον αριθμό των μη μηδενικών σειρών της

Αντίστροφη μήτρα

- Η μήτρα **B** είναι αντίστροφη της μήτρας **A**, και συμβολίζεται με $\mathbf{A}^{-1}$, αν και μόνο αν

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

ή

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Ιδιότητες αντίστροφης μήτρας

1. Η $\mathbf{A}^{-1}$ είναι μοναδική
2. Η $\mathbf{AB}$ είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
3. Η $\mathbf{A}^{-1}$ είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
4. $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$
5. Η $\mathbf{A}^{k}$ είναι αντιστρέψιμη και $(\mathbf{A}^{k})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{k}$
6. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$

Πώς βρίσκουμε την αντίστροφη μιας μήτρας;

- Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gauss-Jordan στην επαυξημένη μήτρα [**A**|**I**] και καταλήγουμε στην επαυξημένη μήτρα [**I**|$\mathbf{A}^{-1}$]

1η Άσκηση

- Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

να υπολογιστούν τα **AB** και **BA**

$2^η$ Άσκηση

- Να βρεθούν τα x_1, x_2, x_3 και x_4, αν

$$3\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 6 \\ -1 & 2x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 & 3 \end{bmatrix}$$

3η Άσκηση

- Να βρεθεί ο βαθμός της παρακάτω μήτρας

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Μήτρες (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128.

Σημείωμα Αδειοδότησης