Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 11: Διανύσματα (Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Σκοποί ενότητας

- Να μπορούν οι φοιτητές να πραγματοποιήσουν πρόσθεση, βαθμωτό πολλαπλασιασμό και γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων
- Να γνωρίσουν οι φοιτητές την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας και να μπορούν να βρουν εάν δύο διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή γραμμικώς εξαρτημένα
- Να μάθουν οι φοιτητές την έννοια του εσωτερικού γινομένου και να μπορούν να υπολογίσουν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

Περιεχόμενα ενότητας

- Πρόσθεση, βαθμωτός πολλαπλασιασμός και γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων
- Γραμμική ανεξαρτησία
- Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Διανύσματα

- Πολυδιάστατα (n-διάστατα μεγέθη)
- Διάσταση **1 x n**

- $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$
- $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

- Πεδίο ορισμού το R^n

Πρόσθεση διανυσμάτων

- $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$

- Αν $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, με διάσταση 1 x n

  τότε $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$

Πολλαπλασιασμός διανύσματος επί βαθμωτό

- $\boldsymbol{\alpha} \cdot x = (\alpha_1 x, \alpha_2 x, \ldots, \alpha_n x)$

Ιδιότητες διανυσμάτων

- $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$
- $\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma}$
- $\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$
- $(\kappa\lambda)\boldsymbol{\alpha} = \kappa(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \kappa\lambda\boldsymbol{\alpha}$
- $\lambda(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta}$
- $(\kappa+\lambda)\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \kappa\boldsymbol{\alpha}$

$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ διανύσματα με διάσταση 1 x n, $\kappa,\lambda \in R$

Ισότητα και ανισότητα διανυσμάτων

- $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$

- $\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \alpha_i \geq \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων (1/2)

- Έστω Α={$\mathbf{α}_1$, $\mathbf{α}_2$, ..., $\mathbf{α}_n$} ένα πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του R^n και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$, τότε το διάνυσμα $\mathbf{b} \in R^n$ της μορφής

$$x_1\boldsymbol{α}_1+x_2\boldsymbol{α}_2+\ldots+x_k\boldsymbol{α}_k = \mathbf{b}$$

ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του Α.

Λέμε επίσης ότι το διάνυσμα **b** είναι γραμμικώς εξαρτημένο από τα διανύσματα $\boldsymbol{α}_i$, i=1,2,...,k

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων (2/2)

- **n** γραμμικές εξισώσεις = **μια** διανυσματική εξίσωση
- $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+x_k\boldsymbol{\alpha}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i = \mathbf{b}$
- $\boldsymbol{\alpha}_i = [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}]$, $i=1,2,\ldots,n$
- $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$
- $x_i \in R$, $i=1,2,\ldots,n$

Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία (1/2)

- Ένα **mxn** σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει τουλάχιστον μία λύση αν και μόνο αν το σύνολο των **n** διανυσμάτων στηλών της αριστερής του πλευράς επαυξημένο με το διάνυσμα της δεξιάς του πλευράς είναι γραμμικώς εξαρτημένο
- Δεν έχει λύσει αν το σύνολο αυτό είναι γραμμικώς ανεξάρτητο

Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία (2/2)

- Τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_n$ του R^n είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχουν αριθμοί λ_1, λ_2, …, λ_n, με έναν τουλάχιστον διάφορο του μηδενός, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$$

- Αν η εξίσωση ισχύει με $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (1/2)

- Είναι το βαθμωτό γινόμενο ενός διανύσματος σειρά **α**=(α_1, α_2, …, α_n) και ενός διαστήματος στήλη **β**=(β_1, β_2, …, β_n) που συμβολίζεται με **α**·**β** και ορίζεται ως

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_i$$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (2/2)

- Για τα διανύσματα **x**, **y**, **z** του R_n και το βαθμωτό λ ισχύουν τα εξής:

1. $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$
2. $\mathbf{x}^T(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z}$
3. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})^T\mathbf{z}=\mathbf{x}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{z}$
4. $\lambda(\mathbf{x}^T\mathbf{y})=\mathbf{x}^T\lambda\mathbf{y}=\lambda\mathbf{x}^T\mathbf{y}$

x: διάσταση 1 x n, $\mathbf{x}^T$: διάσταση n x 1

Μήκος διανύσματος (1/3)

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 \Leftrightarrow$$

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \left({\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2\right)^{1/2} = \left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right)^{1/2}$$

Μήκος διανύσματος (2/3)

- Ιδιότητες
  1. $||\boldsymbol{\alpha}|| \geq 0$ και $||\boldsymbol{\alpha}|| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$
  2. $||\boldsymbol{\alpha}|| = ||-\boldsymbol{\alpha}||$
  3. $||\lambda\cdot\boldsymbol{\alpha}||=|\lambda|\cdot||\boldsymbol{\alpha}||$
  4. $|\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}| \leq ||\boldsymbol{\alpha}||\cdot||\boldsymbol{\beta}||$, όπου $|\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}|$ η απόλυτη τιμή του $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$

Μήκος διανύσματος (3/3)

- Ιδιότητες
  5. Μοναδιαίο διάνυσμα: ||**x**|| = 1
  6. Κανονικοποιημένη μορφή του **x**:

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x} = \left[\frac{x_1}{\|\boldsymbol{x}\|}, \frac{x_2}{\|\boldsymbol{x}\|}, \dots, \frac{x_n}{\|\boldsymbol{x}\|}\right]$$

Απόσταση μεταξύ δύο σημείων (1/2)

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{z}\| = (\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z})^{1/2} =$$
$$[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})]^{1/2} = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| =$$
$$[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots$$
$$+ (x_n-y_n)^2]^{1/2} =$$
$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

Απόσταση μεταξύ δύο σημείων (2/2)

- Ιδιότητες:
  1. $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \geq 0$ και $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{0}$
  2. $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = ||\mathbf{y}-\mathbf{x}||$
  3. $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$
  4. Αν $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$, τότε $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$

Εσωτερικό γινόμενο και μήκος διανυσμάτων

- Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **α** και **β** μπορεί να εκφραστεί σε όρους του μήκους των διανυσμάτων και του συνημιτόνου της μεταξύ τους γωνίας **θ** ως εξής:

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\| cos\theta \Leftrightarrow cos\theta = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|},$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Πότε δύο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους;

- Δύο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν

- (διότι $\cos 90^o = 0$)

Σχέση πρόσημου εσωτερικού γινομένου και γωνίας διανυσμάτων

- Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:
  - Θετικό πρόσημο $\Rightarrow$ οξεία γωνία
  - Ίσο με μηδέν $\Rightarrow$ ορθή γωνία
  - Αρνητικό πρόσημο $\Rightarrow$ αμβλεία γωνία

$1^η$ Άσκηση

- Να δείξετε αν τα διανύσματα **α**=[3, 1] και **β**=[-6, -3] είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή γραμμικώς ανεξάρτητα

$2^η$ Άσκηση

- Να δείξετε αν τα διανύσματα **α**=[1, 3] και **β**=[3, 9] είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή γραμμικώς ανεξάρτητα

$3^η$ Άσκηση

- Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο **α·β** των παρακάτω διανυσμάτων και να εκτιμηθεί η μεταξύ τους γωνία:
    1. **α**=[2, -1, 0] και **β**=[4, 2, -1]
    2. **α**=[5, -1, 3] και **β**=[1, 0]
    3. **α**=[-1, 4, 7, 0] και **β**=[2, -3, 0, 1]

4η Άσκηση

- Να υπολογιστεί η τιμή της μεταβλητής λ έτσι ώστε τα παρακάτω διανύσματα **α** και **β** να είναι ορθογώνια:
  1. **α**=[2, λ, -1] και **β**=[2, -5, 3]
  2. **α**=[1, 3λ, -4, 1, 5] και **β**=[6, -1, 2, 0]

$5^{η}$ Άσκηση

- Να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των παρακάτω διανυσμάτων **α** και **β**:
  1. **α**=[1, -1, 3, 5] και **β**=[-2, 3, 4, -1]
  2. **α**=[5, 1, -1, 3] και **β**=[1, 3, -1, 0]

6η Άσκηση

- Να υπολογιστεί η γωνία του συνημιτόνου μεταξύ των παρακάτω διανυσμάτων **α** και **β**:
   1. **α**=[0, 0, 1] και **β**=[1, 0, 1]

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Διανύσματα (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128.

Σημείωμα Αδειοδότησης