

Ο Κανόνας του Bayes

Ασκήσεις

1^η Άσκηση

- Σε μια κλινική, οι ασθενείς που υπάρχει περίπτωση να πάσχουν από Ηπατίτιδα C κάνουν ένα συγκεκριμένο τεστ για να ανιχνευτούν αντισώματα στο αίμα τους.
Έστω ότι:
 - με H συμβολίζουμε το γεγονός ότι ένας ασθενής πάσχει από Ηπατίτιδα C
 - με nH συμβολίζουμε το γεγονός ότι ένας ασθενής δεν πάσχει από Ηπατίτιδα C
 - με Pos συμβολίζουμε το γεγονός ότι το τεστ για τον ασθενή ήταν θετικό για Ηπατίτιδα C
 - με Neg συμβολίζουμε το γεγονός ότι το τεστ για τον ασθενή ήταν αρνητικό για Ηπατίτιδα C
- Από διάφορα ιατρικά βιβλία γνωρίζουμε ότι ισχύουν τα εξής:
- $P(H)=0.15$, $P(Pos/H)=0.95$, $P(Pos/nH)=0.02$
- Ποια είναι η πιθανότητα να πάσχει κάποιος ασθενής από Ηπατίτιδα C αν το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό;

2^η Άσκηση

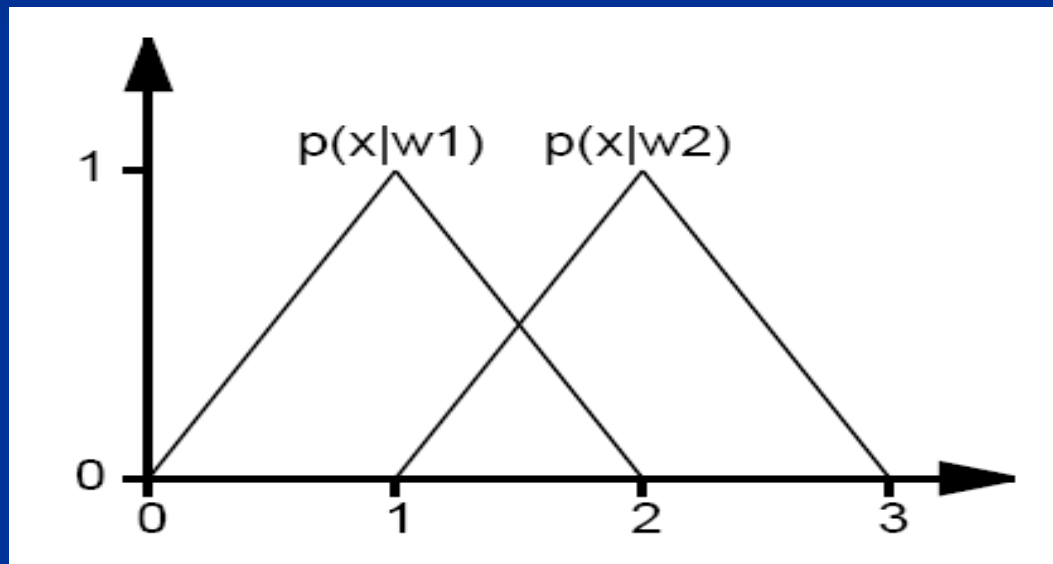
- Η κατανομή $\text{unif}(a,b)$ ορίζεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

- Θεωρείστε ένα πρόβλημα δύο κλάσεων (ω_1 και ω_2) και επιλύστε το ακόλουθο ερώτημα:
- Εάν οι π_i των προτέρων πιθανότητες είναι ίσες, βρείτε το όριο απόφασης αν η κλάση ω_1 έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\text{unif}(0,2)$ και η κλάση ω_2 έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\text{unif}(1,4)$.

3^η Άσκηση

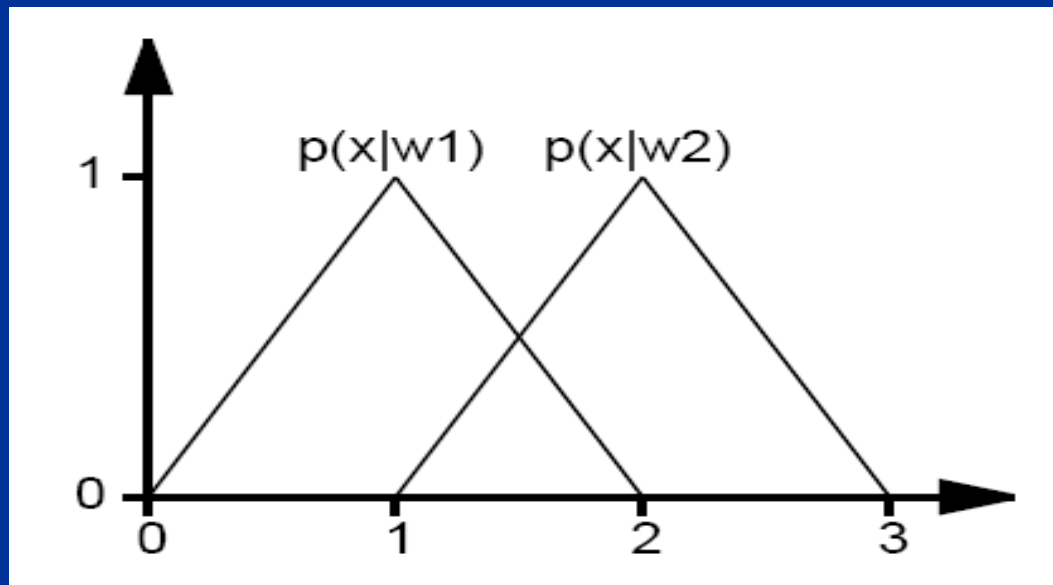
- Έστω οι δύο παρακάτω μονοδιάστατες κατανομές πυκνότητας πιθανότητας που αντιστοιχούν στις δύο κατηγορίες ταξινόμησης ω_1 και ω_2 , αντίστοιχα:



- Θεωρείστε ότι $P(\omega_1) = P(\omega_2)$. Βρείτε τις περιοχές απόφασης και την πιθανότητα λάθους αν εφαρμοστεί ένας «κατά Bayes» ταξινομητής.

4^η Άσκηση

- Έστω οι δύο παρακάτω μονοδιάστατες κατανομές πυκνότητας πιθανότητας που αντιστοιχούν στις δύο κατηγορίες ταξινόμησης ω_1 και ω_2 , αντίστοιχα:



- Θεωρείστε ότι $P(\omega_1) = 2P(\omega_2)$. Βρείτε τις περιοχές απόφασης και την πιθανότητα λάθους αν εφαρμοστεί ένας «κατά Bayes» ταξινομητής.

5^η Άσκηση

- Υποθέστε ότι έχουμε ένα δι-διάστατο χώρο χαρακτηριστικών $\mathbf{x}=[x_1, x_2]$, δύο κλάσεις ταξινόμησης ω_1 και ω_2 και ότι οι $p(x_1, x_2 | \omega_1)$ και $p(x_1, x_2 | \omega_2)$ ακολουθούν Κανονική κατανομή με τις ίδιες διασπορές $\sigma^2=4$ και μέσες τιμές $\mu_1=[2, 8]$ και $\mu_2=[8, 2]$. Έστω επίσης ότι $p(\omega_1)=4p(\omega_2)$.
- Αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Bayes,
 1. Ποιες είναι οι δύο συναρτήσεις διαχωρισμού $g_1(x_1, x_2)$ και $g_2(x_1, x_2)$;
 2. Ποιο είναι το σύνορο απόφασης;

6^η Άσκηση

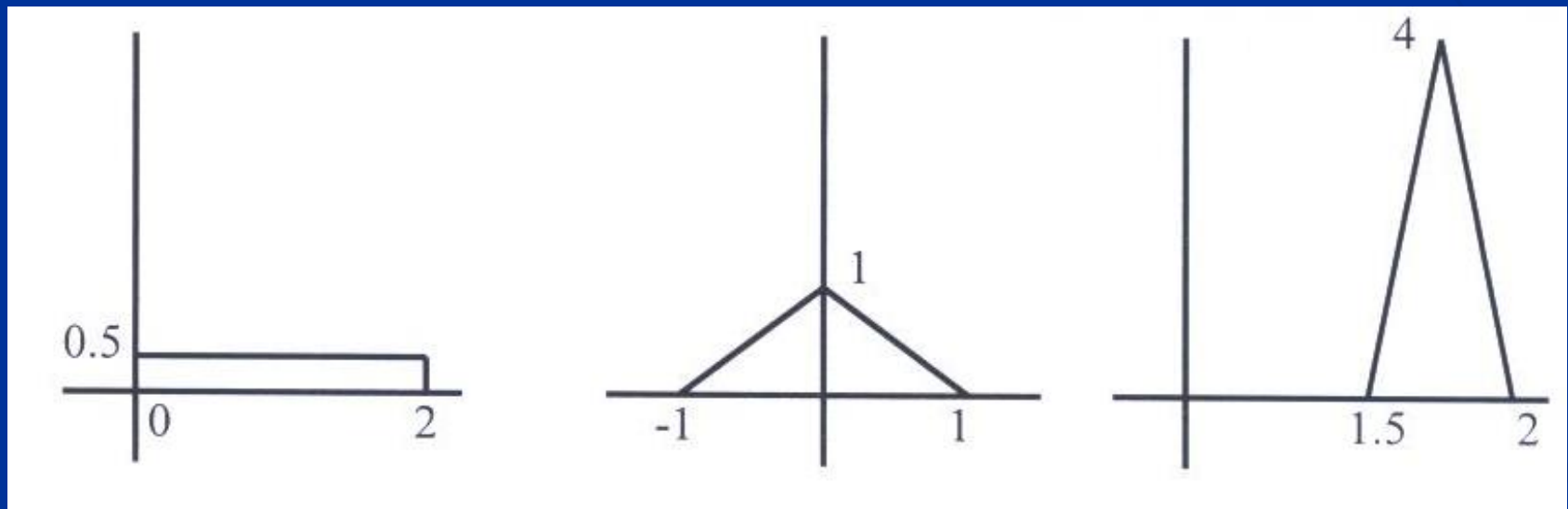
- Υποθέστε ότι έχουμε ένα δι-διάστατο χώρο χαρακτηριστικών $\mathbf{x}=[x_1, x_2]$, δύο κλάσεις ταξινόμησης ω_1 και ω_2 και ότι οι $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \omega_1)$ και $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \omega_2)$ ακολουθούν Κανονική κατανομή με την ίδια μέση τιμή $\boldsymbol{\mu}=[0, 0]$ και διασπορές $\sigma_1^2=4$ και $\sigma_2^2=16$. Έστω επίσης ότι $p(\omega_1)=p(\omega_2)$.
- Αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Bayes
 - Ποιες είναι οι δύο συναρτήσεις διαχωρισμού $g_1(x_1, x_2)$ και $g_2(x_1, x_2)$;
 - Ποιο είναι το σύνολο απόφασης;

7^η Άσκηση

- Έστω ότι παίζετε σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι και μπροστά σας υπάρχουν τρεις κουρτίνες
- Ο παρουσιαστής σας ενημερώνει ότι πίσω από μία από αυτές κρύβεται ένα αυτοκίνητο
- Έστω ότι επιλέγεται την κουρτίνα A
- Ο παρουσιαστής ανοίγει την κουρτίνα Γ για να σας δείξει ότι το αυτοκίνητο δε βρίσκεται πίσω από αυτή
- Μήπως πρέπει να αλλάξετε γνώμη και να επιλέξετε την κουρτίνα B ;
- Ορίστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας όρους από τη θεωρία απόφασης του Bayes
- Ποια είναι η ex των προτέρων γνώμη σας και ποια η ex των υστέρων, μετά δηλαδή από το άνοιγμα της κουρτίνας Γ ;
- Ποιος είναι ο κανόνας απόφασης που πρέπει να χρησιμοποιήσετε;

8^η Άσκηση

- Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις δείχνουν τις υπό συνθήκη πυκνότητες πιθανότητας για τις κλάσεις ω_i και το μονοδιάστατο διάνυσμα παρατήρησης x .



- Βρείτε τις περιοχές ελάχιστου λάθους και τις αντίστοιχες πιθανότητες λάθους, θεωρώντας ότι $p(\omega_1)=0.25$, $p(\omega_2)=0.25$ και $p(\omega_3)=0.5$.

$$P(\text{error}) = 1 - \int P(\omega_{\max} / x) p(x) dx$$

9^η Άσκηση

Έστω ότι η $\omega_{\max}(x)$ είναι η κατάσταση της φύσης για την οποία $P(\omega_{\max} / x) \geq P(\omega_i / x)$ για κάθε i , όπου $i=1, \dots, C$.

(α) Αποδείξτε ότι $P(\omega_{\max} / x) \geq 1/C$.

(β) Αποδείξτε ότι για τον κανόνα απόφασης ελαχίστου λάθους η μέση πιθανότητα λάθους δίνεται από

$$P(\text{error}) = 1 - \int P(\omega_{\max} / x) p(x) dx$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα δείξτε ότι

$$P(\text{error}) \leq (C-1)/C$$

(δ) Περιγράψτε μια περίπτωση όπου $P(\text{error}) = (C-1)/C$

10^η Άσκηση

- Έστω 3 φυλακισμένοι σε μια φυλακή. Ένας από τους 3 (δεν ξέρουμε ποιος) θα εκτελεστεί το επόμενο πρωί μόλις ανατείλει ο ήλιος
- Ο A είναι πολύ νευρικός γιατί ξέρει ότι έχει $1/3$ πιθανότητα να εκτελεστεί το πρωί. Προσπαθεί να πάρει ορισμένες πληροφορίες από το φύλακα
- «Ξέρω ότι δεν πρόκειται να μου πεις αν θα εκτελεστώ το άλλο πρωί, αλλά τουλάχιστον μπορείς να μου πεις ποιος από τους άλλους 2 (B και Γ) δε θα εκτελεστεί. Αφού έτσι και αλλιώς ένας από τους άλλους 2 δε θα εκτελεστεί, δεν πρόκειται να μου δώσεις μεγαλύτερη πληροφορία»
- Αυτό ακούγεται λογικό στο φύλακα και λέει στον A ότι ο Γ δε θα εκτελεστεί
- Τότε ο A γίνεται πολύ ανήσυχος. Πριν ρωτήσει τον φύλακα φαινότανε να έχει $1/3$ πιθανότητα για να εκτελεστεί. Τώρα που ξέρει ότι ο Γ δε θα εκτελεστεί, μοιάζει να έχει $1/2$. Ο A μονολογεί, «Τι έκανα; Γιατί να ρωτήσω το φύλακα;».
- Εξηγείστε αν ο φύλακας έδωσε στην πραγματικότητα κάποια πληροφορία στον A
- Ποια είναι η πιθανότητα να εκτελεστεί ο A τώρα που ξέρει ότι ο Γ δε θα εκτελεστεί;

11^η Άσκηση

- Σε πολλά προβλήματα ταξινόμησης προτύπων υπάρχει η δυνατότητα είτε να ανατεθεί ένα πρότυπο σε μία από τις c υποψήφια κλάσεις είτε να απορριφθεί ως μη αναγνωρίσιμο (δεν μπορούμε να αποφασίσουμε σε ποια κλάση ανήκει). Εάν το κόστος για μία απόρριψη δεν είναι πολύ μεγάλο, η απόρριψη μπορεί τελικά να είναι η καλύτερη λύση. Έστω ότι

$$\lambda(a_i / \omega_j) = \begin{cases} 0 & i = j, \quad i, j = 1, \dots, c \\ \lambda_r & i = c + 1 \\ \lambda_s & \text{αλλού} \end{cases}$$

- όπου το λ_r (**r**eject) είναι το κόστος που προκύπτει εάν επιλεγεί η ($c + 1$) ενέργεια (δηλαδή η απόρριψη ενός προτύπου ως μη αναγνωρίσιμο) και το λ_s (**s**elect) είναι το κόστος που προκύπτει για μία λάθος αναγνώριση (ανάθεση σε μη σωστή κλάση).

11^η Άσκηση (συνέχεια)

- Αποδείξτε ότι το ελάχιστο κόστος προκύπτει εάν:
 - αποφασίζουμε ω_i εάν $P(\omega_i / \mathbf{x}) \geq P(\omega_j / \mathbf{x})$ α όλα τα j
και $P(\omega_i / \mathbf{x}) \geq 1 - \lambda_r / \lambda_s$
 - αποφασίζουμε απόρριψη σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.
- Τι συμβαίνει όταν $\lambda_r = 0$; (το κόστος απόρριψης είναι μηδενικό)
- Τι συμβαίνει όταν $\lambda_r > \lambda_s$; (το κόστος απόρριψης είναι μεγαλύτερο από το κόστος λάθος ταξινόμησης).