

Λήψη Απλών Αποφάσεων

Αρχή της Μέγιστης Αναμενόμενης Χρησιμότητας

- Συνάρτηση χρησιμότητας
 - Αποδίδει μια αριθμητική τιμή για να εκφράσει πόσο επιθυμητή είναι μία κατάσταση
 - Οι χρησιμότητες συνδυάζονται με τις πιθανότητες αποτελεσμάτων των ενεργειών για να δώσουν την **αναμενόμενη χρησιμότητα** κάθε ενέργειας
 - $U(S)$ – Utility
- Αναμενόμενη χρησιμότητα
 - $EU(A|E) = \sum_i P(\text{Αποτέλεσμα}_i(A) | \text{Εκτέλεση}(A), E) \cdot U(\text{Αποτέλεσμα}_i(A))$
 - A: ενέργεια, E: οι μαρτυρίες του πράκτορα σχετικά με τον «κόσμο»

Αρχή της Μέγιστης Αναμενόμενης Χρησιμότητας

- Υπολογισμός της πιθανότητας: NP-δύσκολος
 - Δίκτυα Bayes
- Αρχή της Μέγιστης Αναμενόμενης Χρησιμότητας:
 - Θα πρέπει να επιλεγθεί η ενέργεια που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη χρησιμότητα
- Αρχικά, θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της χρησιμότητας μόνο για μεμονωμένες ενέργειες (αποφάσεις μιας επιλογής, όχι ακολουθιακές αποφάσεις)

Προτιμήσεις και λοταρίες (σημειογραφία)

- Προτιμήσεις
 - $A \succ B$ το A είναι προτιμότερο από το B
 - $A \sim B$ ο πράκτορας είναι αδιάφορος μεταξύ των A και B (ισοδύναμες επιλογές)
 - $A \succeq B$ ο πράκτορας προτιμά το A από το B , ή είναι αδιάφορος μεταξύ αυτών (ισοδύναμες επιλογές)
- Τα A και B μπορεί να είναι συγκεκριμένες **Αιτιοκρατικές Ενέργειες** ή **Λοταρίες** (lotteries)
 - **Λοταρία:** Μια κατανομή πιθανοτήτων ως προς ένα σύνολο πραγματικών αποτελεσμάτων
 - $L = [p_1, C_1; p_2, C_2; \dots p_n, C_n]$

Αξιώματα της Θεωρίας Χρησιμοτήτων

■ Διαταξιμότητα

- $(A \succ B) \vee (B \succ A) \vee (A \sim B)$
- Με δεδομένες δύο οποιεσδήποτε καταστάσεις, ένας λογικός πράκτορας πρέπει να προτιμήσει είτε μία από τις δύο είτε να τις αξιολογήσει και τις δύο ως εξίσου προτιμητέες.
- Με άλλα λόγια ο πράκτορας δεν μπορεί να αποφύγει την απόφαση.

■ Μεταβατικότητα

- $(A \succ B) \wedge (B \succ C) \Rightarrow (A \succ C)$
- Με δεδομένες τρεις οποιεσδήποτε καταστάσεις, εάν ένας πράκτορας προτιμά την κατάσταση A από τη B και τη B από τη C, τότε πρέπει να προτιμά την A από τη C.

Αξιώματα της Θεωρίας Χρησιμοτήτων

■ Συνέχεια

- $A \succ B \succ C \Rightarrow \exists p [p, A; 1-p, C] \sim B$

- Εάν κάποια κατάσταση B είναι σε προτίμηση μεταξύ των A και C , τότε υπάρχει κάποια πιθανότητα p για την οποία ο λογικός πράκτορας θα είναι αδιάφορος μεταξύ του να επιλέξει τη B για σίγουρα ή να επιλέξει μια λοταρία που δίνει την A με πιθανότητα p και τη C με πιθανότητα $1-p$.

Αξιώματα της Θεωρίας Χρησιμοτήτων

■ Αντικαταστασιμότητα

- $A \sim B \Rightarrow [p, A; 1 - p, C] \succeq [p, B; 1 - p, C]$
- Εάν ένας πράκτορας είναι αδιάφορος μεταξύ δύο λοταριών A και B , τότε ο πράκτορας είναι αδιάφορος μεταξύ δύο πιο πολύπλοκων λοταριών που είναι ίδιες με την εξαίρεση ότι το B έχει πάρει τη θέση του A σε μία από αυτές.
- Αυτό ισχύει ανεξάρτητα από τις πιθανότητες και τα άλλα αποτελέσματα στις λοταρίες.

Αξιώματα της Θεωρίας Χρησιμοτήτων

■ Μονοτονικότητα

- $A \succ B \Rightarrow (p \geq q \Leftrightarrow [p, A; 1 - p, B] \succeq [q, A; 1 - q, B])$
- Έστω ότι υπάρχουν δύο λοταρίες A και B που έχουν τα ίδια δύο αποτελέσματα. Εάν ένας πράκτορας προτιμά το A από το B, τότε ο πράκτορας πρέπει να προτιμήσει τη λοταρία που έχει την υψηλότερη πιθανότητα για το A.

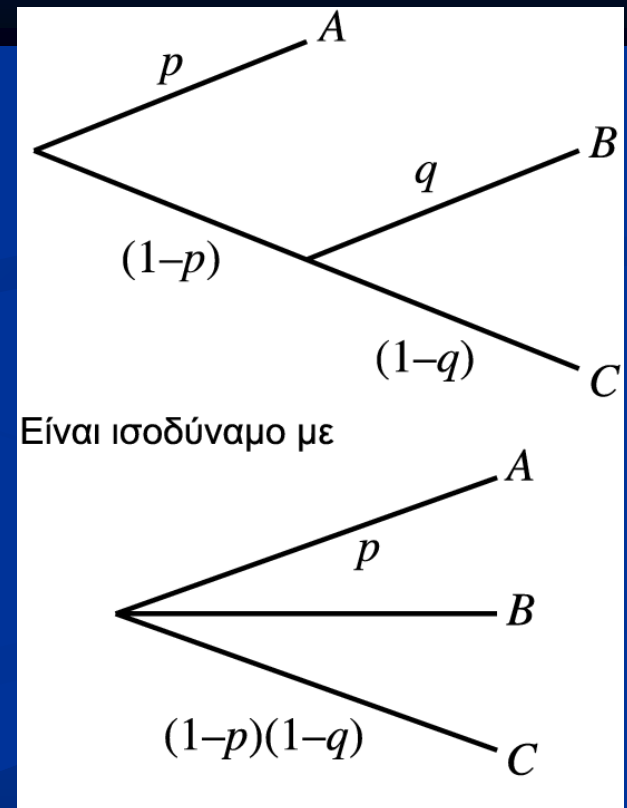
Αξιώματα της Θεωρίας Χρησιμότητων

■ Αποσυνθεσιμότητα

- $[p, A; 1 - p, [q, B; 1 - q, C]] \sim [p, A; (1 - p)q, B; (1 - p)(1 - q), C]$

Οι σύνθετες λοταρίες μπορούν να αναχθούν σε απλούστερες με χρήση των νόμων των πιθανοτήτων.

«Κανόνας της μη διασκέδασης στο τζόγο»



Χρησιμότητα

- Αρχή της χρησιμότητας:
 - $U(A) > U(B) \Leftrightarrow A \succ B$
 - $U(A) = U(B) \Leftrightarrow A \sim B$ (ισοδύναμες καταστάσεις)
- Αρχή της μέγιστης αναμενόμενης χρησιμότητας:



- Η χρησιμότητα μιας λοταρίας είναι το άθροισμα της πιθανότητας κάθε αποτελέσματος επί τη χρησιμότητα αυτού του αποτελέσματος

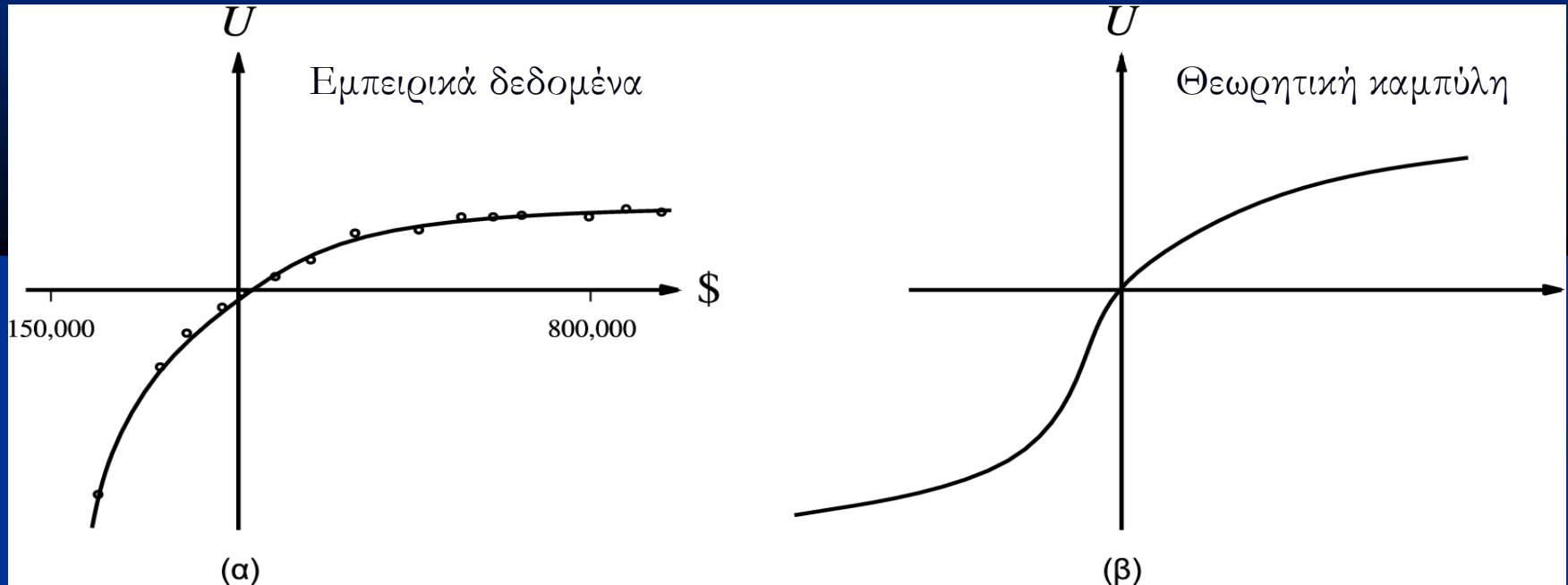
Συναρτήσεις χρησιμότητας

- Χρηματικές αξίες: η χρησιμότητα των χρημάτων
- Έστω ότι σε ένα τηλεπαιχνίδι μας προσφέρεται η εξής δυνατότητα:
 - $[0.5, 30000000€; 0.5, 0€]$, $[1.0, 10000000€]$
- Αναμενόμενη χρησιμότητα (k είναι η τρέχουσα οικονομική κατάσταση):



Χρησιμότητα των χρημάτων

- Η χρησιμότητα των χρημάτων είναι σχεδόν ακριβώς ανάλογη με το λογάριθμο του ποσού (Bernoulli): $U(M) = a \cdot \log(b + c \cdot M)$



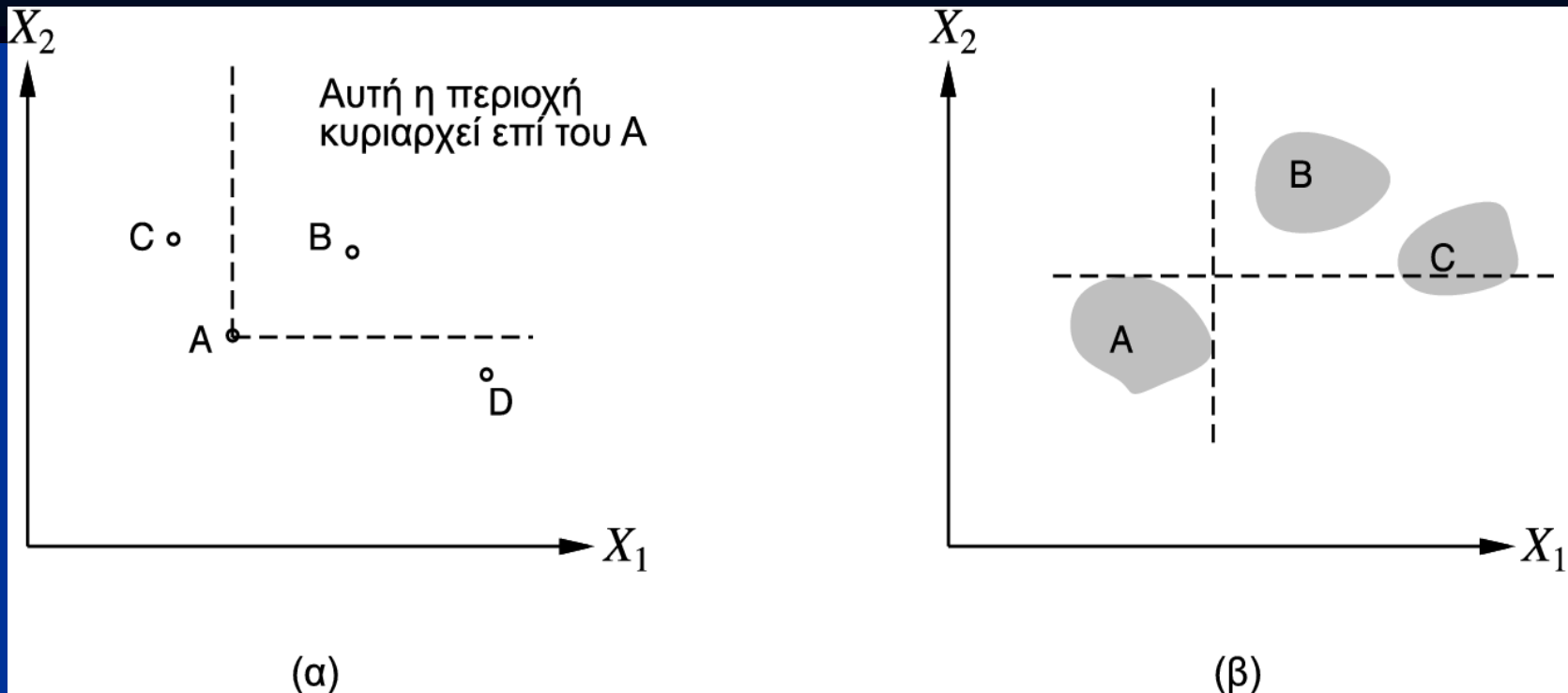
- Αποστροφή/Επιζήτηση/Ουδετερότητα ρίσκου
- Βέβαιο ισοδύναμο
 - Η χρηματική αξία που θα αποδεχθεί ένας πράκτορας έναντι μιας λοταρίας
- Ασφάλιστρο
 - Η διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης χρηματικής αξίας μιας λοταρίας και του βέβαιου ισοδύναμού της

Κλίμακες χρησιμότητας

- Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί (δεν μεταβάλλεται η συμπεριφορά του πράκτορα):
 - $U'(S) = k_1 + k_2 U(S)$, $k_1, k_2 > 0$
- Κανονικοποιημένες χρησιμότητες
 - Στο διάστημα $[u_{\perp} = 0, u_{\top} = 1]$
- Πρότυπη λοταρία (standard lottery)
 - $[p, u_{\top}; (1 - p), u_{\perp}]$

Πολυκριτηριακές συναρτήσεις χρησιμότητας

- Διάνυσμα κριτηρίων: $\mathbf{X} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$
- Αυστηρή κυριαρχία



Στοχαστική κυριαρχία

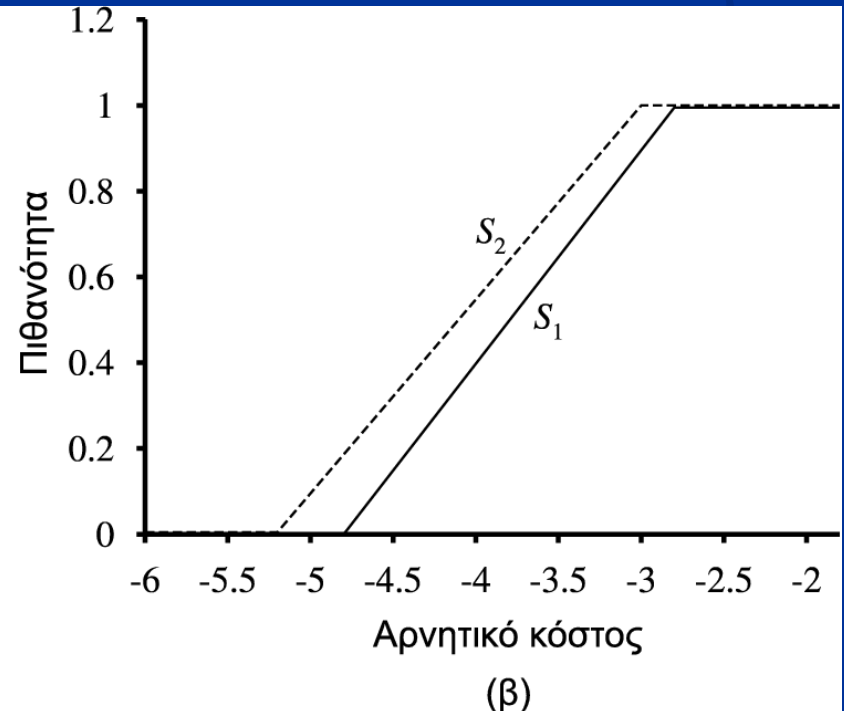
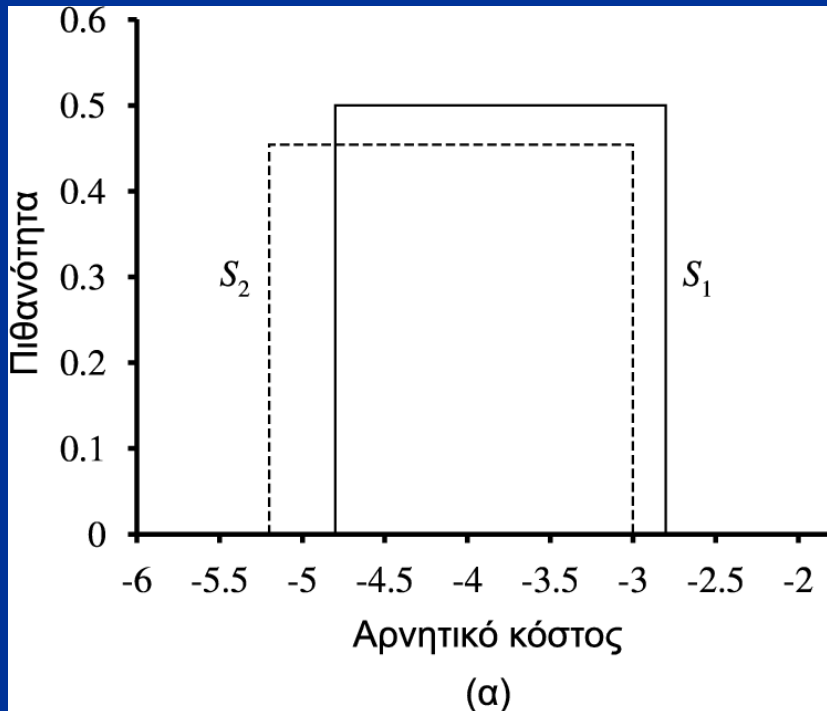
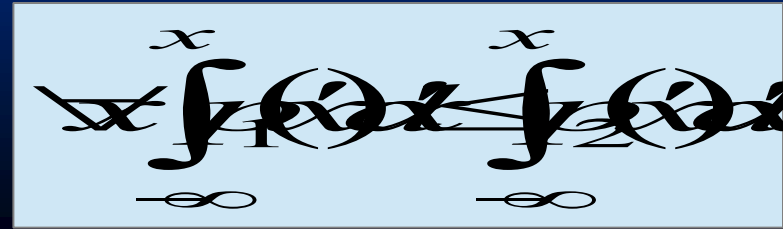
- Εάν το A_1 κυριαρχεί στοχαστικά έναντι του A_2 , τότε για οποιαδήποτε μονοτονικά μη φθίνουσα συνάρτηση χρησιμότητας $U(x)$ η αναμενόμενη χρησιμότητα του A_1 είναι τουλάχιστον εξίσου υψηλή με την αναμενόμενη χρησιμότητα του A_2 .
- Συνεπώς, αν μια ενέργεια κυριαρχείται στοχαστικά από κάποια άλλη ως προς όλα τα κριτήρια, τότε μπορεί να απορριφθεί.

Στοχαστική κυριαρχία

■ Κόστος κατασκευής αεροδρομίου:

- Θέση S_1 : $U[2,8 \cdot 10^6 \text{ €}, 4,8 \cdot 10^6 \text{ €}](x)$
- Θέση S_2 : $U[3,0 \cdot 10^6 \text{ €}, 5,2 \cdot 10^6 \text{ €}](x)$
- Η χρησιμότητα φθίνει με το κόστος

Σωρευτικές κατανομές:



Προτιμήσεις χωρίς αβεβαιότητα

- Κανονικότητα στη δομή των προτιμήσεων:
 - $U(x_1, \dots, x_n) = f [f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)]$
όπου η $f()$ είναι συνήθως η πρόσθεση
- Ανεξαρτησία προτιμήσεων (X_1, X_2) ως προς το X_3 :
 - Δύο κριτήρια X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητα ως προς την προτίμηση από ένα κριτήριο X_3 , εάν η προτίμηση μεταξύ των αποτελεσμάτων (x_1, x_2, x_3) και (x'_1, x'_2, x_3) δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή x_3 του κριτηρίου X_3 .

Προτιμήσεις χωρίς αβεβαιότητα

- **Αμοιβαία ανεξαρτησία προτιμήσεων**
- Εάν τα κριτήρια X_1, \dots, X_n παρουσιάζουν αμοιβαία ανεξαρτησία προτιμήσεων, τότε η συμπεριφορά προτίμησης του πράκτορα μπορεί να περιγραφεί ως μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum_i V_i(x_i)$$

όπου κάθε V_i είναι μια συνάρτηση αξίας που αναφέρεται μόνο στο κριτήριο X_i .

Προτιμήσεις με αβεβαιότητα

■ **Ανεξαρτησία χρησιμότητας**

- Ένα σύνολο κριτηρίων X είναι ανεξάρτητο ως προς την χρησιμότητα από ένα σύνολο κριτηρίων Y εάν οι προτιμήσεις μεταξύ των λοταριών επί των κριτηρίων του X είναι ανεξάρτητες από τις συγκεκριμένες τιμές των κριτηρίων στο Y .

- Ένα σύνολο κριτηρίων παρουσιάζει **Αμοιβαία Ανεξαρτησία Χρησιμότητας**, αν όλα τα υποσύνολά του είναι ανεξάρτητα ως προς τη χρησιμότητα από τα υπόλοιπα κριτήρια.

- Πολλαπλασιαστική συνάρτηση χρησιμότητας για την περίπτωση 3 κριτηρίων (Keeney):

Δίκτυα αποφάσεων

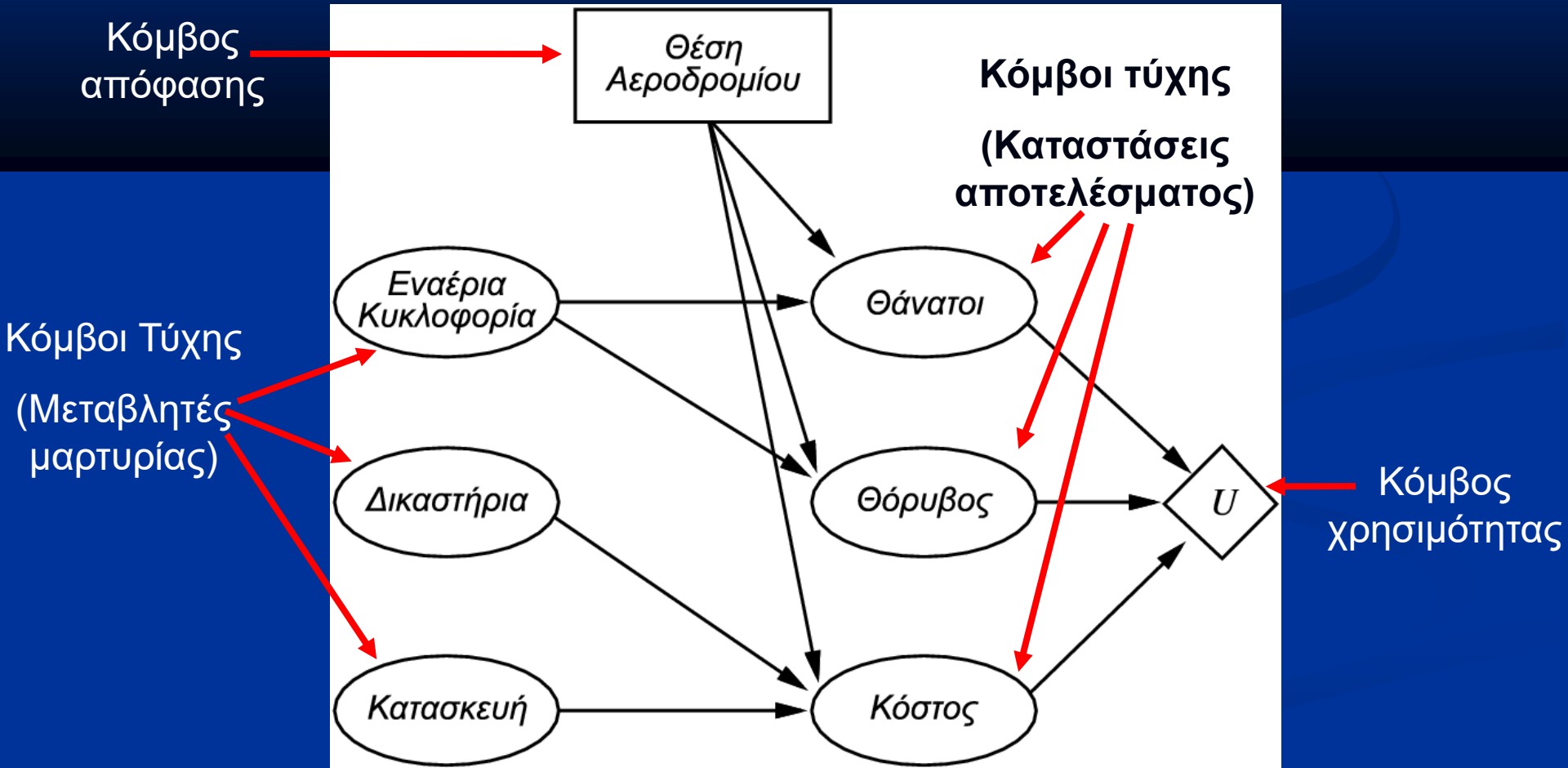
- Γενικός μηχανισμός για τη λήψη ορθολογικών αποφάσεων
- Στη γενικότερη μορφή του αναπαριστά πληροφορίες σχετικά με την τρέχουσα κατάσταση του πράκτορα, τις δυνατές ενέργειές του, την κατάσταση που θα προκύψει από κάθε ενέργειά του και τη χρησιμότητα αυτής της κατάστασης.

Δίκτυα αποφάσεων

- Περιλαμβάνει τρεις τύπους κόμβων:
 - **Κόμβοι τύχης**
 - Σχήμα έλλειψης
 - Αναπαριστούν τυχαίες μεταβλητές
 - **Κόμβοι απόφασης**
 - Σχήμα ορθογώνιο
 - Αναπαριστούν σημεία όπου αυτός που λαμβάνει την απόφαση έχει επιλογή ενεργειών
 - **Κόμβοι χρησιμότητας**
 - Σχήμα ρόμβου
 - Αναπαριστούν τη συνάρτηση χρησιμότητας του πράκτορα

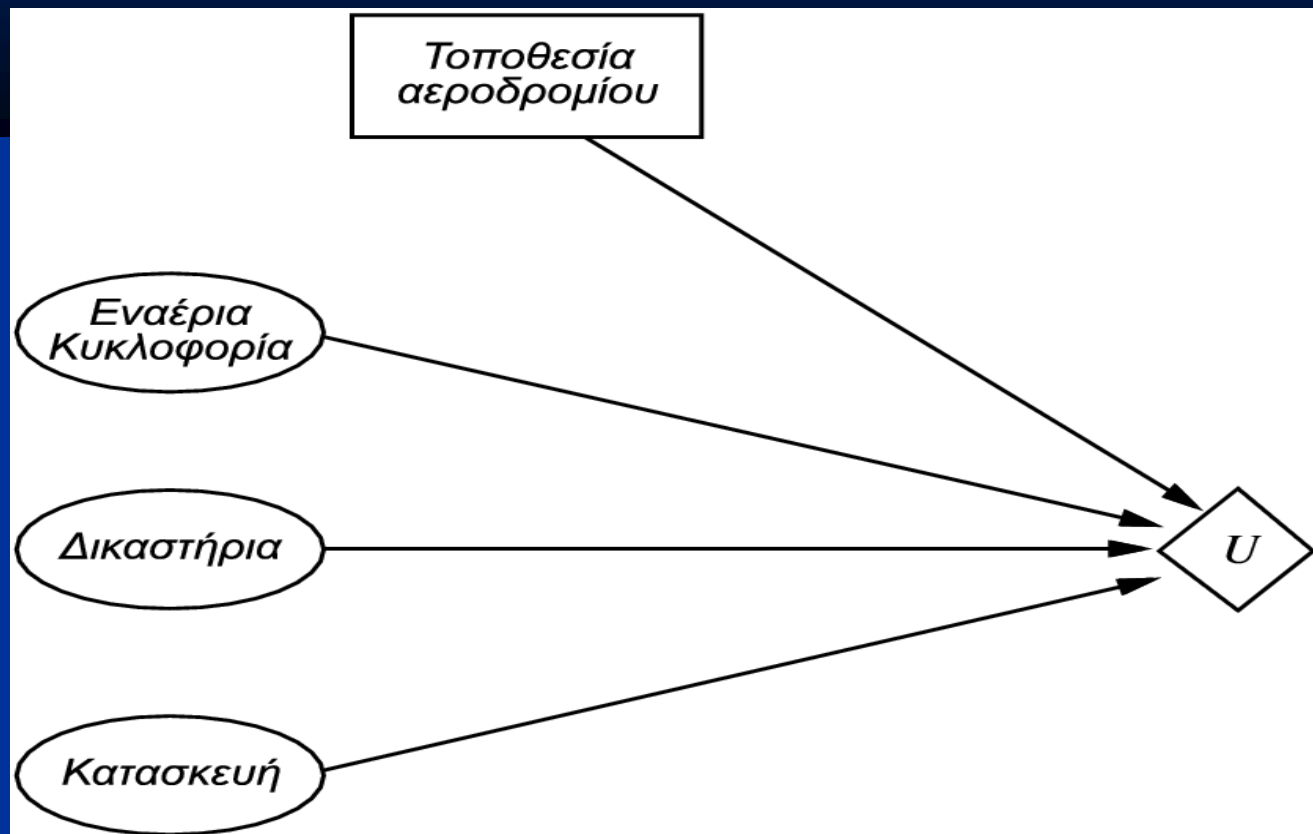
Δίκτυα αποφάσεων

■ Πρόβλημα Χωροθέτησης Αεροδρομίου



Δίκτυα αποφάσεων

- Απλοποιημένη μορφή
 - Έχουν απαλειφθεί οι κόμβοι τύχης που αντιστοιχούν σε καταστάσεις αποτελέσματος



Δίκτυα αποφάσεων

- Αποτίμηση δικτύων αποφάσεων
 - 1. Καθορισμός των μεταβλητών μαρτυρίας για την τρέχουσα κατάσταση
 - 2. Για κάθε δυνατή τιμή του κόμβου απόφασης:
 - (α) Απόδοση αυτής της τιμής στον κόμβο απόφασης
 - (β) Υπολογισμός των εκ των υστέρων πιθανοτήτων για τους γονικούς κόμβους του κόμβου χρησιμότητας, με χρήση ενός συνήθους αλγόριθμου πιθανοτικού συμπερασμού
 - (γ) Υπολογισμός της προκύπτουσας χρησιμότητας της ενέργειας
 - 3. Επιστροφή της ενέργειας με την υψηλότερη χρησιμότητα