Κεφάλαιο 4
Ορίζουσες

Όταν λύνουμε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

βλέπουμε ότι η ποσότητα $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ παίζει σημαντικό ρόλο. Πράγματι, αν αυτή είναι μη μηδενική, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{D}, y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{D}$. Τον αριθμό $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ τον ονομάζουμε **ορίζουσα** του πίνακα $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Στο κεφάλαιο αυτό, αφού υπενθυμίσουμε πως αντιστοιχίζουμε σε κάθε τετραγωνικό πίνακα έναν αριθμό (την ορίζουσά του), θα δούμε τις βασικές ιδιότητες των οριζουσών. Εδώ μας ενδιαφέρουν κυρίως ο υπολογισμός των οριζουσών και οι εφαρμογές τους στους αντίστροφους πίνακες και στα γραμμικά συστήματα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Όπως έχουμε καθιερώσει σε προηγούμενα κεφάλαια, με $\mathbb{F}$ παριστάνουμε ένα από τα σύνολα $\mathbb{R},\mathbb{C}$ και με $M_n(\mathbb{F})$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$.

Ορισμός 1 (ορίζουσα 2x2 πίνακα)

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F})$. *Η ορίζουσα του A είναι ο αριθμός*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Για παράδειγμα, $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\cdot 4 - (-1)\cdot 3 = 11$, $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\cdot 4 - 0\cdot 3 = 8.$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την ορίζουσα $n \times n$ πίνακα και για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε την έννοια της μετάθεσης

Ορισμός 2 (μεταθέσεις)

*Μια **μετάθεση** n στοιχείων είναι μια 1-1 απεικόνιση από το σύνολο* $\{1,2,...,n\}$ *στο* $\{1,2,...,n\}$.

Βλέπουμε ότι κάθε μετάθεση είναι αναγκαστικά 1-1 και επί απεικόνιση. Για παράδειγμα, η απεικόνιση $\sigma:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}, \sigma(1)=2, \sigma(2)=3, \sigma(3)=1,$ είναι μια μετάθεση. Υπάρχει εδώ ένας χρήσιμος συμβολισμός. Κάθε μετάθεση παριστάνεται με έναν $2\times n$ πίνακα του οποίου η πρώτη γραμμή είναι η 1 2 … n και δεύτερη γραμμή είναι η $\sigma(1)\,\sigma(2)\,...\,\sigma(n)$, δηλαδή $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n)\end{pmatrix}$. Κάτω από κάθε στοιχείο της πρώτης γραμμής βρίσκεται η εικόνα του. Συνεπώς η μετάθεση του παραδείγματος συμβολίζεται με $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Επίσης, αντί να γράφουμε $\sigma(i)$ συχνά γράφουμε σ_i. Στο παράδειγμα, $\sigma_1=2, \sigma_2=3, \sigma_3=1$.

Το σύνολο των μεταθέσεων n στοιχείων συμβολίζεται με S_n.

Έστω $\sigma\in S_n$. Το **πρόσημο**, $sign(\sigma)$, της σ ορίζεται ως εξής:

- $sign(\sigma)=1$ αν υπάρχει άρτιο πλήθος ζευγών δεικτών (i,j) τέτοιων ώστε $i<j$ και $\sigma_i>\sigma_j$
- $sign(\sigma)=-1$ αν υπάρχει περιττό πλήθος ζευγών δεικτών (i,j) τέτοιων ώστε $i<j$ και $\sigma_i>\sigma_j$.

Για παράδειγμα, η μετάθεση $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ έχει πρόσημο 1, $sign(\sigma)=1$, γιατί το πλήθος των ζευγών στον παραπάνω ορισμό είναι 2 (τα ζεύγη αυτά είναι (1,3), (2,3)). Η μετάθεση $\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ έχει πρόσημο –1, $sign(\tau)=-1$, γιατί τα εν λόγω ζεύγη είναι 3 (και είναι τα (1,2),(1,3),(2,3)). Η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$ έχει πρόσημο –1 αφού υπάρχει μόνο 1 ζεύγος με τις ιδιότητες του ορισμού (και είναι το (3,4)).

Ορισμός 3 (ορίζουσα nxn πίνακα)

Έστω $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$. *Η **ορίζουσα** του A είναι ο αριθμός*

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}.$$

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό, η ορίζουσα $\det A$ είναι ένα άθροισμα προσημασμένων όρων και κάθε όρος $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$ είναι ένα γινόμενο n στοιχείων του πίνακα που προέρχονται από *διαφορετικές* γραμμές και στήλες. Με άλλα λόγια κάθε γραμμή (και κάθε στήλη) συνεισφέρει ακριβώς έναν παράγοντα στο γινόμενο $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$.

Παραδείγματα

- Έστω $n=1$, $A=(a)$. Τότε το S_1 έχει ένα στοιχείο και $\det A=a$.
- Έστω $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$. Επειδή το σύνολο S_2 έχει 2 στοιχεία,

  $S_2=\left\{e=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$ και ισχύει $sign(e)=1, sign(\sigma)=-1$, παίρνουμε

  $\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.
- Έστω $n=3$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$. Το S_3 έχει 6 στοιχεία.

  $$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

  και τα πρόσημα είναι $1,-1,-1,1,1,-1$ αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας τον ορισμό βρίσκουμε

  $\det A=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$.

ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Ορισμός 4 (προσαρτημένος πίνακας)

Έστω $A\in M_n(\mathbb{F})$. *Για κάθε* $i,j\in\{1,...,n\}$, *συμβολίζουμε με* A_{ij} *τον* $(n-1)\times(n-1)$ *πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i γραμμή και j στήλη. Ο*

προσαρτημένος πίνακας *$adjA$ του A είναι ο $n\times n$ πίνακας που στη θέση (i,j) έχει το στοιχείο* $(-1)^{i+j}\det A_{ji}$.

Προσοχή. Στη θέση (1,2) του $adjA$ υπάρχει το $-\det A_{21}$ και όχι το $-\det A_{12}$.

Παράδειγμα

Αν $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$, τότε

$$A_{11}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad\left(=\begin{pmatrix}\cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1}\\ \cancel{0} & 2 & -1\\ \cancel{0} & 3 & 4\end{pmatrix}\right),\quad \det A_{11}=11$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\quad\left(=\begin{pmatrix}\cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1}\\ 0 & \cancel{2} & -1\\ 0 & \cancel{3} & 4\end{pmatrix}\right),\quad \det A_{12}=0$$

$$A_{13}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\quad\left(=\begin{pmatrix}\cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1}\\ 0 & 2 & \cancel{-1}\\ 0 & 3 & \cancel{4}\end{pmatrix}\right),\quad \det A_{13}=0$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad\left(=\begin{pmatrix}\cancel{1} & 0 & 1\\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1}\\ \cancel{0} & 3 & 4\end{pmatrix}\right),\quad \det A_{21}=-3.$$

κλπ

Έχουμε $adjA=\begin{pmatrix}\det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31}\\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32}\\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι τα πρόσημα στον ορισμό του προσαρτημένου πίνακα εμφανίζονται εναλλάξ σύμφωνα με τη διάταξη σκακιέρας

$$\begin{matrix}+ & - & + & \dots\\ - & + & - & \dots\\ + & - & + & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{matrix}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Στα παρακάτω, όλοι οι πίνακες είναι $n \times n$ εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι άλλο.

Πρόταση 1

Ανάστροφοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα, δηλαδή $\det A = \det A^t$ *για κάθε* $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Πρόταση 2

1. *Αν ο πίνακας A έχει μια μηδενική γραμμή (ή στήλη), τότε* $\det A = 0$.
2. *Αν ο πίνακας A έχει δυο ίσες γραμμές (ή στήλες), τότε* $\det A = 0$.
3. *Αν ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός (ή κάτω τριγωνικός), τότε η ορίζουσα του A είναι το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων. Ιδιαίτερα η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με 1.*

Για παράδειγμα, $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$ γιατί υπάρχει μια μηδενική γραμμή. Έχουμε $\det\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & y & 3 \\ -1 & z & -1 \end{pmatrix} = 0$, γιατί δυο στήλες είναι ίδιες. Επίσης $\det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & y & 0 \\ -1 & 4 & z \end{pmatrix} = xyz$, γιατί ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός.

Πρόταση 3 (στοιχειώδεις μετασχηματισμοί και ορίζουσες)

Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον A με

- *πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (ή στήλης) με ένα k, τότε* $\det B = k \det A$.
- *εναλλαγή δυο γραμμών (ή στηλών), τότε* $\det B = -\det A$.
- *πρόσθεση σε μια γραμμή (ή στήλη) πολλαπλασίου άλλης γραμμής (ή στήλης), τότε* $\det B = \det A$.

Ειδικά, για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει $\det(kA) = k^n \det A$.

Για παράδειγμα, έχουμε $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ γιατί έχουμε εναλλαγή των δυο πρώτων

γραμμών, και $\det\begin{pmatrix} a+kx & b+ky & c+kz \\ x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ αφού η πρώτη γραμμή

του πρώτου πίνακα προκύπτει από το δεύτερο προσθέτοντας πολλαπλάσιο της δεύτερης γραμμής στην πρώτη.

Τα επόμενα τρία αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά.

Θεώρημα 4 (κριτήριο αντιστρέψιμου πίνακα)

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί $\det A = 0$.

Θεώρημα 5 (ορίζουσα γινομένου)

Για κάθε $A, B \in M_n(F)$ έχουμε $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Δηλαδή η ορίζουσα του γινομένου δυο πινάκων ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων.

Θεώρημα 6 (ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς μια γραμμή ή στήλη)

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας και $i, j \in \{1, \dots, n\}$, τότε με A_{ij} συμβολίζουμε τον $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i γραμμή και j στήλη. Τότε για κάθε i έχουμε

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

και για κάθε j έχουμε

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{j+2} a_{2j} \det A_{2j} + \dots + (-1)^{j+n} a_{nj} \det A_{nj}.$$

Σημείωση Η πρώτη από τις δυο προηγούμενες ταυτότητες λέγεται το ανάπτυγμα της ορίζουσας του A ως προς την i *γραμμή*. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $a_{i1},\ldots,a_{in}$ που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος είναι τα στοιχεία της i γραμμής. Όμοια η δεύτερη ταυτότητα λέγεται το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τη j *στήλη*.

Παράδειγμα

Ας δούμε αναλυτικά την 3×3 περίπτωση. Έστω $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Αναπτύγματα ως προς τις γραμμές

Ας επιλέξουμε $i=1$ (δηλαδή την πρώτη γραμμή). Έχουμε

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right),$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} \right),$$

$$A_{13}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} \right) \quad \text{και}$$

$$\det A = (-1)^2 a_{11}\det A_{11} + (-1)^3 a_{12}\det A_{12} + (-1)^4 a_{13}\det A_{13} =$$
$$a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Επιλέγοντας $i=2$, βρίσκουμε

$$\det A = -a_{21}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{23}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

και επιλέγοντας $i=3$, βρίσκουμε

$$\det A = a_{31}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} - a_{32}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} + a_{33}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Αναπτύγματα ως προς τις στήλες

Αν επιλέξουμε $j=1$ (δηλαδή την πρώτη στήλη) βρίσκουμε

$$\det A = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Για $j = 2$ και $j = 3$ βρίσκουμε αντίστοιχα

$$\det A = -a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{32}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$\det A = a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} - a_{23}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + a_{33}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Για να δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα, έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Τότε το ανάπτυγμα της $\det A$ ως προς την πρώτη γραμμή είναι

$$\det A = 1\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= (3\cdot 6 - 0) - 2((-1)\cdot 6 - 4\cdot 5) + 0 = 70$$

και ως προς τη δεύτερη γραμμή είναι

$$\det A = -(-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= -(-1)(12 - 0) + 3(6 - 0) - 4(0 - 10) = 70.$$

Το ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη στήλη είναι

$$\det A = -2\det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - 0\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= (-2)(-26) + 3(6 - 0) - 0 = 70.$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή των οριζουσών σχετίζεται με τον υπολογισμό αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 7

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας.

- *Τότε*

$$A(adjA) = (adjA)A = (\det A)I,$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας.

- *Αν έχουμε* $\det A \neq 0$, *τότε* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$.

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, τότε εύκολα επαληθεύεται ότι $\det A = 11$ και

$adjA = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Η ταυτότητα στο πρώτο μέρος του Θεωρήματος 7

είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 7 έχουμε $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Μια άλλη εφαρμογή των οριζουσών είναι η επίλυση τετραγωνικών γραμμικών συστημάτων που έχουν αντιστρέψιμο πίνακα συντελεστών.

Θεώρημα 8 (κανόνας του Cramer)

Θεωρούμε ένα τετραγωνικό γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = b_n \end{array},$$

δηλαδή ένα γραμμικό σύστημα όπου το πλήθος των αγνώστων και το πλήθος των εξισώσεων είναι το ίδιο. Υποθέτουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών δεν είναι μηδέν. Τότε η μοναδική λύση είναι η

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

όπου $D = \det(a_{ij})$ *είναι η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών και* D_i *είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον πίνακα των συντελεστών αν αντικαταστήσουμε την i στήλη με τη στήλη* $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *των σταθερών όρων.*

Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα $\begin{matrix} x+3y+z=10 \\ 2x+2y-z=11 \\ x+3y+4z=12 \end{matrix}$.

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = -12$$

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \\ 12 & 3 & 4 \end{pmatrix} = -49$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \\ 1 & 12 & 4 \end{pmatrix} = -21$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 12 \end{pmatrix} = -8.$$

Άρα υπάρχει μοναδική λύση που δίνεται από

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-49}{-12} = \frac{49}{12}, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{-12} = \frac{21}{12}, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}.$$

Πόρισμα 9

Ένα ομογενές τετραγωνικό σύστημα έχει μοναδική λύση (τη μηδενική) αν και μόνο αν $\det A \neq 0$, *όπου A είναι ο πίνακας των συντελεστών.*

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Υπολογίστε τις παρακάτω ορίζουσες

$$\det\begin{pmatrix} 2+3i & i \\ 4-i & -3 \end{pmatrix},\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix},\quad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 23 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix},\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Για την πρώτη ορίζουσα έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} 2+3i & i \\ 4-i & -3 \end{pmatrix} = (2+3i)\cdot(-3) - i\cdot(4-i) = -6-9i-4i+i^2 = -7-13i.$$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη ορίζουσα χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή, σύμφωνα με το Θεώρημα 6. Έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 1\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= 1(2-15) - 2(-4-6) + 3(20+4) = 79.$$

Υπολογίζουμε την τρίτη ορίζουσα χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη (γιατί περιέχει μηδενικά που απλουστεύουν τις πράξεις). Έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 23 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -20.$$

Για την τέταρτη ορίζουσα παρατηρούμε ότι δυο στήλες είναι ίσες. Άρα η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν σύμφωνα με την Πρόταση 2.

Άσκηση 2

Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$

Λύση

Φυσικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα αναπτύσσοντάς την ως προς μια γραμμή ή στήλη σύμφωνα με το Θεώρημα 6, αλλά έτσι απαιτούνται πολλές πράξεις. Ένας πιο σύντομος και κομψός τρόπος είναι: Αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από την δεύτερη οπότε παίρνουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$. Στη συνέχεια αφαιρούμε την τρίτη γραμμή από την τέταρτη και παίρνουμε τον $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Από το τρίτο μέρος της Πρότασης 3 έχουμε $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Ο τελευταίος πίνακας έχει δυο ίσες γραμμές και επομένως η ορίζουσά του είναι ίση με 0 (Πρόταση 2 2)). Τελικά $\det A = 0$.

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *με δύο διαφορετικούς τρόπους.*

Λύση

τρόπος 1: ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες στο δεξιό μέλος είναι τριγωνικοί και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2 3). Έχουμε

$$2\det\begin{pmatrix}3 & 2 & 8\\ 0 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-4\det\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=2\cdot 3\cdot(-5)2-4\cdot 1\cdot(-5)\cdot 2=-20.$$

τρόπος 2: ανάπτυγμα ως προς την τελευταία γραμμή

$\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & -1\\ 4 & 3 & 2 & 8\\ 0 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$. Εφαρμόζουμε πάλι το ανάπτυγμα ως προς την τελευταία γραμμή και βρίσκουμε $2\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}=2\cdot(-5)\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}=-20.$

Άσκηση 4

1) Αν $\det\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 2 & 0 & c\\ -1 & d & 3\end{pmatrix}=3$, *να υπολογιστεί η* $\det\begin{pmatrix}6 & 2a & 2b\\ 6 & 0 & c\\ -3 & d & 3\end{pmatrix}$.

2) Να υπολογισθεί η $\det\begin{pmatrix}a & x & a+x\\ b & y & b+y\\ c & z & c+z\end{pmatrix}$.

Λύση

1) Χρησιμοποιώντας δύο φορές το πρώτο μέρος της Πρότασης 3 (στην πρώτη γραμμή και στη συνέχεια στην πρώτη στήλη) έχουμε

$$\det\begin{pmatrix}6 & 2a & 2b\\ 6 & 0 & c\\ -3 & d & 3\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}3 & a & b\\ 6 & 0 & c\\ -3 & d & 3\end{pmatrix}=2\cdot 3\det\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 2 & 0 & c\\ -1 & d & 3\end{pmatrix}=2\cdot 3\cdot 3=18.$$

2)Αφαιρώντας την πρώτη στήλη από την τρίτη παίρνουμε $\det\begin{pmatrix}a & x & a+x\\ b & y & b+y\\ c & z & c+z\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}a & x & x\\ b & y & y\\ c & z & z\end{pmatrix}=0$, αφού ο πίνακας $\begin{pmatrix}a & x & x\\ b & y & y\\ c & z & z\end{pmatrix}$ έχει δύο ίσες στήλες.

Άσκηση 5

Να βρεθεί αν υπάρχει ο αντίστροφος του $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Λύση

Γνωρίζουμε μια μέθοδο επίλυσης από το Κεφάλαιο 3, τον Αλγόριθμο Υπολογισμού Αντίστροφου Πίνακα. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 7. Επειδή ισχύει $\det A = -2 \neq 0$, ο A είναι αντιστρέψιμος σύμφωνα με το Θεώρημα 4. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7. Έχουμε

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ A_{13}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$
$$A_{21}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ A_{22}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ A_{23}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$
$$A_{31}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A_{32}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ A_{33}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Βρίσκουμε

$$\det A_{11}=4,\ \det A_{12}=8,\ \det A_{13}=6,$$
$$\det A_{21}=3,\ \det A_{22}=4,\ \det A_{23}=3,$$
$$\det A_{31}=1,\ \det A_{32}=2,\ \det A_{33}=1.$$

Συνεπώς $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & -3 & 1\\ -8 & 4 & -2\\ 6 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Άσκηση 6

1) Για ποιες τιμές του a ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος;

2) Για ποιες τιμές του a ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & a & 2\\ 3 & -3 & 6 & a\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος;

Λύση

1) Υπολογίζοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή έχουμε $\det A = a(2-3a)-(-1-3) = -3a^2+2a+4$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4, ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $-3a^2+2a+4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{3}$.

2) Θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε την ίδια μεθοδολογία με το προηγούμενο ερώτημα. Επειδή οι πράξεις στον υπολογισμό της συγκεκριμένης ορίζουσας είναι πολλές, θα χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο τρόπο που είναι ουσιαστικά δεν είναι άλλος από τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss:

Εφαρμόζουμε συστηματικά την Πρόταση 3, δηλαδή χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών για να φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή. Όμως εδώ χρειάζεται προσοχή! Αν στην προηγούμενη διαδικασία πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή πίνακα με ένα μη μηδενικό k, θα πρέπει να διαιρέσουμε την τελική ορίζουσα με αυτό το k για να αναιρέσουμε το αποτέλεσμα της Πρότασης 3 1).

Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

Στην προηγούμενη διαδικασία δεν υπήρξαν πολλαπλασιασμοί γραμμών.

Συνεπώς $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix} = 3(a+4)(a-3)$.

Άρα ο αρχικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $a \neq -4, 3$.

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί η ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & x & x & x \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix}$

Λύση

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 3. Στα δεξιά περιγράφουμε τα βήματα.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & x & x & x \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix} = \qquad r_2 \to r_2 - r_1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix} = \qquad r_3 \to r_3 - xr_1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & y-x \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix} = \qquad r_4 \to r_4 - xr_1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & y-x \\ 0 & x-x^2 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$$

ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη

$$\det\begin{pmatrix} 0 & x-y & x-1 \\ 1-x^2 & 0 & y-x \\ x-x^2 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$$

ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη στήλη

$$-(x-y)\det\begin{pmatrix} 1-x^2 & y-x \\ x-x^2 & 1-x \end{pmatrix} =$$

παραγοντοποίηση στην πρώτη στήλη

$$-(x-y)\det\begin{pmatrix} (1-x)(1+x) & y-x \\ (1-x)x & 1-x \end{pmatrix} =$$

Πρόταση 3 1)

$$-(x-y)(1-x)\det\begin{pmatrix} 1+x & y-x \\ x & 1-x \end{pmatrix} =$$

πράξεις

$$-(x-y)(1-x)\big((1+x)(1-x)-(y-x)x\big) =$$

$$(x-1)(x-y)(1-xy).$$

Άσκηση 8

Υπολογίστε την ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$ *(ο πίνακας είναι* $n \times n$*, όπου* $n > 1$*).*

Λύση

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} =$$

$$x\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} y \det\begin{pmatrix} y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \end{pmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} y^n,$$

γιατί οι δύο τελευταίοι πίνακες είναι $(n-1)\times(n-1)$ τριγωνικοί (βλ. Πρόταση 2).

Άσκηση 9

Έστω a,b,c διακεκριμένοι αριθμοί. Υπολογίστε την ορίζουσα και τον αντίστροφο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

Λύση

Αφαιρώντας την πρώτη στήλη από τις άλλες δύο έχουμε

$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$. Από τη δεύτερη στήλη βγάζουμε κοινό παράγοντα το $b-a$ και από την τρίτη το $c-a$. Παίρνουμε

$\det A = (b-a)(c-a)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{pmatrix}$. Αναπτύσσοντας την τελευταία ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή βρίσκουμε $\det A = (b-a)(c-a)(c-b)$.

Επειδή οι a,b,c είναι διακεκριμένοι έχουμε $\det A \neq 0$ και συνεπώς ο A είναι αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος μπορεί να υπολογιστεί με τον προσαρτημένο πίνακα. Μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b^2 & c^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & c^2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(c-a)(c-b)(b-a)}\begin{pmatrix} bc^2 - b^2c & b^2 - c^2 & c-b \\ a^2c - ac^2 & c^2 - a^2 & a-c \\ ab^2 - a^2b & -b^2 + a^2 & b-a \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 10

Υπολογίστε την ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ & & & \dots & & \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \dots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

(*Το στοιχείο στη θέση* (i,j) *είναι* $|i-j|$).

Λύση

Θα φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή. Από την πρώτη στήλη αφαιρούμε τη δεύτερη, από τη δεύτερη αφαιρούμε την τρίτη, κλπ. Παίρνουμε

$$\det A = \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Προσθέτουμε τώρα την πρώτη γραμμή κάθε μια από τις άλλες γραμμές. Παίρνουμε

$$\det A = \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \\ 0 & -2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & -2 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)\underbrace{(-2)\dots(-2)}_{n-2\ \text{φορες}}(n-1) =$$

$$= (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1),$$

όπου με $*$ παριστάνουμε στοιχεία που δεν μας ενδιαφέρουν για τον υπολογισμό της ορίζουσας.

Άσκηση 11

Υπενθυμίζουμε ότι οι αριθμοί του Fibonacci, $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, *ορίζονται από τις σχέσεις* $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ (n > 2)$. *Έστω*

$$F_n = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & & & & & \end{pmatrix}.$$

(Ο πίνακας είναι $n \times n$, *τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι 1, στα δεξιά τους είναι 1 και στα αριστερά τους είναι – 1). Αποδείξτε ότι* $F_n = f_n,\ n = 1, 2, \dots$.

Λύση

Επειδή ισχύει

$$F_1 = \det\left(1\right) = 1 = f_1, \quad F_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 = f_2$$

για να δείξουμε ότι $F_n = f_n,\ n = 1, 2, \dots$ αρκεί να δείξουμε ότι τα $f_1, f_2, \dots$ και $F_1, F_2, \dots$ ικανοποιούν την ίδια αναδρομική σχέση, δηλαδή $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 3)$.

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη παίρνουμε

$$F_n = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = F_{n-1} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσουμε τη δεξιά ορίζουσα (που είναι $(n-1)\times(n-1)$) ως προς την πρώτη γραμμή. Τότε

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ & & & ... & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ & & & ... & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = F_{n-2}.$$

Άρα $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Άσκηση 12

Έστω A_n *ο* $n\times n$ *πίνακας* $(n \geq 2)$ $A_n = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & ... & 0 & 0 \\ & & & ... & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a. *Δείξτε ότι* $\det A_n = 0$, *όταν* $n = 3m-1$, m *ακέραιος*

b. *Να βρεθεί η* $\det A_n$, *όταν* $n = 3m$, m *ακέραιος*.

Λύση

Πρώτα θα βρούμε μια αναδρομική σχέση για τις $\det A_n$. Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη βρίσκουμε

$$\det A_n = -2\det A_{n-1} - \det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την τελευταία ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή βρίσκουμε

$$\det A_n = -2\det A_{n-1} - 4\det A_{n-2},\ n \geq 4. \qquad (*)$$

Οι αρχικές τιμές είναι $\det A_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 0,\ \det A_3 = \det\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 8.$

a. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο m. Για $m = 1$, $\det A_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 0.$

Έστω ότι $\det A_{3m-1} = 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\det A_{3(m+1)-1} = \det A_{3m+2} &\overset{(*)}{=} -2\det A_{3m+1} - 4\det A_{3m} \\ &\overset{(*)}{=} -2(-2\det A_{3m} - 4\det A_{3m-1}) - 4\det A_{3m} \\ &= 8\det A_{3m-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

b. Θα αποδείξουμε ότι $\det A_{3m} = 8^m$. Σκεφθήκαμε τον τύπο αυτόν γιατί μετά από υπολογισμούς με βάση τη σχέση (*) βρήκαμε ότι $\det A_3 = 8,\ \det A_6 = 64$.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο m. Για $m = 1$, $\det A_3 = 8$, όπως βρήκαμε πριν. Έστω $\det A_{3m} = 8^m$. Χρησιμοποιώντας το υποερώτημα a. έχουμε

$$\begin{aligned}\det A_{3(m+1)} &\overset{(*)}{=} -2\det A_{3(m+1)-1} - 4\det A_{3m+1} \\ &= 0 - 4\det A_{3m+1} \\ &= -4\det A_{3m+1} \\ &\overset{(*)}{=} 8\det A_{3m} + 16\det A_{3m-1} \\ &= 8\det A_{3m} \\ &= 8\cdot 8^m = 8^{m+1}.\end{aligned}$$

Άσκηση 13

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες $D_n = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *(Ο πίνακας είναι* $n\times n$*)*

Λύση

Έχουμε $D_1 = \det(2) = 2$, $D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$. Διατυπώνουμε την εικασία ότι

$$D_n = n+1, \quad n = 1,2,\dots$$

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη γραμμή βρίσκουμε

$$D_n = 2D_{n-1} - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας ως προς τη πρώτη στήλη βρίσκουμε

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} = D_{n-2}.$$

Άρα βρήκαμε την αναδρομική σχέση

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Με βάση αυτή, η εικασία μας αποδεικνύεται άμεσα με επαγωγή στο n.

Άσκηση 14

1) *Έστω Α ένας* $n\times n$ *πίνακας τέτοιος ώστε* $A^t = -A$. *Αποδείξτε ότι αν ο n είναι περιττός τότε ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος.*
2) *Έστω Α,Β δυο πίνακες τέτοιοι ώστε* $A^3 + 3AB + 2I = 0$. *Αποδείξτε ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος.*
3) *Αποδείξτε ότι για κάθε* $n\times n$ *πίνακα Α ισχύει* $\det(adjA) = (\det A)^{n-1}$.

Λύση

1) Από την Πρόταση 1 έχουμε $\det A^t = \det A.$ Από την υπόθεση και την Πρόταση 3 έχουμε $\det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A.$ Άρα $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0.$ Άρα ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος.

2) Έχουμε $A^3 + 3AB + 2I = 0 \Rightarrow A\left(A^2 + 3B\right) = -2I.$ Παίρνοντας ορίζουσες και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}&\det\left(A\left(A^2+3B\right)\right) = \det\left(-2I\right) \Rightarrow\\ &\det A \cdot \det\left(A^2+3B\right) = \left(-2\right)^n \neq 0 \Rightarrow\\ &\det A \neq 0.\end{aligned}$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

3) Από την ισότητα πινάκων $A(adjA) = (\det A)I$ του Θεωρήματος 7 παίρνουμε την ισότητα οριζουσών

$$\begin{aligned}&\det\left(A\left(adjA\right)\right) = \det\left(\left(\det A\right)I\right) \Rightarrow\\ &\det A \cdot \det\left(adjA\right) = \left(\det A\right)^n.\end{aligned}$$

- Αν έχουμε $\det A \neq 0$, συμπεραίνουμε άμεσα το ζητούμενο.
- Έστω τώρα $\det A = 0$ και $A \neq 0.$ Τότε $A(adjA) = 0$, οπότε αν ήταν ο $adjA$ αντιστρέψιμος θα παίρναμε $A = 0,$ άτοπο. Άρα ο $adjA$ δεν είναι αντιστρέψιμος, οπότε $\det(adjA) = 0.$
- Τέλος το ζητούμενο είναι προφανές αν $A = 0.$

Άσκηση 15

Υπολογίστε τις ορίζουσες των παρακάτω πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\gamma \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Λύση

Στον πίνακα Α αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από τις υπόλοιπες γραμμές. Προκύπτει άνω τριγωνικός πίνακας και συνεπώς η ορίζουσά του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\gamma \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma.$$

Στον πίνακα B αφαιρούμε τη δεύτερη γραμμή από την πρώτη και από την τρίτη. Τότε εμφανίζονται κοινοί παράγοντες. Έχουμε

$$\det B = \det\begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & \beta \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix} =$$

$$\alpha\beta\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Αφαιρώντας από τη δεύτερη στήλη την πρώτη και αναπτύσσοντας την νέα ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή της καταλήγουμε σε μια 3×3 ορίζουσα. Έτσι έχουμε:

$$\det B = \alpha\beta\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix} = \alpha\beta\det\begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix} =$$

$$\alpha\beta(-\alpha)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\beta \end{pmatrix} = \alpha\beta(-\alpha)(1-\beta-1) = \alpha^2\beta^2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι;

$$A = \begin{pmatrix} 2-3i & 4 \\ 6+4i & 8i \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του $B^{2005}C^{2006}$;

Απάντηση Μόνο ο τρίτος είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε

$$\det\left(B^{2005}C^{2006}\right) = \left(\det B\right)^{2005}\left(\det C\right)^{2006} = 0.$$

Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι πίνακας $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $ad-bc\neq 0$,

οπότε $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη Θεώρημα 4 και Θεώρημα 7.

Άσκηση 3

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ x\qquad +z&=3 \\ x+y-z&=1 \end{aligned}$$

με τον κανόνα του Cramer.

Απάντηση $x=\dfrac{15}{6}, y=\dfrac{-6}{6}, z=\dfrac{3}{6}$.

Άσκηση 4

1)Υπολογίστε την ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -10 & -6 \\ 3 & -2 & 10 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Αποδείξτε ότι $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & b & c & a+d \\ x & y & z & x+w \\ x+2a & y+2b & z+2c & x+w+2a+2d \end{pmatrix}=0.$

Υπόδειξη 1) Βλ. Λυμένη Άσκηση 6 2) και Λυμένη Άσκηση 7.

2) Αφαιρέστε από την τελευταία γραμμή το διπλάσιο της δεύτερης.

Απάντηση για το 1): 18.

Άσκηση 5

1) Να βρεθεί ο $adjA$, όπου $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

2) Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο A είναι αντιστρέψιμος.

3) Για τις τιμές που βρήκατε στο 2) να υπολογίστε τον αντίστροφο.

Απάντηση 1) $adjA = \begin{pmatrix} 2-3a & -2 & 6 \\ 1 & a & -3a \\ -a & -a^2 & 2a+2 \end{pmatrix}$. 2) $a \neq \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$.

3) $A^{-1} = \frac{1}{-3a^2+2a+2} \begin{pmatrix} 2-3a & -2 & 6 \\ 1 & a & -3a \\ -a & -a^2 & 2a+2 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 6

Αποδείξτε ότι $\det A_n = 1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n}$, *όπου,*

$$A_n = \begin{pmatrix} x^2+1 & x & 0 & ... & 0 \\ x & x^2+1 & x & ... & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & x^2+1 \end{pmatrix}.$$

Υπόδειξη Εφαρμόστε επαγωγή και το ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς την πρώτη γραμμή.

Άσκηση 7

Υπολογίστε την ορίζουσα $\det \begin{pmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη Προσθέστε στην πρώτη στήλη όλες τις άλλες και βγάλτε κοινό παράγοντα. Στη συνέχεια, μετατρέψτε τον πίνακα σε τριγωνικό. **Απάντηση** $1+a+b+c+d$.

Άσκηση 8

Αν $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, *τότε να εκφράσετε την* $\det \begin{pmatrix} 2x+z & 2y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix}^{-1}$ *συναρτήσει των* a, b, c, d.

Υπόδειξη Παρατηρήστε ότι $\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

Απάντηση $\det\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix}^{-1} = \det\begin{pmatrix} a-b & -a+2b \\ c-d & -c+2d \end{pmatrix}$.

Άσκηση 9

Αποδείξτε ότι $\det A = \pm 1$ αν ο A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε ο A και ο A^{-1} έχουν στοιχεία ακεραίους αριθμούς.

Υπόδειξη $(\det A)\left(\det A^{-1}\right) = 1$.

Άσκηση 10

Αποδείξτε ότι $\det\begin{pmatrix} x+y & x & x & \dots & x \\ x & x+y & x & \dots & x \\ x & x & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+y \end{pmatrix} = (nx+y)y^{n-1}$, όπου ο πίνακας είναι $n \times n$.

Υπόδειξη Προσθέστε στην πρώτη στήλη όλες τις άλλες και βγάλτε κοινό παράγοντα το $nx+y$. Στη συνέχεια, μετατρέψτε τον πίνακα σε τριγωνικό.

Άσκηση 11 (ορίζουσα Vandermonde)

Έστω $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{F}$. Αποδείξτε ότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j}\left(a_i - a_j\right).$$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 9.