Ολοκληρώματα

Λέξεις κλειδιά

- *παράγουσα*
- *ολοκλήρωμα*
- *αόριστο ολοκλήρωμα*
- *ορισμένο ολοκλήρωμα*
- *ολοκληρωτέα συνάρτηση*
- *σταθερά ολοκλήρωσης*
- *ολοκλήρωση με αντικατάσταση*
- *ολοκλήρωση κατά παράγοντες*
- *ολοκλήρωση με ανάλυση σε απλά κλάσματα*

Η παράγουσα και το αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός

Μια συνάρτηση $F(x)$ ονομάζεται **παράγουσα** μιας συνάρτησης $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, όταν ισχύει $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Με άλλα λόγια, η παράγουσα μιας συνάρτησης f είναι μια συνάρτηση F που όταν την παραγωγίσουμε δίνει την f.

$F(x) = x^2$ είναι η παράγουσα της $f(x) = 2x$,

$F(x) = x^3 - 4x + 5$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 4$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι η συνάρτηση $G(x) = x^3 - 4x + 2002$ είναι επίσης παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 4$

Η παράγουσα και το αόριστο ολοκλήρωμα

Θεώρημα

Έστω $G(x)$ μια παράγουσα μιας συνάρτησης f. Τότε κάθε παράγουσα F της f πρέπει να είναι της μορφής $F(x) = G(x) + C$, όπου C είναι μια σταθερά.

Η διαδικασία εύρεσης όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης λέγεται ολοκλήρωση.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

και διαβάζεται «***το αόριστο ολοκλήρωμα*** της $f(x)$ ως προς x ισούται με $F(x)$ συν C».

το **αόριστο ολοκλήρωμα** μιας συνάρτησης f είναι μια **οικογένεια** συναρτήσεων που δίνονται από τη σχέση

$$F(x) + C,$$

όπου $F'(x) = f(x)$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου C.

Η παράγουσα και το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- Η συνάρτηση f που πρόκειται να ολοκληρωθεί λέγεται «**προς ολοκλήρωση συνάρτηση**» ή «**ολοκληρωτέα συνάρτηση**» και η σταθερά C λέγεται **σταθερά ολοκλήρωσης**.

- Η ποσότητα dx που ακολουθεί την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $f(x)$ δηλώνει ότι η «πράξη» της ολοκλήρωσης εκτελείται ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x. Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι t, γράφουμε $\int f(t)dt$ αντίστοιχα. Για παράδειγμα

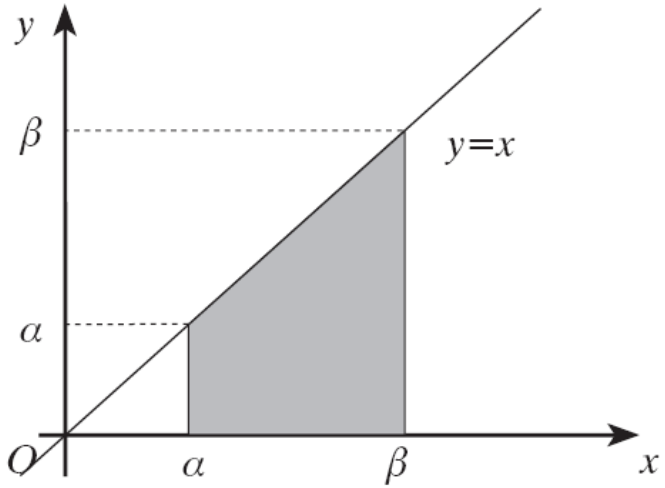
$$\int dx = x + C \qquad \text{και} \qquad \int 2t\,dt = t^2 + K.$$

Εμβαδά και ολοκληρώματα

το εμβαδό κάτω από το γράφημα της συνάρτησης $y = f(x)$ από το α στο β είναι

$$F(\beta) - F(\alpha)$$

το εμβαδό κάτω από την $y = x$ *μεταξύ των σημείων* $x = \alpha$ *και* $x = \beta$



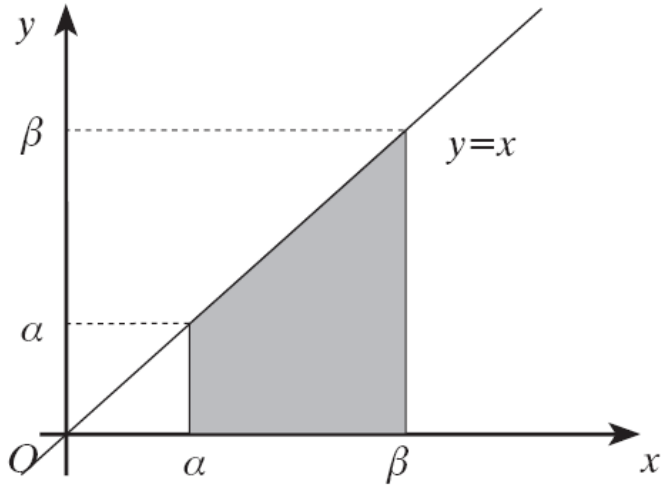
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

και το διαβάζουμε ως **«ολοκλήρωμα από το α στο β»**. Το ολοκλήρωμα αυτού του είδους λέγεται και **ορισμένο ολοκλήρωμα**.

- Τα α και β λέγονται άκρα του ολοκληρώματος.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int_{2}^{6} x\,dx$



Πρέπει να προσέξετε τα εξής:

Ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος δεν είναι πάντα ταυτόσημος με την εύρεση του εμβαδού κάτω από μια καμπύλη.

Τα ολοκληρώματα χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των εμβαδών.

Το **αόριστο ολοκλήρωμα** είναι μια **οικογένεια συναρτήσεων**, ενώ στην περίπτωση του **ορισμένου ολοκληρώματος** με άκρα πραγματικούς αριθμούς είναι ένας **πραγματικός αριθμός**.

Βασικοί κανόνες ολοκλήρωσης

ΚΑΝΟΝΑΣ 1

$$\int k\,dx = kx + C \qquad (k,\ C \text{ σταθερές})$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(kx + C) = k$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

α) $\int 3\,dx$ β) $\int \pi^2\,dx$

Βασικοί κανόνες ολοκλήρωσης

Από τον κανόνα παραγώγισης

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

παίρνουμε τον εξής κανόνα ολοκλήρωσης:

ΚΑΝΟΝΑΣ 2

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right]$$
$$= \frac{n+1}{n+1}x^n$$
$$= x^n$$
$$= f(x)$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

α) $\int x^3 dx$ β) $\int x^{3/2} dx$ γ) $\int \frac{1}{x^{3/2}} dx$

Βασικοί κανόνες ολοκλήρωσης

ΚΑΝΟΝΑΣ 3

$$\int \left(cf(x)+\alpha g(x)\right)dx = c\int f(x)dx + \alpha\int g(x)dx \qquad (c, \alpha \text{ σταθερές})$$

Μόνο η σταθερά μπορεί να βγει έξω από το σύμβολο ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα

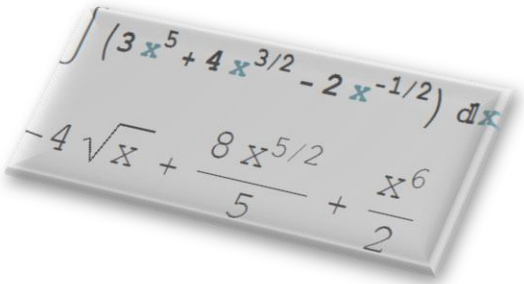
Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

α) $\int 2t^3 dt$ β) $\int \left(-3x^{-2}dx\right)$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (3x^5 + 4x^{3/2} - 2x^{-1/2})dx$$



Βασικοί κανόνες ολοκλήρωσης

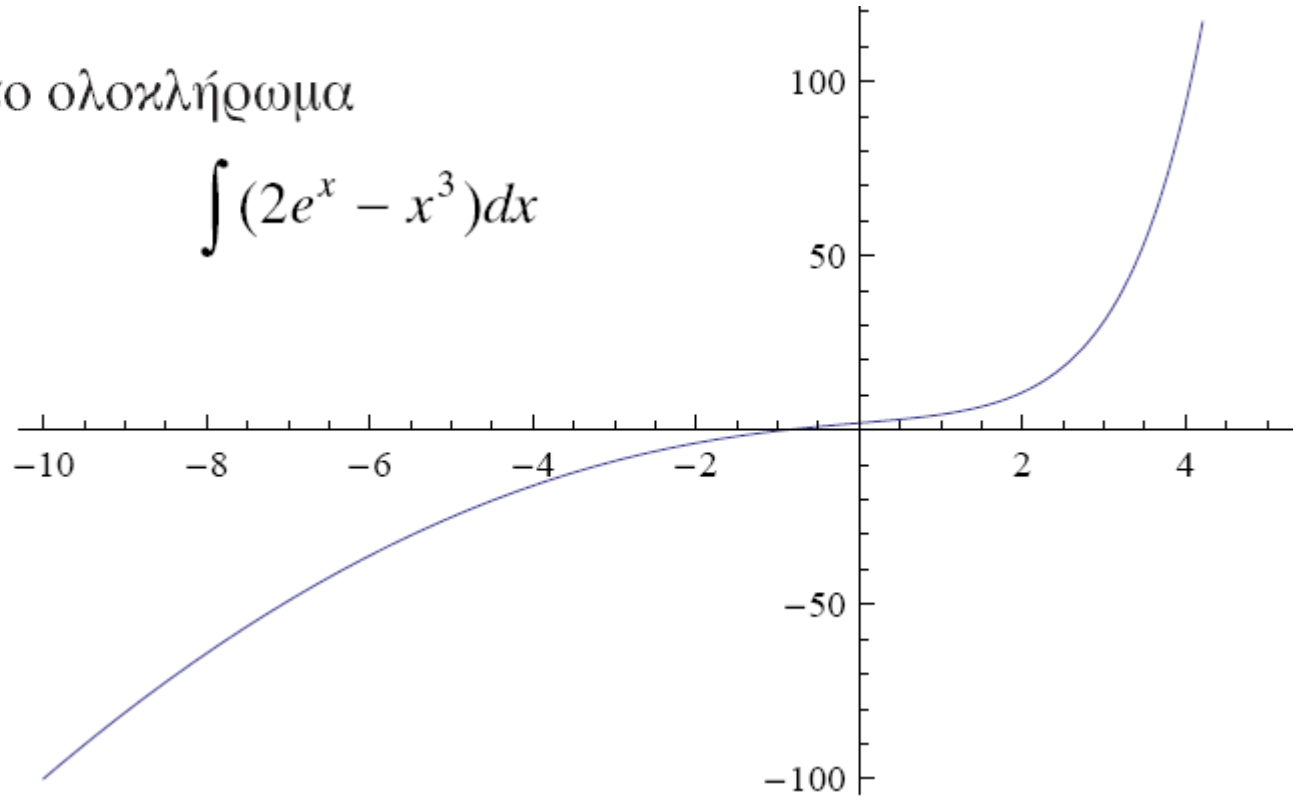
ΚΑΝΟΝΑΣ 4

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (2e^x - x^3)dx$$



Βασικοί κανόνες ολοκλήρωσης

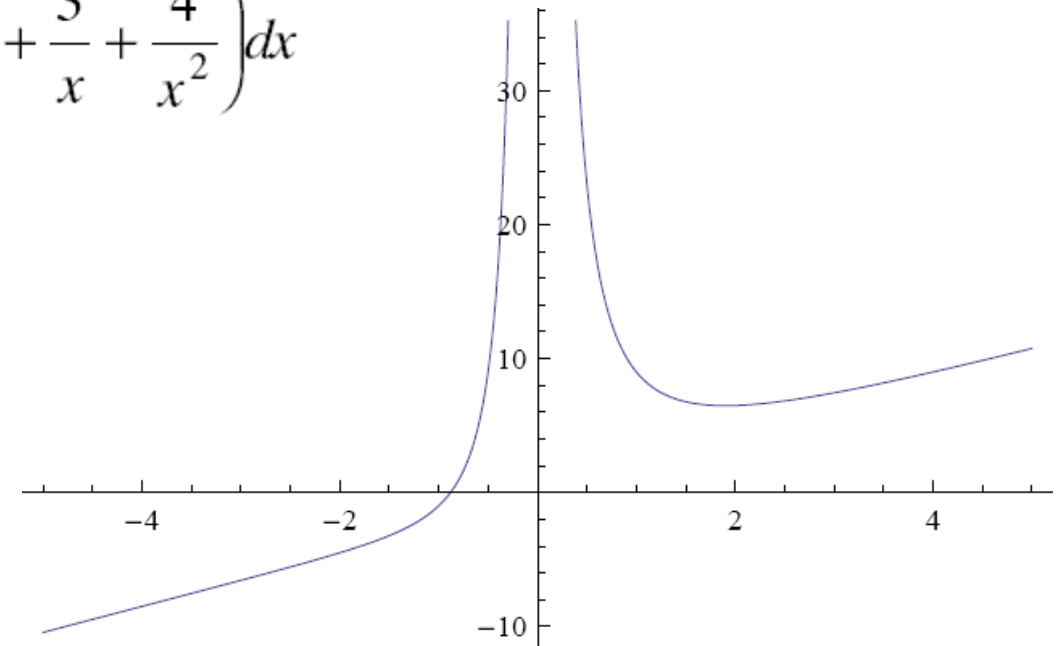
ΚΑΝΟΝΑΣ 5

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \qquad \text{με} \qquad x \neq 0$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \left(2x + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right) dx$$



Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{csec}^{\alpha} x, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \; x \in \mathbb{R}$$

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -(\cos^{-1} x)', \quad |x| < 1$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1 + x^2} = -(\cot^{-1} x)', \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\cot^{-1} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Παράγουσες συναρτήσεων

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C\,, \qquad -1 < x < 1$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \cos^{-1} x + C\,, \qquad -1 < x < 1$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{-dx}{1+x^2} = \cot^{-1} x + C$$

Function	Abbreviation	Identities (using radians)
sine	sin	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\csc\theta}$
cosine	cos	$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\sec\theta}$
tangent	tan (or tg)	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\cot\theta}$
cotangent	cot (or cotan or cotg or ctg or ctn)	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$
secant	sec	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\cos\theta}$
cosecant	csc (or cosec)	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\sin\theta}$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

1 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

2 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

3 Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Ας υποθέσουμε πως έχουμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int 2(2x-5)^4\,dx\,.$$

κάνοντας δηλαδή «αλλαγή μεταβλητής»

$$u = 2x-5$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(2x-5)}{dx} = 2$$

$$du = 2\,dx$$

$$\int 2(2x-5)^4\,dx = \int (2x-5)^4\,2dx = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5}+C$$

u du

$$\int 2(2x-5)^4\,dx = \frac{1}{5}(2x-5)^5+C$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int 2(2x-5)^4\,dx$$

- **Η μέθοδος**

$$f(x) = x^4 \qquad \text{και} \qquad g(x) = 2x-5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= [g(x)]^4 = (2x-5)^4$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Ένα ολοκλήρωμα αυτής της μορφής μπορεί πάντα να γράφεται ως

$$\int f(u)\,du\ .$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du\ .$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Βήμα 1: Αναγνωρίζουμε τις δύο συναρτήσεις που αποτελούν τη σύνθετη συνάρτηση και θέτουμε $u = g(x)$, όπου $g(x)$ είναι η δεύτερη (εσωτερική) συνάρτηση στη σύνθεση.

Βήμα 2: Υπολογίζουμε το $du = g'(x)dx$.

Βήμα 3: Αντικαθιστούμε στην ολοκληρωτέα συνάρτηση τα u και du και έτσι μετατρέπουμε το αρχικό ολοκλήρωμα σε ένα άλλο, που έχει μόνο εκφράσεις του u.

Βήμα 4: Υπολογίζουμε το νέο ολοκλήρωμα.

Βήμα 5: Αντικαθιστούμε το u με $g(x)$, για να έχουμε το αποτέλεσμα συναρτήσει της αρχικής μεταβλητής x.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int 2x(x^2+1)^3\,dx.$

Λύση

Βήμα 1: Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση περιέχει τη σύνθετη συνάρτηση $(x^2+1)^3$ με $g(x)=x^2+1,$ θέτουμε $u=x^2+1.$

Βήμα 2: Τότε $du=2x\,dx.$

Βήμα 3: Αντικαθιστούμε $u=x^2+1$ και $du=2x\,dx$ και παίρνουμε

$$\int 2x(x^2+1)^3\,dx=\int (x^2+1)^3(2x\,dx)=\int u^3\,du\,.$$

Βήμα 4: Υπολογίζουμε

$$\int u^3\,du=\frac{1}{4}u^4+C\,.$$

Βήμα 5: Αντικαθιστώντας το u με $x^2+1,$ παίρνουμε

$$\int 2x(x^2+1)^3\,dx=\frac{1}{4}(x^2+1)^4+C.$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int \frac{x}{3x^2+2}dx$.

Λύση

Θέτουμε $u = 3x^2 + 2$. Οπότε $du = 6x\,dx$ ή $x\,dx = \frac{1}{6}du$.

Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε

$$\int \frac{x}{3x^2+2}dx = \int \frac{1/6}{u}du$$

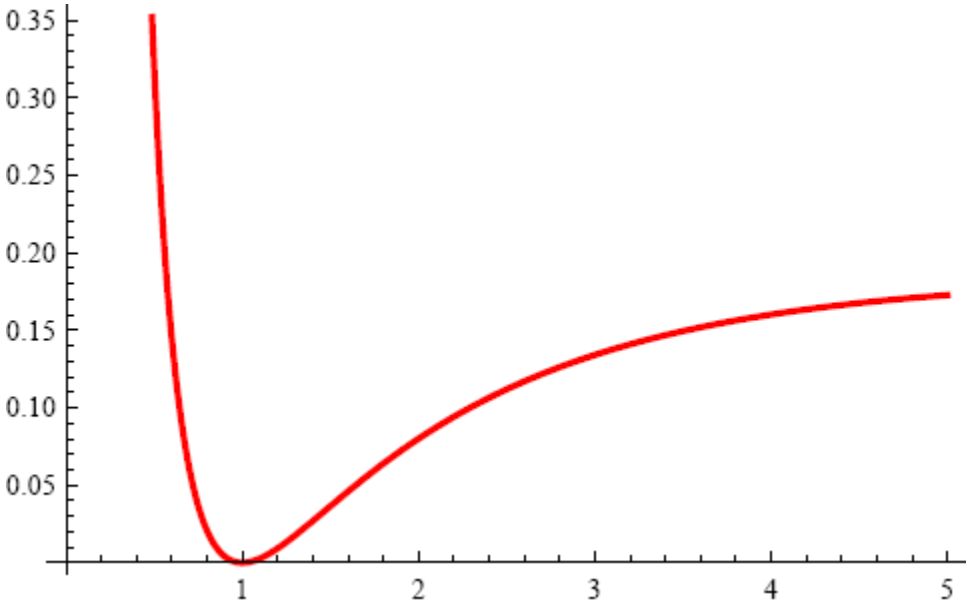
$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{6}\ln|u| + C$$

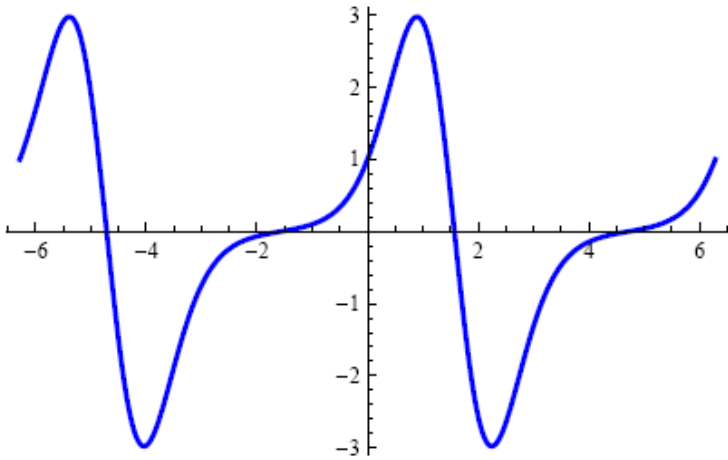
$$= \frac{1}{6}\ln(3x^2+2) + C\,, \qquad \text{αφού } (3x^2+2 > 0)$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

- Υπολογίστε το $\int \frac{(\ln x)^2}{3x} dx.$



- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \cos x \, e^{2\sin x} \, dx.$



Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στον κανόνα παραγώγισης γινομένου.

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα και τα δύο μέλη ως προς x παίρνουμε

$$\int \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

δηλαδή $$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται και ως

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Η σχέση αυτή εκφράζει τη μέθοδο «**ολοκλήρωσης κατά παράγοντες**»

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int x^2 e^x dx$.

Λύση

Θέτουμε $f(x) = x^2$ και $g'(x) = e^x$,

οπότε

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x (2x)dx =$$

$$= x^2 e^x - 2\int x\, e^x dx.$$

πρέπει να υπολογίσουμε το $\int x\, e^x dx$.

$f(x) = x$ και $g'(x) = e^x$,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx =$$

$$= xe^x - e^x + C_1$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x\, e^x - e^x) + C =$$

$$= (x^2 - 2x + 2)\, e^x + C, \quad C = -2C_1.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x^2 \cos 3x \, d\,x$.

Λύση

Θέτουμε $f(x) = x^2$ και $g'(x) = \cos 3x.$

Τότε θα είναι $f'(x) = 2x$ και $g(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$.

Οπότε

$$\int x^2 \cos 3x \, d\,x = x^2\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right) - \int 2x\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}\int x \sin 3x dx \ .$$

Για τον υπολογισμό τώρα του $\int x \sin 3x \, dx$ εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x \sin 3x \, dx$$

Θέτουμε $f(x) = x$ και $g'(x) = \sin 3x$. Τότε θα είναι $f'(x) = 1$ και $g(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$.

Οπότε

$$\int x \sin 3x \, d\, x = x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int 1\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C$$

$$\int x^2 \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2}{9}\right)\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x + C.$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int x \ln x \, dx$.

Λύση

Θέτοντας $f(x) = \ln x$ και $g'(x) = x,$

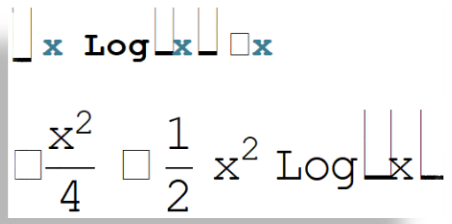
έχουμε $f'(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x^2}{2}.$

Οπότε

$$\int x \ln x \, dx = \ln x \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$



Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζονται ολοκληρώματα **ρητών συναρτήσεων**

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)},$$

με $Q(x)$ και $P(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Η βασική ιδέα

είναι η ανάλυση του πολυώνυμου του παρανομαστή σε γινόμενο παραγόντων και η γραφή της αρχικής συνάρτησης ως άθροισμα κλασμάτων με παρανομαστές καθέναν από αυτούς τους παράγοντες.

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Περίπτωση 1

Ο παρανομαστής είναι γινόμενο διαφορετικών μεταξύ τους πρωτοβάθμιων παραγόντων.

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

Αν λοιπόν μπορέσουμε να βρούμε κατάλληλους αριθμούς A_i, ώστε ο αριθμητής να γίνει ίσος με το πολυώνυμο $f(x)$, η ρητή συνάρτηση θα έχει αναλυθεί στη μορφή

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ θα ισούται με $A_1 \ln|x - x_1| + \ldots A_n \ln|x - x_n|$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+2}$.

Λύση

Ο παρανομαστής $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ αναλύεται δηλαδή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων διαφορετικών μεταξύ τους, οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω αναζητούμε A_1 και A_2, έτσι ώστε

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}.$$

Κάνοντας *απαλοιφή παρανομαστών* παίρνουμε

$$A_1(x-2)+A_2(x-1)=x$$

για $x=2\Rightarrow A_2=2$ και για $x=1\Rightarrow -A_1=1$, δηλαδή $A_1=-1$

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx=\int \frac{-1}{x-1}dx+\int \frac{2}{x-2}dx=-\ln|x-1|+2\ \ln|x-2|+C$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Περίπτωση 2

Ο παρανομαστής είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων με μερικούς απ' αυτούς επαναλαμβανόμενους.

Παράδειγμα Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^3}{x^3 - 3x + 2}\, dx$

Λύση

Επειδή ο βαθμός του αριθμητή δεν είναι μικρότερος από αυτόν του παρανομαστή, κάνουμε διαίρεση πολυώνυμων, απ' όπου παίρνουμε

$$\frac{x^3}{x^3 - 3x + 2} = 1 + \frac{3x - 2}{x^3 - 3x + 2}\ .$$

Ο παρανομαστής αναλύεται ως $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 (x + 2)$, δηλαδή ο παράγοντας

$(x - 1)$ επαναλαμβάνεται άλλη μια φορά. Σε αυτή την περίπτωση η ανάλυση σε απλά κλάσματα θα είναι της μορφής

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Περίπτωση 2

Ο παρανομαστής είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων με μερικούς απ' αυτούς επαναλαμβανόμενους.

Παράδειγμα Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^3}{x^3 - 3x + 2}\, dx$

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 (x+2)$$

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2} \,.$$

Δηλαδή $$\frac{3x-2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2},$$

τα δε A_1, A_2, A_3 να προσδιορίζονται έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα.

Περίπτωση 2

Ο παρανομαστής είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων με μερικούς απ' αυτούς επαναλαμβανόμενους.

Παράδειγμα Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^3}{x^3-3x+2}\,dx$

$$\frac{3x-2}{x^3-3x+2} = \frac{8}{9}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{8}{9}\frac{1}{x+2},$$

οπότε

$$\int \frac{x^3}{x^3-3x+2}dx = \int dx + \frac{8}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{8}{9}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= x + \frac{8}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{8}{9}\ln|x+2| + C.$$

Σημείωση 1

Αν ο παράγοντας $(x-1)$ *επαναλαμβανόταν 4 φορές, δηλαδή ήταν ο* $(x-1)^4$, *τότε η ανάλυση σε απλά κλάσματα θα περιείχε τους όρους*

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_4}{(x-1)^4}\ .$$

Περίπτωση 3

Ο παρανομαστής είναι μια συνάρτηση f(x), συνεχής και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με παράγωγο f′(x) συνεχή συνάρτηση στο (α, β), με f(x) ≠ 0 ∀ x∈ (α, β).

Τότε ισχύει

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c\,, \qquad \forall\, x \in (\alpha, \beta).$$

Παράδειγμα Υπολογίστε το $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

Λύση

Αν $f(x) = x^2+4$, τότε $f'(x) = 2x$ και

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + c$$

Περίπτωση 4

Ο παρανομαστής περιέχει ανάγωγους δευτεροβάθμιους παράγοντες, όλους διαφορετικούς.

Και αυτή την περίπτωση θα τη μελετήσουμε με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα Υπολογίστε το $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$

Λύση

Δοκιμάζουμε ανάλυση της μορφής

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Ο αριθμητής δηλαδή του δευτεροβάθμιου παρανομαστή είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Τα $A,\ B,\ C$, είναι προς προσδιορισμό.
Κάνοντας απαλοιφή παρανομαστών προκύπτει η εξίσωση

$$x = (A+B)x^2 + (-B+C)x + 4A - C.$$

Εξισώνοντας τώρα τους ομοβάθμιους όρους προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων

Περίπτωση 4

Ο παρανομαστής περιέχει ανάγωγους δευτεροβάθμιους παράγοντες, όλους διαφορετικούς.

Και αυτή την περίπτωση θα τη μελετήσουμε με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα Υπολογίστε το $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$

$$A + B = 0$$
$$-B + C = 1$$
$$4A - C = 0,$$

από το οποίο παίρνουμε $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$, $C = \frac{4}{5}$,

οπότε

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{5}\frac{x-4}{x^2+4}$$

και επομένως

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2+4} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+4}$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln|x^2+4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C.$$

Ο τρόπος αυτός του υπολογισμού των A, B, C, λέγεται «μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών».

Παράδειγμα

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2+4} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln|x^2+4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίστηκε με βάση τον κανόνα ολοκλήρωσης

$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x$, *με την αντικατάσταση μεταβλητής* $x \to \frac{x}{2}$,

ως εξής:

$$\frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{4}+1} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$$ *που είναι της μορφής* $\int \frac{du}{u^2+1}$ *και ισούται με* $\tan^{-1}u + C_1$