Κεφάλαιο 2

Γραμμικά Συστήματα

Ένα από τα βασικά προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Στο κεφάλαιο αυτό θα υπενθυμίσουμε πως να λύνουμε γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο του Gauss. Η μέθοδος αυτή είναι από τους πιο σημαντικούς αλγορίθμους της Γραμμικής Άλγεβρας και βρίσκει εφαρμογή σε πολλά προβλήματα, όπως είναι ο υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα, ο υπολογισμός της τάξης πίνακα, η εύρεση βάσεων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ κλπ. Εδώ μας ενδιαφέρει περισσότερο η κατανόηση αυτής της μεθόδου μέσω παραδειγμάτων. Θα επιστρέψουμε στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα γίνει μια πιο συστηματική μελέτη του.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στα επόμενα με $\mathbb{F}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Ορισμός 1 (γραμμικά συστήματα)

- *Μια εξίσωση λέγεται **γραμμική** υπεράνω του $\mathbb{F}$, αν είναι της μορφής $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, όπου οι συντελεστές $a_1, \ldots, a_n$ και όρος b είναι στοιχεία του $\mathbb{F}$ και οι $x_1, \ldots, x_n$ είναι άγνωστοι.*

Στην περίπτωση που το πλήθος των αγνώστων είναι μικρό, χρησιμοποιούμε συχνά x, y, z στη θέση των x_1, x_2, x_3.

Παράδειγμα
Η εξίσωση $2x - y + \sqrt{3}z = 10$ είναι γραμμική. Οι εξισώσεις $2x^2 - y + \sqrt{3}z = 10,\ 2xy - y + \sqrt{3}z = 10$ δεν είναι γραμμικές.

Παρατηρούμε ότι σε μια γραμμική εξίσωση δεν υπάρχουν όροι της μορφής $x^2, x^3, \ldots$ ούτε της μορφής $xy, xy^2, x^4y^3z^5 \ldots$.

- *Ένα **γραμμικό σύστημα** υπεράνω του $\mathbb{F}$ είναι ένα σύστημα εξισώσεων στο οποίο κάθε εξίσωση είναι γραμμική υπεράνω του $\mathbb{F}$.*

Συνεπώς κάθε γραμμικό σύστημα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

όπου οι m,n είναι θετικοί ακέραιοι. Βλέπουμε ότι το σύστημα αυτό έχει m εξισώσεις και n αγνώστους. Ένας σύντομος τρόπος γραφής του συστήματος αυτού είναι

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

Οι αριθμοί a_{ij} λέγονται οι **συντελεστές** του συστήματος και οι αριθμοί b_j λέγονται οι **σταθεροί όροι** του συστήματος.

- *Μια **λύση** του παραπάνω συστήματος είναι μια διατεταγμένη n-άδα $\left(k_1,...,k_n\right)\in\mathbb{F}^n$ τέτοια ώστε αν θέσουμε $x_1=k_1,...,x_n=k_n$, τότε ικανοποιείται κάθε μια από τις εξισώσεις.*

Με άλλα λόγια μια λύση του συστήματος είναι μια διατεταγμένη *n*-άδα $\left(k_1,...,k_n\right)\in\mathbb{F}^n$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}a_{11}k_1+a_{12}k_2+...+a_{1n}k_n&=b_1\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+...+a_{2n}k_n&=b_2\\&\vdots\\a_{m1}k_1+a_{m2}k_2+...+a_{mn}k_n&=b_m.\end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε ότι μια λύση είναι $(x_1,...,x_n)=(k_1,...,k_n)$.

Παράδειγμα

Μια λύση του γραμμικού συστήματος $\begin{matrix}6x-2y+5z=22\\2x+3y-z=11\end{matrix}$ είναι η

$(x,y,z)=(4,1,0)$ αφού έχουμε $\begin{matrix}6\cdot4-2\cdot1+5\cdot0=22\\2\cdot4+3\cdot1-0=11.\end{matrix}$

- *Ένα γραμμικό σύστημα λέγεται **συμβιβαστό** αν έχει τουλάχιστον μια λύση. Διαφορετικά λέγεται **ασυμβίβαστο** ή **αδύνατο**.*

Παράδειγμα

Το γραμμικό σύστημα $\begin{matrix}6x-2y+5z=22\\2x+3y-z=11\end{matrix}$ είναι συμβιβαστό όπως είδαμε πριν.

Το σύστημα $\begin{matrix}x+2y=0\\x+2y=1\end{matrix}$ είναι ασυμβίβαστο, γιατί διαφορετικά θα είχαμε 0 =1.

Ορισμός 2 (ομογενές γραμμικό σύστημα)

*Ένα γραμμικό σύστημα λέγεται **ομογενές** αν όλοι οι σταθεροί όροι είναι ίσοι με μηδέν.*

Συνεπώς κάθε ομογενές γραμμικό σύστημα είναι της μορφής

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n&=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n&=0\\&\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n&=0.\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι κάθε ομογενές γραμμικό σύστημα είναι συμβιβαστό αφού μια λύση είναι η (0,0,...,0). Αυτή λέγεται η **μηδενική** ή **τετριμμένη** λύση.

Ορισμός 3 (ισοδύναμα συστήματα)

*Δυο γραμμικά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα** αν έχουν τις ίδιες λύσεις.*

Παράδειγμα

Τα συστήματα

$$\begin{matrix} x-2y=0 \\ 2x-y=3 \end{matrix} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} 5x-7y=3 \\ 8x-10y=6 \\ 10x-3y=17 \end{matrix}$$

είναι ισοδύναμα αφού και τα δυο έχουν τη μοναδική λύση (2,1).

Τα συστήματα

$$\begin{matrix} x-2y=0 \\ 2x-y=3 \end{matrix} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} x-2y=1 \\ 2x-y=3 \end{matrix}$$

δεν είναι ισοδύναμα αφού το (2,1) που είναι λύση του πρώτου δεν είναι λύση του δεύτερου.

Ορισμός 4 (στοιχειώδεις μετασχηματισμοί)

*Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα. Καθεμιά από τις παρακάτω διαδικασίες ονομάζεται ένας **στοιχειώδης μετασχηματισμός** του συστήματος.*

- *Πολλαπλασιάζουμε μια εξίσωση του συστήματος με ένα μη μηδενικό αριθμό.*
- *Προσθέτουμε σε μια εξίσωση πολλαπλάσιο άλλης εξίσωσης.*
- *Εναλλάσσουμε τη θέση δυο εξισώσεων.*

Έστω $r_1, r_2, \ldots$ η πρώτη, δεύτερη, ... εξίσωση του συστήματος. Οι αντίστοιχοι συμβολισμοί των παραπάνω διαδικασιών είναι

- $r_i \to ar_i$ *(πολλαπλασιάζουμε την r_i με το $a \neq 0$)*
- $r_i \to r_i + ar_j$ *(στην εξίσωση r_i προσθέτουμε a φορές την r_j)*
- $r_i \to r_j$ *(εναλλάσσουμε τις r_i, r_j).*

Παράδειγμα

$$\left.\begin{matrix} -x+2y-2z=-1 \\ 2x-3y+3z=4 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{r_2 \to r_2+2r_1} \left.\begin{matrix} -x+2y-2z=-1 \\ 0+y-z=2 \end{matrix}\right\}$$

Στη δεύτερη εξίσωση του αρχικού συστήματος προσθέτουμε 2 φορές την πρώτη

Ορισμός 5 (τριγωνικό σύστημα)

Ένα σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

*λέγεται **τριγωνικό** αν* $a_{ij} = 0$ *για κάθε* $i > j$.

Για παράδειγμα, τα επόμενα συστήματα είναι τριγωνικά.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z + 3w &= 2 \\ 5y + 4z - 2w &= 1 \\ 2z + 7w &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z + 3w &= 2 \\ 5y + 4z - 2w &= 1 \end{aligned}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Πρόταση 1 (πλήθος λύσεων)

Κάθε γραμμικό σύστημα

- *ή δεν έχει λύση*
- *ή έχει μοναδική λύση*
- *ή έχει άπειρες λύσεις.*

Για παράδειγμα, δεν υπάρχει γραμμικό σύστημα με ακριβώς δυο λύσεις.

Πρόταση 2 (ισοδύναμα συστήματα)

Αν ένα σύστημα προκύπτει από άλλο με την εφαρμογή μιας πεπερασμένης ακολουθίας στοιχειωδών μετασχηματισμών, τότε τα δυο συστήματα είναι ισοδύναμα.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΤΟΥ GAUSS

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική στην επίλυση γραμμικών συστημάτων. Αποτελείται δε από μια συστηματική εφαρμογή στοιχειωδών μετασχηματισμών ώστε να προκύψει ένα νέο σύστημα του οποίου η επίλυση είναι πιο ‘εύκολη’ από το αρχικό. Σύμφωνα με την Πρόταση 2, το νέο σύστημα είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

Σημείωση Δεν έχουμε διευκρινίσει τι σημαίνει πιο ‘εύκολη’ επίλυση. Θα είμαστε πιο αυστηροί στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα δούμε πιο προσεκτικά τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Προς το παρόν ο σκοπός μας είναι να κατανοήσουμε σε ένα πρώτο – πρακτικό – επίπεδο τη μέθοδο του Gauss και αυτό επιτυγχάνεται με παραδείγματα.

Παραδείγματα

- Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=4\\ x+3y+z&=11\\ 2x+5y-4z&=13 \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς με σκοπό να απαλείψουμε το x από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση. Επομένως θα αφαιρέσουμε την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε από την τρίτη δυο φορές την πρώτη. Αναλυτικά έχουμε:

$$\begin{cases} x+2y-3z=4\\ x+3y+z=11\\ 2x+5y-4z=13 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to r_2-r_1} \begin{cases} x+2y-3z=4\\ \qquad y+4z=7\\ 2x+5y-4z=13 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-2r_1}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=4\\ \qquad y+4z=7\\ \qquad y+2z=5. \end{cases}$$

Μέχρι στιγμής χρησιμοποιήσαμε το x της πρώτης εξίσωσης για να απαλείψουμε τα x των επόμενων εξισώσεων. Τώρα θα συνεχίσουμε χρησιμοποιώντας το y της δεύτερης εξίσωσης για να απαλείψουμε τα y των επόμενων εξισώσεων. Άρα θα αφαιρέσουμε τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

$$\begin{cases} x+2y-3z=4\\ \qquad y+4z=7\\ \qquad y+2z=5 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-r_2} \begin{cases} x+2y-3z=4\\ \qquad y+4z=7\\ \qquad -2z=-2. \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι προέκυψε ένα τριγωνικό σύστημα σαφώς απλούστερο από το αρχικό: Το νέο σύστημα μπορεί να λυθεί εύκολα. Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε z = 1, οπότε αντικαθιστώντας στη δεύτερη παίρνουμε $y = 7 - 4z = 3$. Τέλος από την πρώτη βρίσκουμε $x = 4 - 2y + 3z = 1$. Άρα το αρχικό σύστημα έχει μοναδική λύση, την $(1,3,1)$.

Σημείωση. Θα μπορούσαμε, αντί να λύσουμε το σύστημα στο τελευταίο στάδιο, να συνεχίσουμε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς εργαζόμενοι από 'κάτω προς τα πάνω'με τον ακόλουθο τρόπο. Πρώτα μετατρέπουμε το συντελεστή του z σε 1. Στη συνέχεια αφαιρούμε 4 φορές την τρίτη γραμμή από τη δεύτερη κλπ.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad y + 4z = 7 \\ \quad -2z = -2 \end{cases} \xrightarrow{r_3 \to -\frac{1}{2} r_3} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad y + 4z = 7 \\ \quad z = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 4r_3}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad y \quad = 3 \\ \quad z = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + 3r_3} \begin{cases} x + 2y \quad = 7 \\ \quad y \quad = 3 \\ \quad z = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2}$$

$$\begin{cases} x \quad = 1 \\ \quad y \quad = 3 \\ \quad z = 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο σύστημα είναι ήδη λυμένο.

- Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} &x - 2y + z = 1 \\ &x - y + z = 2 \\ &2x - 3y + 2z = 5. \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς όπως πριν. Έχουμε

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 5 \end{cases} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ \quad y \quad = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 5 \end{cases} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ \quad y \quad = 1 \\ \quad y \quad = 3 \end{cases} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ \quad y \quad = 1 \\ \quad 0 \quad = 2. \end{cases}$$

Εδώ σταματάμε γιατί παρατηρούμε ότι το τελευταίο σύστημα είναι αδύνατο αφού υπάρχει η ισότητα 0 = 2. Άρα το αρχικό σύστημα είναι επίσης αδύνατο.

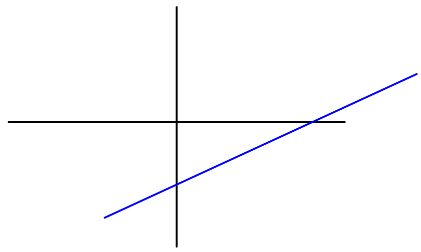
Στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss:

1. Μετατρέπουμε με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών το δοσμένο σύστημα σε ένα άλλο που έχει τριγωνική μορφή.
2. Αν προκύψει εξίσωση της μορφής 0 = c με $c \neq 0$, το σύστημα είναι αδύνατο. Διαφορετικά, μπορούμε να λύσουμε το τριγωνικό σύστημα ή με διαδοχικές αντικαταστάσεις ή με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς εργαζόμενοι από κάτω προς τα πάνω.

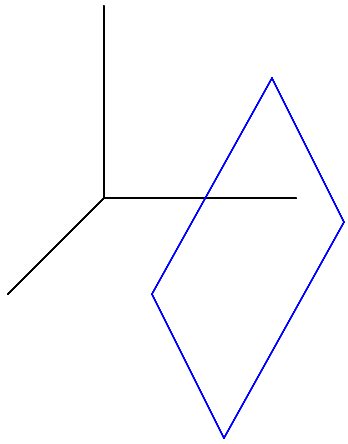
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Πρόταση 3

1. Το σύνολο των σημείων (x, y) του $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $ax + by = c$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένας από τους a,b δεν είναι μηδέν, είναι μια ευθεία.



2. Το σύνολο των σημείων (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένας από τους a,b,c δεν είναι μηδέν, είναι ένα επίπεδο.

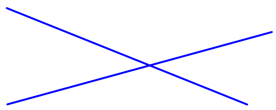
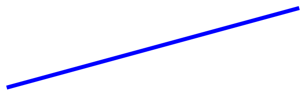
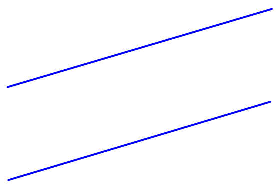


Πρόταση 4

1. Το σύνολο των σημείων (x, y) του $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{aligned}$$

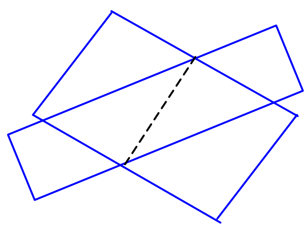
όπου $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένας από τους a_{11}, a_{12} και τουλάχιστον ένας από τους a_{21}, a_{22} είναι μη μηδενικός, είναι

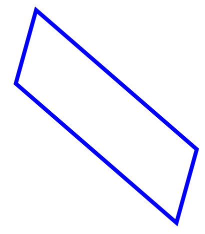
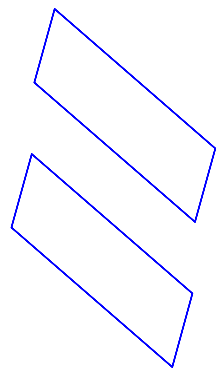
ή ένα σημείο (το σημείο τομής των ευθειών)	
ή μια ευθεία (οι δυο ευθείες συμπίπτουν)	
ή το κενό σύνολο (οι δυο ευθείες είναι παράλληλες)	

2. Το σύνολο των σημείων (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{aligned}$$

όπου $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένας από τους a_{11}, a_{12}, a_{13} και τουλάχιστον ένας από τους a_{21}, a_{22}, a_{23} είναι μη μηδενικός, είναι

ή μια ευθεία (η ευθεία τομής των επιπέδων)	

ή ένα επίπεδο (τα δυο επίπεδα συμπίπτουν)	
ή το κενό σύνολο (τα δυο επίπεδα είναι παράλληλα)	

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x-2y+z+w&=1\\ 2x+y+2z-w&=2\\ 3x+2y-z-w&=3. \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss έχουμε

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1\\ 2x+y+2z-w=2\\ 3x+2y-z-w=3 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1} \begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad 5y \quad -3w=0\\ 3x+2y-z-w=3 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-3r_1}$$

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad 5y \quad -3w=0\\ \quad 8y-4z-4w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to \frac{1}{5}r_2} \begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad y \quad -\dfrac{3}{5}w=0\\ \quad 8y-4z-4w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-8r_2}$$

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ y \quad -\frac{3}{5}w=0 \\ -4z+\frac{4}{5}w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_3 \to -\frac{1}{4}r_3} \begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ y \quad -\frac{3}{5}w=0 \\ z-\frac{1}{5}w=0. \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα είναι τριγωνικό. Συνεχίζουμε τώρα εργαζόμενοι προς τα πάνω. Χρησιμοποιώντας το y της δεύτερης εξίσωσης θα μηδενίσουμε το y της πρώτης, μετά χρησιμοποιώντας το z της τρίτης εξίσωσης θα μηδενίσουμε το z της πρώτης.

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ y \quad -\frac{3}{5}w=0 \\ z-\frac{1}{5}w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \to r_1+2r_2} \begin{cases} x \quad +z-\frac{1}{5}w=1 \\ y \quad -\frac{3}{5}w=0 \\ z-\frac{1}{5}w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \to r_1-r_3}$$

$$\begin{cases} x \qquad =1 \\ y \quad -\frac{3}{5}w=0 \\ z-\frac{1}{5}w=0. \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα λύνεται άμεσα: από την τρίτη εξίσωση έχουμε $z=\frac{1}{5}w$ και από τη δεύτερη $y=\frac{3}{5}w.$ Οι λύσεις είναι $(x,y,z)=(1,\frac{3}{5}w,\frac{1}{5}w),$ όπου το w διατρέχει το $\mathbb{R}$. Έχουμε δηλαδή άπειρες λύσεις.

Άσκηση 2

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{aligned} 3y+2z&=1 \\ x+2y+z&=0 \\ 2x+7y+4z&=2. \end{aligned}$$

Λύση

Επειδή δεν υπάρχει x στην πρώτη εξίσωση, θα φέρουμε τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη θέση. Επειδή ο σκοπός είναι να φθάσουμε σε ένα τριγωνικό σύστημα, θα φέρουμε την εξίσωση που δεν έχει x στην τελευταία θέση. Μετά εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

$$\begin{cases} 3y+2z=1 \\ x+2y+z=0 \\ 2x+7y+4z=2 \end{cases} \xrightarrow{r_1\to r_2} \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3y+2z=1 \\ 2x+7y+4z=2 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to r_3}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+7y+4z=2 \\ 3y+2z=1 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1} \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3y+2z=2 \\ 3y+2z=1 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-r_2}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3y+2z=2 \\ 0=-1. \end{cases}$$

Από την τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση 3

Για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$, να λυθεί το παρακάτω σύστημα.

$$\begin{aligned} x-2y+kz&=1 \\ 2x-y+2z&=2 \\ 3x-y+3kz&=3 \end{aligned}$$

Λύση

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς

$$r_2 \to r_2-2r_1,\, r_3 \to r_3-3r_1,\, r_2 \to \frac{1}{3}r_2,\, r_3 \to r_3-7r_2,\, r_3 \to \frac{3}{10}r_3$$

φθάνουμε στο τριγωνικό σύστημα

$$\begin{aligned} x \quad -2y \quad +kz \quad &=1 \\ y \quad +\frac{2-2k}{3}z &=0 \\ (-1+k)z &=0. \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις βασιζόμενοι στην παράσταση $-1+k$ της τελευταίας εξίσωσης.

1. Έστω $k \neq 1$. Τότε από την τελευταία εξίσωση έχουμε $z = 0$, από τη δεύτερη $y = 0$ και από την πρώτη $x = 1$. Άρα έχουμε μοναδική λύση, την (0,0,0).
2. Έστω $k=1$. Τότε το τριγωνικό σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1 \\ y \quad &=0 \\ 0&=0. \end{aligned}$$

Άρα $y = 0$ και $x = 1 + 2y - z = 1 - z$, ενώ το z παίρνει αυθαίρετες τιμές.

Δηλαδή έχουμε άπειρες λύσεις, τις $(1 - z, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 5y & + & 5z & = & 4 \\ 2x & - & 6y & + & \lambda z & = & \mu \end{array}$$

(α) Θέσατε λ = 2 και μ = 4 και λύστε το σύστημα.

(β) Βρείτε τις τιμές των λ και μ ώστε το σύστημα αυτό

(i) να είναι αδύνατο

(ii) να έχει άπειρες λύσεις

(iii) να έχει ακριβώς μια λύση.

Λύση

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $r_2 \to r_2 - 3r_1$, $r_3 \to r_3 - 2r_1$, $r_3 \to r_3 + 2r_2$, βρίσκουμε ότι το σύστημα παίρνει την τριγωνική μορφή

$$\begin{array}{l} x - 2y \quad + z \quad = 1 \\ \quad\; y \quad + 2z \quad = 1 \; . \\ \qquad (\lambda + 2)z = \mu \end{array}$$

Από αυτή συμπεραίνουμε τα εξής.

(α) Έστω $\lambda = 2, \mu = 4.$ Τότε από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $z = 1,$ από τη δεύτερη $y = 1 - 2z = -1$ και από την πρώτη $x = 1 + 2y - z = -2.$ Άρα υπάρχει μοναδική λύση, η $(-2, -1, 1)$.

(β)

(i) Παρατηρούμε από την τελευταία γραμμή ότι αν $\lambda = -2$ και $\mu \neq 0$, τότε δεν υπάρχουν λύσεις.

(ii) Αν $\lambda = -2$ και $\mu = 0$, τότε το σύστημα είναι

$$\begin{array}{l} x - 2y \quad + z \quad = 1 \\ \quad\; y \quad + 2z \quad = 1 \\ \qquad\qquad\quad 0 \quad = 0. \end{array}$$

Έχουμε $y = 1 - 2z, x = 1 + 2y - z = 1 + 2(1 - 2z) - z = 3 - 5z.$ Άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις, οι $(3 - 5z, 1 - 2z, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

(iii) Έστω ότι $\lambda \neq -2$. Από την τελευταία εξίσωση έχουμε $z = \dfrac{\mu}{\lambda+2}$, οπότε από τη δεύτερη παίρνουμε $y = 1 - 2z = 1 - 2\dfrac{\mu}{\lambda+2} = \dfrac{\lambda - 2\mu + 2}{\lambda+2}$ και από την πρώτη $x = 1 + 2y - z = 1 + 2\dfrac{\lambda - 2\mu + 2}{\lambda+2} - \dfrac{\mu}{\lambda+2} = \dfrac{3\lambda - 5\mu + 6}{\lambda+2}$. Δηλαδή υπάρχει μοναδική λύση, η $\left(\dfrac{3\lambda - 5\mu + 6}{\lambda+2}, \dfrac{\lambda - 2\mu + 2}{\lambda+2}, \dfrac{\mu}{\lambda+2}\right)$.

Άσκηση 5

Προσδιορίστε με γεωμετρικό τρόπο το πλήθος των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ 4x - ky + 2z &= 3 \end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η γραφική παράσταση των λύσεων του συστήματος είναι η τομή δυο επιπέδων και συνεπώς θα είναι ή το κενό σύνολο ή μια ευθεία (βλ. Πρόταση 4). Δηλαδή, το σύστημα μπορεί να είναι ή αδύνατο ή να έχει άπειρες λύσεις. Τα δυο επίπεδα είναι παράλληλα αν και μόνο αν υπάρχει λ με $4 = 2\lambda$, $-k = -\lambda, 2 = \lambda$, δηλαδή αν και μόνο αν $k = 2$. Για την τιμή αυτή του k τα δυο επίπεδα είναι διακεκριμένα. Συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο αν $k = 2$ και για $k \neq 2$ έχει άπειρες λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Λύστε τα συστήματα

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -7 \\ 2x - y + z &= 3 \\ -x + y + z &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x \quad + 2z &= 7 \\ 2x - y + z &= 3 \\ -x + y + z &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x \quad + 2z &= 6 \\ 2x - y + z &= 3 \\ -x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

Απάντηση Το πρώτο έχει τη μοναδική λύση (1,2,3). Το δεύτερο έχει άπειρες λύσεις $(7 - 2z, 11 - 3z, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Το τελευταίο είναι αδύνατο.

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε το επόμενο σύστημα να είναι συμβιβαστό.

$$\begin{aligned} x+2y+az&=1\\ 2x-y-z&=3\\ -x+2y+z&=2. \end{aligned}$$

Υπόδειξη Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών παίρνουμε την τριγωνική μορφή (βλ. Λυμένη Άσκηση 3).

$$\begin{aligned} x+2y+az\quad &=1\\ y+\frac{1+2a}{5}z\ &=\frac{-1}{5}\\ (-1+3a)z&=-19. \end{aligned}$$

Απάντηση $a \neq \frac{1}{3}$.

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω σύστημα να

- έχει μοναδική λύση
- είναι αδύνατο
- έχει άπειρες λύσεις

$$\begin{aligned} x+2y+az&=b\\ 2x-y-z&=3\\ -x+2y+z&=2. \end{aligned}$$

Υπόδειξη Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς παίρνουμε την τριγωνική μορφή (βλ. Λυμένη Άσκηση 4)

$$\begin{aligned} x+2y+az\quad &=b\\ y+\frac{1+2a}{5}z\ &=\frac{-3+2b}{5}\\ (-1+3a)z&=-22+3b. \end{aligned}$$

Απάντηση Για $a \neq \frac{1}{3}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση. Για $a = \frac{1}{3}$ και $b \neq \frac{22}{3}$ το σύστημα είναι αδύνατο. Για $a = \frac{1}{3}$ και $b = \frac{22}{3}$ έχουμε άπειρες λύσεις.

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα

$$x + 2y + az = 1$$
$$2x - y - z = 3$$
$$-x + ay + z = 2$$

- έχει μοναδική λύση
- είναι αδύνατο
- έχει άπειρες λύσεις

Στις περιπτώσεις που είναι συμβιβαστό, να βρεθούν οι λύσεις.

Απάντηση Για $a = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ το σύστημα είναι ασυμβίβαστο. Για τις υπόλοιπες τιμές έχει μοναδική λύση, τη $\left(\dfrac{3a^2 + 3a - 11}{2a^2 - 3}, \dfrac{7a + 4}{2a^2 - 3}, \dfrac{-a - 17}{2a^2 - 3}\right)$. (Το σύστημα ποτέ δεν έχει άπειρες λύσεις).

Άσκηση 5

Να βρεθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα

$$x + 2y = -1$$
$$2x - y = b$$
$$ax - y = 1$$

να είναι συμβιβαστό.

Υπόδειξη Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς παίρνουμε το τριγωνικό σύστημα

$$x + 2y = -1$$
$$-5y = b + 2$$
$$0 = 2ab - a + b - 3.$$

Απάντηση $0 = 2ab - a + b - 3$