ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α΄ ΜΕΡΟΣ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

1 ΠΙΝΑΚΕΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Γενικά

Τέσσερα εργοστάσια παραγωγής αυτοκινήτων A, B, Γ και Δ δίνουν για το τελευταίο μοντέλο τους ως προς πέντε τεχνικά χαρακτηριστικά τις εξής πληροφορίες:

Εργοστάσιο A: Ισχύς 97 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 10,7 sec, τελική ταχύτητα 180 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 9,5 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 10.

Εργοστάσιο B: Ισχύς 100 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 12,9 sec, τελική ταχύτητα 191 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 11 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 11.

Εργοστάσιο Γ: Ισχύς 45 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 17,9 sec, τελική ταχύτητα 140 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km, 7,1 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 6.

Εργοστάσιο Δ: Ισχύς 174 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 7,6 sec, τελική ταχύτητα 225 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 12,5 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 20.

Τις πληροφορίες αυτές μπορούμε να τις παρουσιάσουμε πιο οργανωμένα ως εξής:

Τεχνικά Χαρακτηρ. / Εργοστάσιο	Ισχύς DIN	Χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h	Τελική Ταχύτητα km/h	Κατανάλωση στην πόλη lit ανά 100 km	Φορολογήσιμοι ίπποι
A	97	10,7	180	9,5	10
B	100	12,9	191	11	11
Γ	45	17,9	140	7,1	6
Δ	174	7,6	225	12,5	20

Τα αριθμητικά δεδομένα της ορθογώνιας αυτής διάταξης, κλεισμένα μέσα σε αγκύλες,

$$\begin{bmatrix} 97 & 10{,}7 & 180 & 9{,}5 & 10 \\ 100 & 12{,}9 & 191 & 11 & 11 \\ 45 & 17{,}9 & 140 & 7{,}1 & 6 \\ 174 & 7{,}6 & 225 & 12{,}5 & 20 \end{bmatrix}$$

λέμε ότι σχηματίζουν έναν **πίνακα με 4 γραμμές και 5 στήλες** ή, συντομότερα, έναν πίνακα **τύπου 4×5** ή ακόμα έναν **4×5 πίνακα**.
Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - \omega = 1 \\ 5x \qquad - 2z + \omega = 2 \\ \qquad y - 7z + 3\omega = 3 \end{cases}.$$

Το σύστημα αυτό θα μπορούσε να παρασταθεί ως εξής:

Συντελεστής / Εξίσωση	του x	του y	του z	του ω	σταθ. όρος
1η	1	-3	2	-1	1
2η	5	0	-2	1	2
3η	0	1	-7	3	3

Έτσι οι συντελεστές των αγνώστων σχηματίζουν τον **3×4 πίνακα**

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

και οι συντελεστές των αγνώστων μαζί με τους σταθερούς όρους τον **3×5 πίνακα**

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια διάταξη $\mu \cdot \nu$ το πλήθος αριθμών σε μορφή ορθογωνίου σχήματος με μ γραμμές και ν στήλες, λέγεται **πίνακας τύπου** $\boldsymbol{\mu \times \nu}$ ή απλούστερα $\boldsymbol{\mu \times \nu}$ **πίνακας.**

Τους πίνακες τους συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα A, B, Γ κτλ. Οι αριθμοί με τους οποίους σχηματίζουμε έναν πίνακα λέγονται **στοιχεία** του πίνακα.

Το στοιχείο ενός $\mu\times\nu$ πίνακα A που ανήκει στην i-γραμμή και j-στήλη συμβολίζεται με α_{ij}.

Έτσι ο $\mu\times\nu$ πίνακας A γράφεται:

$$\begin{array}{cl}
\begin{array}{cccccc} \phantom{\alpha_{11}} & \phantom{\alpha_{12}} & & j\ \text{στήλη} & & \phantom{\alpha_{1\nu}} \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{i\nu} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu j} & \cdots & \alpha_{\mu\nu}
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \\ i\ \text{γραμμή} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

ή συντομογραφικά $[\alpha_{ij}]$, $1\le i\le\mu$, $1\le j\le\nu$.

Για παράδειγμα, ο 2×2 πίνακας $[\alpha_{ij}]$ με $\alpha_{ij}=i-j$ έχει στοιχεία $\alpha_{11}=1-1=0$, $\alpha_{12}=1-2=-1$, $\alpha_{21}=2-1=1$ και $\alpha_{22}=2-2=0$. Επομένως, ο πίνακας αυτός γράφεται $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Η ισότητα μεταξύ των πινάκων ορίζεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δυο πίνακες A, B λέμε ότι είναι **ίσοι**, όταν έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών, τον ίδιο αριθμό στηλών (δηλαδή αν είναι του ίδιου τύπου) και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

Για να δηλώσουμε ότι δύο πίνακες είναι ίσοι γράφουμε $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι δύο πίνακες διαφορετικού τύπου δεν μπορεί να είναι ίσοι.

Αν ένας πίνακας έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, δηλαδή είναι τύπου $\nu\times\nu$ για κάποιο $\nu\in\mathbb{N}^*$, τότε ο πίνακας αυτός λέγεται **τετραγωνικός πίνακας**.

Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ ενός τετραγωνικού πίνακα A, λέμε ότι σχηματίζουν την **κύρια διαγώνιο** του A.

Αν τα στοιχεία ενός τετραγωνικού πίνακα A που δεν βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο είναι όλα 0, τότε ο A λέγεται **διαγώνιος πίνακας**.

Για παράδειγμα, οι πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιοι πίνακες.

Ένας πίνακας που έχει μία μόνο γραμμή, όπως ο $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ λέγεται **πίνακας γραμμή**, ενώ ένας πίνακας που έχει μία μόνο στήλη, όπως ο $\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}$ λέγεται **πίνακας στήλη**. Ένας πίνακας που έχει ένα μόνο στοιχείο, όπως ο $[-3]$ λέγεται **πίνακας στοιχείο**.
Τέλος, ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **τριγωνικός άνω**, όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά και **τριγωνικός κάτω**, όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.
Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\0 & -1 & 5\\0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 3 & 2\\0 & 0 & 1 & 5\\0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

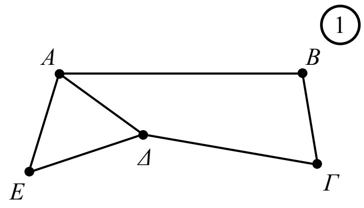
είναι τριγωνικοί άνω, ενώ οι πίνακες

$$\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\5 & 7 & 2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\-3 & 1 & 5 & 0\\2 & 0 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

είναι τριγωνικοί κάτω.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Το διπλανό σχήμα παριστάνει το οδικό δίκτυο που συνδέει τις πόλεις A, B, Γ, Δ και E. Να παρασταθεί το δίκτυο αυτό με έναν πίνακα του οποίου κάθε στοιχείο να φανερώνει το πλήθος των δυνατών τρόπων μετάβασης από πόλη σε πόλη, (όχι οπωσδήποτε διαφορετική πόλη), αφού προηγουμένως περάσουμε από μία μόνο πόλη, π.χ. *ΑΒΑ* κτλ.



ΛΥΣΗ

Από την πόλη *Α* στην *Α* υπάρχουν 3 τρόποι: *ΑΒΑ*, *ΑΔΑ*, *ΑΕΑ*, από την *Α* στην *Β* δεν υπάρχει τρόπος, αφού πρέπει να περάσουμε από μία μόνο πόλη, από την *Α* στην *Γ* υπάρχουν 2 τρόποι *ΑΔΓ*, *ΑΒΓ*, από την *Α* στη *Δ* υπάρχει ένας τρόπος *ΑΕΔ*, από την *Α* στην *Ε* υπάρχει 1 τρόπος *ΑΔΕ* κτλ.

Έτσι το οδικό δίκτυο μπορεί να παρασταθεί με τον πίνακα διπλής εισόδου.

ΑΠΟ \ ΣΤΗΝ	*Α*	*Β*	*Γ*	*Δ*	*Ε*
Α	3	0	2	1	1
Β	0	2	0	2	1
Γ	2	0	2	0	1
Δ	1	2	0	3	1
Ε	1	1	1	1	2

ή απλά με τον 5×5 πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές των x, y για τις οποίες ισχύουν:

i) $\begin{bmatrix} x(3x+5) & 1 \\ 3x-1 & 16x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3x^2+5 \end{bmatrix}$ **ii)** $\begin{bmatrix} 3x-5 & 2y+6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & x+4 \\ x-2y & 7 \end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ

i) Η ισότητα $\begin{bmatrix} x(3x+5) & 1 \\ 3x-1 & 16x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3x^2+5 \end{bmatrix}$ ισχύει, αν και μόνο αν συναληθεύουν οι ισότητες $\begin{cases} x(3x+5) = 2 \\ 1 = 1 \\ 3x - 1 = 0 \\ 16x = 3x^2 + 5 \end{cases}$.

Η τρίτη ισότητα αληθεύει για $x = \dfrac{1}{3}$. Η τιμή αυτή του x επαληθεύει και τις άλλες δύο ισότητες. Επομένως, οι παραπάνω ισότητες συναληθεύουν για $x = \dfrac{1}{3}$.

ii) Η ισότητα $\begin{bmatrix} 3x-5 & 2y+6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & x+4 \\ x-2y & 7 \end{bmatrix}$ ισχύει, αν και μόνο αν συναληθεύουν οι ισότητες $\begin{cases} 3x-5 = -11 \\ 2y+6 = x+4 \\ 6 = x-2y \\ 7 = 7 \end{cases}$.

Η δεύτερη και τρίτη ισότητα γράφονται $\begin{cases} x-2y = 2 \\ x-2y = 6 \end{cases}$ και προφανώς δεν συναληθεύουν για καμία τιμή των x και y. Επομένως, δεν υπάρχουν τιμές των x, y για τις οποίες οι πίνακες αυτοί να είναι ίσοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο διπλανός πίνακας δείχνει για τρεις ομάδες ποδοσφαίρου τους αγώνες A, τις νίκες N, τις ήττες H, τις ισοπαλίες I, τα τέρματα E που πέτυχε η ομάδα, τα τέρματα Δ που δέχτηκε η ομάδα και τους βαθμούς B που έχει. Αν $A=[\alpha_{ij}]$ είναι ο πίνακας αυτός, τότε να βρείτε:

$$\begin{array}{l} \text{ΟΜΑΔΕΣ} \\ \text{ΝΙΚΗ} \\ \text{ΘΥΕΛΛΑ} \\ \text{ΔΑΦΝΗ} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & N & H & I & E & \Delta & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 3 & 13 & 6 & 15 \\ 12 & 7 & 2 & 3 & 10 & 4 & 17 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 4 & 11 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

i) Ποιος είναι ο τύπος του πίνακα.

ii) Ποιες πληροφορίες μας δίνουν τα στοιχεία $\alpha_{12}, \alpha_{15}, \alpha_{24}$ και α_{37}.

2. Δίνεται συντομογραφικά ο 4×4 πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ όπου $\alpha_{ij}=|i-j|$. Να παραστήσετε τον πίνακα αυτόν, αφού βρείτε τα στοιχεία του.

3. Να βρείτε τα x, y για τα οποία ισχύει:

i) $\begin{bmatrix} 2x-1 & 1 & 0 \\ x-y & 3 & 2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 & x+y \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} x^2+y & y \\ -x^2+x & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & y \end{bmatrix}$.

4. Για ποια τιμή του θετικού αριθμού x ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & \ln^2 x-1 \\ \ln^2 x-\ln x & 2 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος.

5. Να βρεθούν οι τιμές των $x\in[0,2\pi)$ για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 2\eta\mu^2 x & \eta\mu 2x \\ \varepsilon\varphi x & \sigma\upsilon\nu 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ - ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ

Πρόσθεση πινάκων

Μία εταιρεία πουλάει τηλεοράσεις, ψυγεία, κουζίνες και πλυντήρια σε Αθήνα, Θεσσαλονίκη και Πάτρα. Οι πωλήσεις τους μήνες Σεπτέμβριο και Οκτώβριο παρουσίασαν την εξής κίνηση:

	Σεπτέμβριος			**Οκτώβριος**		
	Αθήνα	Θεσ/κη	Πάτρα	Αθήνα	Θεσ/κη	Πάτρα
Τηλεοράσεις	18	16	13	20	18	15
Ψυγεία	12	10	9	15	13	12
Κουζίνες	9	11	8	13	10	10
Πλυντήρια	14	12	10	17	16	8

Επομένως, τους δυο αυτούς μήνες οι συνολικές πωλήσεις της εταιρείας ήταν οι εξής:

	Αθήνα	Θεσ/νίκη	Πάτρα
Τηλεοράσεις	$(18+20)$	$(16+18)$	$(13+15)$
Ψυγεία	$(12+15)$	$(10+13)$	$(9+12)$
Κουζίνες	$(9+13)$	$(11+10)$	$(8+10)$
Πλυντήρια	$(14+17)$	$(12+16)$	$(10+8)$

Αν τώρα θεωρήσουμε τους πίνακες των παραπάνω πωλήσεων έχουμε:

$$\text{Για το Σεπτέμβριο:} \quad A=\begin{bmatrix} 18 & 16 & 13 \\ 12 & 10 & 9 \\ 9 & 11 & 8 \\ 14 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Για τον Οκτώβριο:} \quad B=\begin{bmatrix} 20 & 18 & 15 \\ 15 & 13 & 12 \\ 13 & 10 & 10 \\ 17 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

και για τις συνολικές πωλήσεις:

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 18+20 & 16+18 & 13+15 \\ 12+15 & 10+13 & 9+12 \\ 9+13 & 11+10 & 8+10 \\ 14+17 & 12+16 & 10+8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 38 & 34 & 28 \\ 27 & 23 & 21 \\ 22 & 21 & 18 \\ 31 & 28 & 18 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας Γ λέγεται **άθροισμα** των πινάκων A και B και συμβολίζεται με $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, δηλαδή $\Gamma=A+B$.
Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Άθροισμα δυο $\mu\times\nu$ πινάκων $A=[\alpha_{ij}]$ και $B=[\beta_{ij}]$ λέγεται ο $\mu\times\nu$ πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. Δηλαδή,

$$A+B=[\alpha_{ij}+\beta_{ij}]$$

Δεν ορίζουμε άθροισμα πινάκων διαφορετικού τύπου.

Για παράδειγμα, οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 9\\ 8 & 4 & 5\\ 5 & -7 & -2\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}7 & -1 & 3\\ 0 & 9 & 6\\ 6 & -4 & 2\end{bmatrix}$ που είναι του ίδιου τύπου 3×3, με βάση τον παραπάνω ορισμό, μπορούν να προστεθούν και το άθροισμά τους είναι

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 9\\ 8 & 4 & 5\\ 5 & -7 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & -1 & 3\\ 0 & 9 & 6\\ 6 & -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 2 & 12\\ 8 & 13 & 11\\ 11 & -11 & 0\end{bmatrix},$$

ενώ οι πίνακες $\Gamma=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}$ και $\Delta=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$, που δεν είναι του ίδιου τύπου δεν μπορούν να προστεθούν.

Η πράξη με την οποία βρίσκουμε το άθροισμα δύο πινάκων λέγεται *πρόσθεση πινάκων*.

Ιδιότητες της πρόσθεσης των πινάκων

Η πρόσθεση των πινάκων έχει ιδιότητες ανάλογες με την πρόσθεση των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα:

- Αν A, B, Γ είναι $\mu\times\nu$ πίνακες, τότε

$A+B=B+A$	αντιμεταθετική
$A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$	προσεταιριστική

- Αν $\mathbf{O}$ είναι ο $\mu\times\nu$ πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν, τότε για κάθε $\mu\times\nu$ πίνακα A ισχύει

$$\boxed{A+\mathbf{O}=\mathbf{O}+A=A}$$

Ο πίνακας $\mathbf{O}$ λέγεται **μηδενικός πίνακας**.

Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ είναι μηδενικοί.

- Αν με $-A$ συμβολίσουμε τον πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι αντίθετα των αντίστοιχων στοιχείων ενός πίνακα A, τότε ισχύει

$$\boxed{A+(-A)=(-A)+A=\mathbf{O}}$$

Ο πίνακας $-A$ λέγεται **αντίθετος του πίνακα** A.

Για παράδειγμα, ο αντίθετος του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 \\ -7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να γράφουμε $A+B+\Gamma$ για καθένα από τα ίσα αθροίσματα $A+(B+\Gamma)$, $(A+B)+\Gamma$. Ομοίως, αν A,B,Γ,Δ είναι πίνακες του ίδιου τύπου, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}[(A+B)+\Gamma]+\Delta &= (A+B)+(\Gamma+\Delta) = [A+(B+\Gamma)]+\Delta = A+[B+(\Gamma+\Delta)] \\ &= A+[(B+\Gamma)+\Delta] = [(B+A)+\Gamma]+\Delta \quad \text{κτλ.}\end{aligned}$$

και επομένως, μπορούμε να γράφουμε $A+B+\Gamma+\Delta$ για καθένα από τα αθροίσματα αυτά. Γενικά, επειδή ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, μπορεί να αποδειχθεί ότι το άθροισμα τριών ή περισσοτέρων πινάκων $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί η πρόσθεση και συμβολίζεται με $A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu$.

Αφαίρεση πινάκων

Όπως και στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, έτσι και στους πίνακες η αφαίρεση ορίζεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, αν A,B είναι δύο $\mu\times\nu$ πίνακες, τότε η διαφορά $A-B$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{A-B = A+(-B)}$$

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, τότε

$$A-B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, ο πίνακας $A-B$ προκύπτει με αφαίρεση των στοιχείων του B από τα αντίστοιχα στοιχεία του A.

Από τους παραπάνω ορισμούς της πρόσθεσης και της αφαίρεσης προκύπτει ότι:

$$\boxed{X+B = A \Leftrightarrow X = A-B}$$

Πράγματι:

— Αν $X+B=A$, τότε $X+B-B=A-B$, οπότε $X=A-B$, ενώ

— Αν $X=A-B$, τότε $X+B=A-B+B$, οπότε $X+B=A$.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Ο παρακάτω πίνακας A περιγράφει τις τιμές πώλησης σε δραχμές τριών ηλεκτρικών ειδών μιας βιομηχανίας σε δύο υποκαταστήματα:

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Τηλεοράσεις} & \text{Βίντεο} & \text{Στερεοφωνικά} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 160000 & 110000 & 180000 \\ 150000 & 100000 & 170000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{1ο υποκατάστημα} \\ \text{2ο υποκατάστημα} \end{array}$$

Αν κατά την περίοδο των εκπτώσεων, ο βιομήχανος προτίθεται να κάνει έκπτωση 20% στα προϊόντα του, τότε πρέπει να διαμορφώσει τις νέες τιμές στο 80% των προηγουμένων. Οι νέες τιμές πώλησης θα προκύψουν αν πολλαπλασιάσουμε τις παλιές τιμές με 0,8, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

$$B=\begin{bmatrix} 0{,}8\cdot 160000 & 0{,}8\cdot 110000 & 0{,}8\cdot 180000 \\ 0{,}8\cdot 150000 & 0{,}8\cdot 100000 & 0{,}8\cdot 170000 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 128000 & 88000 & 144000 \\ 120000 & 80000 & 136000 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας B λέγεται **γινόμενο του αριθμού 0,8 με τον πίνακα** A και συμβολίζεται με $\mathbf{0{,}8\cdot A}$, δηλαδή είναι $B=0{,}8A$. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με έναν πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$, λέγεται ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A με λ. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $\boldsymbol{\lambda\cdot A}$ ή $\boldsymbol{\lambda A}$. Δηλαδή,

$$\lambda\cdot A=[\lambda\alpha_{ij}]$$

Η πράξη με την οποία βρίσκουμε το γινόμενο αριθμού με πίνακα λέγεται *πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα*.

Για παράδειγμα, το γινόμενο του αριθμού $\lambda=-3$ με τον πίνακα $A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας:

$$-3A=-3\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3\cdot 2 & (-3)\cdot(-5) & -3\cdot 1 \\ (-3)\cdot(-2) & (-3)\cdot(-1) & -3\cdot 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 15 & -3 \\ 6 & 3 & -12 \end{bmatrix}.$$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

Αν A, B είναι $\mu\times\nu$ πίνακες και κ, λ πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού:

1. $(\kappa+\lambda)A=\kappa A+\lambda A$
2. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
3. $\kappa(\lambda A)=(\kappa\lambda)A$
4. $1A=A$

Επιπλέον, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{\lambda A=\mathbb{O}\Leftrightarrow \lambda=0 \ \text{ ή } \ A=\mathbb{O}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί ο πίνακας *X* για τον οποίο ισχύει:

$$\mathbf{2\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & -7\\ 0 & 1\end{bmatrix}-3X=5\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}.}$$

(Μια τέτοια ισότητα είναι μια ***εξίσωση με πίνακες*****).**

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$2\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & -7\\ 0 & 1\end{bmatrix}-3X=5\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix} \Leftrightarrow -3X=5\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & -7\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -3X=\begin{bmatrix}15 & 5\\ -10 & 0\\ 20 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -4\\ -10 & 14\\ 0 & -2\end{bmatrix} \Leftrightarrow -3X=\begin{bmatrix}17 & 1\\ -20 & 14\\ 20 & -7\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(-3)X=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}17 & 1\\ -20 & 14\\ 20 & -7\end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}-\frac{17}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{20}{3} & -\frac{14}{3}\\ -\frac{20}{3} & \frac{7}{3}\end{bmatrix}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε το άθροισμα $A+B$ και την διαφορά $A-B$, εφόσον φυσικά ορίζονται:

i) $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$

ii) $A=\begin{bmatrix}6 & 7 & 8 & 9\\ 5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix}5 & 6 & 7 & 8\\ 6 & 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$

iii) $A=[4 \quad 5 \quad 6]$, $\quad B=[-4 \quad -5 \quad -6]$

iv) $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

v) $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & \omega \\ \kappa & \lambda & \mu \end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta & -\gamma \\ -x & 1-y & -\omega \\ -\kappa & -\lambda & 1-\mu \end{bmatrix}$.

2. Αν είναι $A_1=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ και $A_4=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, να βρείτε το άθροισμα $A_1+A_2+A_3+A_4$.

3. Να βρείτε τα x, y, ω για τα οποία ισχύει η ισότητα:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2-x \\ 2 & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \\ y-3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & \omega-5 \\ 1 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $5\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad$ ii) $4\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

iii) $\lambda\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 2\lambda \\ 3\lambda & -\lambda & \lambda \end{bmatrix}$.

5. Αν $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, να βρείτε τους πίνακες:

i) $2A$ $\quad$ ii) $2(-3A)$ $\quad$ iii) $5B-2A$ $\quad$ iv) $3A-\frac{1}{2}B$.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3X+\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

ii) $6\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}-7X=5\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

7. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$$\text{συν}\alpha\begin{bmatrix} \text{συν}\alpha & -\text{ημ}\alpha \\ \text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha \end{bmatrix} + \text{ημ}\alpha\begin{bmatrix} \text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha \\ -\text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha \end{bmatrix}$$

είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

8. Αν $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ και $Y = \begin{bmatrix} -\alpha & 2\beta \\ -\gamma & 3\delta \end{bmatrix}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε να ισχύει:

$$2X - 5Y = \begin{bmatrix} 14 & -8 \\ 21 & 13 \end{bmatrix}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα x, y για τα οποία ισχύει:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+y & 3y \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} x^2-3x & x+y \\ -1 & y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Να βρείτε τους πίνακες X, Y για τους οποίους ισχύει:

$$3X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad 5X + 2Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Αν $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, να λύσετε την εξίσωση

$$3(X + B) = 2\left(\frac{1}{2}X + A\right) - 5B.$$

4. Μια βιομηχανία που κατασκευάζει τηλεοράσεις, βίντεο και κάμερες έχει δύο εργοστάσια παραγωγής Π_1 και Π_2. Το κόστος παραγωγής ανά συσκευή δίνεται (σε χιλιάδες δρχ.) στους παρακάτω πίνακες:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Τηλ.} & \text{Βιντ.} & \text{Καμ.} & \\ \Pi_1 = & \left[\begin{matrix} 30 \\ 25 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 28 \\ 32 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 40 \\ 36 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{matrix} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \text{Τηλ.} & \text{Βιντ.} & \text{Καμ.} & \\ \Pi_2 = & \left[\begin{matrix} 38 \\ 23 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 30 \\ 28 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 42 \\ 38 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{matrix} \end{array}.$$

Να βρείτε τον πίνακα $\frac{1}{2}(\Pi_1 + \Pi_2)$ και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

5. Μια βιομηχανία έχει τέσσερα εργοστάσια παραγωγής Π_1, Π_2, Π_3 και Π_4, καθένα από τα οποία παράγει δύο προϊόντα E_1 και E_2. Το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής σε μονάδες προϊόντων δίνεται στον επόμενο πίνακα:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{bmatrix} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \end{array} \end{array}.$$

i) Να βρείτε το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής, αν αυτή αυξηθεί κατά 10%.

ii) Να βρείτε το σύνολο της παραγωγής ανά προϊόν σε 5 μήνες, αν υποτεθεί ότι τα εργοστάσια δούλεψαν 2 μήνες με το προηγούμενο επίπεδο και 3 μήνες με το νέο επίπεδο παραγωγής (1 μήνας = 30 μέρες).

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός του γινομένου δύο πινάκων

Ας υποθέσουμε ότι για την κατασκευή δύο ειδών γλυκισμάτων Γ_1 και Γ_2 χρειαζόμαστε τα υλικά σε kg που φαίνονται στον παρακάτω 2×3 πίνακα:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Αλεύρι} & \text{Ζάχαρη} & \text{Βούτυρο} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1{,}4 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Gamma_1 \ \text{γλύκισμα} \\ \Gamma_2 \ \text{γλύκισμα} \end{array} \end{array}.$$

Έστω επίσης ότι το κόστος σε δρχ. των υλικών αυτών ανά κιλό, για τα έτη 1992 και 1993, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω 3×2 πίνακας:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1992 & 1993 \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 160 & 180 \\ 170 & 200 \\ 900 & 1200 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{αλεύρι} \\ \text{ζάχαρη} \\ \text{βούτυρο} \end{array} \end{array}$$

Για να βρούμε το κόστος σε δραχμές των υλικών του γλυκίσματος Γ_1, πολλαπλασιάζουμε τις ποσότητες των υλικών με τις αντίστοιχες τιμές και προσθέτουμε τα γινόμενα αυτά. Δηλαδή το κόστος του Γ_1 το 1992 ήταν

$$1{,}2\cdot160+0{,}6\cdot170+0{,}3\cdot900=564\,.$$

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη βοήθεια των πινάκων ως εξής:

$$[1{,}2 \quad 0{,}6 \quad 0{,}3]\begin{bmatrix}160\\170\\900\end{bmatrix} = [1{,}2\cdot 160 + 0{,}6\cdot 170 + 0{,}3\cdot 900] = [564].$$

Ο 1×1 πίνακας [564] λέγεται **γινόμενο** της πρώτης γραμμής του A επί την πρώτη στήλη του B. Αναλόγως, το κόστος του Γ_1 το 1993 ήταν

$$1{,}2\cdot 180 + 0{,}6\cdot 200 + 0{,}3\cdot 1200 = 696.$$

Δηλαδή παριστάνεται με το γινόμενο της πρώτης γραμμής του A επί την δεύτερη στήλη του B

$$[1{,}2 \quad 0{,}6 \quad 0{,}3]\begin{bmatrix}180\\200\\1200\end{bmatrix} = [696].$$

Ομοίως, το κόστος του Γ_2 το 1992 ήταν:

$$1{,}4\cdot 160 + 0{,}8\cdot 170 + 0{,}4\cdot 900 = 720 \quad ή$$

$$[1{,}4 \quad 0{,}8 \quad 0{,}4]\begin{bmatrix}160\\170\\900\end{bmatrix} = [720],$$

ενώ το 1993 ήταν:

$$1{,}4\cdot 180 + 0{,}8\cdot 200 + 0{,}4\cdot 1200 = 892 \quad ή$$

$$[1{,}4 \quad 0{,}8 \quad 0{,}4]\begin{bmatrix}180\\200\\1200\end{bmatrix} = [892].$$

Ο πίνακας $\Gamma = \begin{bmatrix}564 & 696\\720 & 892\end{bmatrix}$ δείχνει το κόστος των δύο γλυκισμάτων κατά τα έτη 1992 και 1993. Ο πίνακας Γ που προκύπτει με τον πιο πάνω τρόπο λέγεται **γινόμενο του πίνακα *A* με τον πίνακα *B*** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ή $\boldsymbol{AB}$, δηλαδή

$$\Gamma = \begin{bmatrix}1{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3\\1{,}4 & 0{,}8 & 0{,}4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}160 & 180\\170 & 200\\900 & 1200\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}564 & 696\\720 & 892\end{bmatrix}.$$

Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $A=[\alpha_{ik}]$ είναι ένας $\mu\times\nu$ πίνακας και $B=[\beta_{kj}]$ είναι ένας $\nu\times\rho$ πίνακας, τότε ορίζουμε ως **γινόμενο του πίνακα *A* με τον πίνακα *B*** και το συμβολίζουμε με $A\cdot B$ ή με AB τον $\mu\times\rho$ πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο γ_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των ν στοιχείων της i -γραμμής του A με τα αντίστοιχα ν στοιχεία της j -στήλης του B. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\cdots+\alpha_{i\nu}\beta_{\nu j}}$$

Σχηματικά

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ i-\text{γραμμή} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{i\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad j\text{-στήλη} \\ \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1\rho} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & \beta_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & & \beta_{\nu j} & & \beta_{\nu\rho} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1j} & \cdots & \gamma_{1\rho} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2j} & \cdots & \gamma_{2\rho} \\ \vdots & & & & & \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \cdots & \gamma_{ij} & \cdots & \gamma_{i\rho} \\ \vdots & & & & & \\ \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} & \cdots & \gamma_{\mu j} & \cdots & \gamma_{\mu\rho} \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα, το γινόμενο $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{array}{l} \gamma_{11}=2\cdot 4+1(-1)+(-3)\cdot 1=4, \\ \gamma_{21}=3\cdot 4+0(-1)+1\cdot 1=13 \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{l} \gamma_{12}=2\cdot 2+1\cdot 5+(-3)\cdot 0=9 \\ \gamma_{22}=3\cdot 2+0\cdot 5+1\cdot 0=6 \end{array}.$$

Επομένως,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}.$$

Τονίζεται ότι το γινόμενο AB ορίζεται όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα B.
Σχηματικά:

$$\begin{array}{ccccc} (A & , & B) & \to & AB \\ \mu\times\nu & & \nu\times\rho & & \mu\times\rho \end{array}$$

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ και $\Gamma=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

τότε, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ορίζονται τα γινόμενα $AB, BA, A\Gamma$ και είναι

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 4 & 8\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -2 & 9\\ 4 & 2 & 6\\ -6 & 3 & -1\end{bmatrix} \text{ και}$$

$$A\Gamma=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 13 & 5 & 8\\ -14 & 3 & -6 & 8\end{bmatrix},$$

ενώ δεν ορίζονται τα γινόμενα $B\Gamma, \Gamma B$ και ΓA.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των πινάκων

● Αν λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί και A, B είναι πίνακες, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες με την προϋπόθεση οτι ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται.

$$A(B\Gamma)=(AB)\Gamma \qquad \textit{προσεταιριστική}$$

$$A(B+\Gamma)=AB+A\Gamma \quad \text{και} \quad (B+\Gamma)A=BA+\Gamma A \qquad \textit{επιμεριστική}$$

$$(\lambda A)(\mu B)=(\lambda\mu)AB$$

● Αν με I_ν συμβολίσουμε τον $\nu\times\nu$ διαγώνιο πίνακα $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$ του οποίου κάθε στοιχείο της κυρίας διαγωνίου είναι ίσο με 1, τότε για κάθε τετραγωνικό $\nu\times\nu$ πίνακα A ισχύει:

$$\boxed{AI_\nu=I_\nu A=A}$$

Ο πίνακας αυτός λέγεται **μοναδιαίος πίνακας.**

Για παράδειγμα, οι πίνακες $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ είναι μοναδιαίοι.

Τον πίνακα I_ν θα τον συμβολίζουμε απλούστερα με I, όταν είναι προφανής ο τύπος του.
Αν τώρα A είναι ένας $\mu\times\nu$ πίνακας, τότε ισχύουν

$$\boldsymbol{AI_\nu=A} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{I_\mu A=A}.$$

Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}.$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να γράφουμε $AB\Gamma$ για καθένα από τα ίσα γινόμενα $A(B\Gamma)$, $(AB)\Gamma$. Ομοίως, αν A,B,Γ,Δ είναι πίνακες τέτοιοι, ώστε να ορίζονται τα γινόμενα AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ τότε έχουμε

$$[(AB)\Gamma]\Delta=(AB)(\Gamma\Delta)=A[B(\Gamma\Delta)]=A[(B\Gamma)\Delta]=[A(B\Gamma)]\Delta$$

και μπορούμε να γράφουμε $AB\Gamma\Delta$ για καθένα από τα γινόμενα αυτά.
Γενικά, επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, μπορεί να αποδειχτεί ότι όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό πινάκων $A_1,A_2,\ldots,A_\nu$ το γινόμενο θα είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί ο πολλαπλασιασμός, χωρίς όμως να αλλάξει η σειρά των παραγόντων και συμβολίζεται με $A_1A_2\ldots A_\nu$.
Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε ορίζονται τα γινόμενα AA, AAA, $AAAA$, κτλ. και τα συμβολίζουμε με μορφή δυνάμεων ως εξής: $A^2,A^3,A^4,\ldots$, αντιστοίχως. Ορίζουμε επίσης $A^1=A$.
Αν p, q είναι θετικοί ακέραιοι, και κ πραγματικός αριθμός, αποδεικνύεται ότι:

$$A^p\cdot A^q=A^{p+q},\quad (A^p)^q=A^{pq}\quad \text{και}\quad (\kappa A)^p=\kappa^pA^p.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Γνωρίζουμε ότι για τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών ισχύει, επιπλέον, και η αντιμεταθετική ιδιότητα. Δηλαδή, ισχύει $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ για οποιουσδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η ιδιότητα, όμως, αυτή **δεν** ισχύει για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, αφού υπάρχουν πίνακες A,B με $AB\neq BA$. Για παράδειγμα, αν $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, τότε $AB\neq BA$, αφού:

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 5 & 7\end{bmatrix},\quad \text{ενώ}\quad BA=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 8\\ -5 & -3\end{bmatrix}.$$

Επειδή, λοιπόν, δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα οι ισότητες:

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2,\qquad (A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3,$$

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B),\qquad A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)\ \text{ κτλ.}$$

δεν ισχύουν πάντοτε. Στην περίπτωση, όμως, που $AB=BA$ οι παραπάνω ισότητες ισχύουν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$ **και** $B=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1}\end{bmatrix}$. **Να αποδειχτεί ότι:**

i) $\boldsymbol{A^2=I}$, $\boldsymbol{B^2=-I}$ **και** $\boldsymbol{A^2+B^2=O}$

ii) $\boldsymbol{AB+BA=I}$

iii) $\boldsymbol{(A+B)^2\neq A^2+B^2+2AB}$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι $A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$

$$B^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I$$

Άρα $A^2+B^2=O$.

ii) Είναι $AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

Άρα $AB+BA=I$.

iii) Είναι

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=I+AB+BA-I$$

$$=AB+BA=I \qquad \text{(λόγω της ii))}$$

$$A^2+B^2+2AB=2AB=2\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix} \qquad \text{(λόγω της ii)).}$$

Άρα, $(A+B)^2\neq A^2+B^2+2AB$.

Αντιστρέψιμοι πίνακες

● Γνωρίζουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha\neq 0$ υπάρχει ο αντίστροφός του, που συμβολίζεται με $\dfrac{1}{\alpha}$ ή α^{-1}, για τον οποίο ισχύει $\alpha\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha=1$.

Είναι λογικό τώρα να ρωτήσουμε: "Αν δοθεί ένας πίνακας A μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα B τέτοιον ώστε να ισχύει $AB = BA = I$;"
Σύμφωνα με τον πολλαπλασιασμό που ορίσαμε μια τέτοια ερώτηση έχει νόημα μόνο αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας. Οδηγούμαστε έτσι στον εξής ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τύπου $\nu\times\nu$. Αν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας B τύπου $\nu\times\nu$, τέτοιος ώστε να ισχύει $AB = BA = I$, τότε ο A λέγεται **αντιστρέψιμος πίνακας** και ο B **αντίστροφος** του A.

Αν ένας πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε αποδεικνύεται ότι αυτός είναι μοναδικός και συμβολίζεται με A^{-1}. Έτσι έχουμε:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε έχουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{και} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Άρα, ο B είναι ο αντίστροφος του A.

● Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A, όταν $AB = I$ και $BA = I$. Αποδεικνύεται, όμως, ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν για δυο $\nu\times\nu$ πίνακες A, B ισχύει μια από τις ισότητες

$$AB = I \qquad \text{και} \qquad BA = I,$$

τότε θα ισχύει και η άλλη.

Με βάση αυτό το θεώρημα, για να αποδείξουμε ότι ένας $\nu\times\nu$ πίνακας B είναι αντίστροφος ενός $\nu\times\nu$ πίνακα A, αρκεί να αποδείξουμε μία μόνο από τις ισότητες $AB = I$ και $BA = I$.

● Τέλος, αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(i)} \;\; AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \\ \text{(ii)} \;\; XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1} \end{array}}$$

Πράγματι, για την (i) έχουμε:

— Αν $AX = B$, τότε $A^{-1}AX = A^{-1}B$, οπότε $X = A^{-1}B$.

— Αν $X = A^{-1}B$, τότε $AX = AA^{-1}B$, οπότε $AX = B$.
Ομοίως αποδεικνύεται και η (ii).

ΣΧΟΛΙΟ

Γνωρίζουμε ότι για τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών ισχύει επιπλέον και η ιδιότητα: "αν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$". Η ιδιότητα, όμως, αυτή **δεν ισχύει** για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, αφού π.χ. για τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ισχύει $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ χωρίς, ωστόσο, να είναι $A = \mathbf{O}$ ή $B = \mathbf{O}$. Δηλαδή:

"Μπορεί ένα γινόμενο πινάκων να ισούται με το μηδενικό πίνακα, χωρίς κανένας να είναι μηδενικός".

Στην περίπτωση όμως που ισχύει $AB = \mathbf{O}$ και ο ένας από τους πίνακες είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι μηδενικός. Πράγματι, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$AB = \mathbf{O}$$

$$A^{-1}AB = A^{-1}\mathbf{O}$$

$$IB = \mathbf{O}$$

$$B = \mathbf{O}.$$

Αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα

Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας. Θα εξετάσουμε πότε αυτός αντιστρέφεται και θα βρούμε τον αντίστροφό του.

Για να αντιστρέφεται ο A, πρέπει και αρκεί να υπάρχει πίνακας $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $AX = I$ ή, ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta \omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta z = 1 \\ \gamma x + \delta z = 0 \end{cases} \quad (\Sigma_1) \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \alpha y + \beta \omega = 0 \\ \gamma y + \delta \omega = 1 \end{cases} \quad (\Sigma_2)$$

Αρκεί, επομένως, τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) να έχουν λύση. Τα συστήματα αυτά έχουν

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$$

και

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & \beta\\ 0 & \delta\end{vmatrix}=\delta,\quad D_z=\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ \gamma & 0\end{vmatrix}=-\gamma,\quad D_y=\begin{vmatrix}0 & \beta\\ 1 & \delta\end{vmatrix}=-\beta,\quad D_\omega=\begin{vmatrix}\alpha & 0\\ \gamma & 1\end{vmatrix}=\alpha.$$

Επομένως:

● Αν $\boldsymbol{D\neq 0}$, τότε τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) έχουν μοναδική λύση, οπότε ο πίνακας A αντιστρέφεται. Η λύση του (Σ_1) είναι το ζεύγος (x,z) με

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\delta}{D}\quad \text{και}\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{-\gamma}{D},$$

ενώ η λύση του (Σ_2) είναι το ζεύγος (y,ω) με

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-\beta}{D}\quad \text{και}\quad \omega=\frac{D_\omega}{D}=\frac{\alpha}{D}.$$

Άρα $X=\begin{bmatrix}\dfrac{\delta}{D} & \dfrac{-\beta}{D}\\ \dfrac{-\gamma}{D} & \dfrac{\alpha}{D}\end{bmatrix}$, οπότε ο αντίστροφος του A είναι ο πίνακας

$$A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}.$$

● Αν $\boldsymbol{D=0}$, τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι αδύνατο, οπότε ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται. Πράγματι·

α) Αν $D_x\neq 0$ ή $D_y\neq 0$ ή $D_z\neq 0$ ή $D_\omega\neq 0$, τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) θα είναι αδύνατο.

β) Αν $D_x=D_y=D_z=D_\omega=0$, τότε $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, οπότε και πάλι τα δύο συστήματα θα είναι αδύνατα.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

● Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0$.

● Ο αντίστροφος ενός πίνακα $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$, αν υπάρχει, δίνεται από τον τύπο

$$\boldsymbol{A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}},\quad \text{όπου}\quad D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}.$$

Για παράδειγμα:

α) Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ αντιστρέφεται, γιατί $\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$ και ο αντίστροφός του είναι ο

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{bmatrix}.$$

β) Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ **δεν** αντιστρέφεται, γιατί $\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4}\end{bmatrix}$ **και** $B=\begin{bmatrix}\mathbf{11} & \mathbf{3}\\ \mathbf{22} & \mathbf{-1}\end{bmatrix}$

i) Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A

ii) Να λυθεί η εξίσωση $AX=B$

ΛΥΣΗ

i) Για τον πίνακα A έχουμε $D=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=11\neq 0$. Άρα

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix} \qquad (1)$$

ii) Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, έχουμε:

$$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B \overset{(1)}{\Leftrightarrow} X=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}11 & 3\\ 22 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα γινόμενα AB και BA σε όποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ορίζονται:

i) $A=[3\quad 2\quad 1]$, $B=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$ ii) $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$

iii) $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\0 & 4 & 2\\5 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\4 & 1 & -2\\0 & -1 & 3\end{bmatrix}$

iv) $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\-3 & -1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 1 & 2\\-4 & 7 & 1\end{bmatrix}$.

2. Αν $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ και $\Gamma=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

Να βρείτε τους πίνακες: i) AB ii) $AB-\Gamma$ iii) $AB\Gamma$.

3. Τα στοιχεία για τις αμοιβές και τον αριθμό των εργατών σε δύο οικοδομικές εταιρείες A και B έχουν με μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Αριθμός εργατών} & \\ & \text{Ειδικευμένοι} & \text{Ανειδίκευτοι} \\ A & \left[\begin{matrix}60\\30\end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix}75\\60\end{matrix}\right] \\ B & & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{Εβδομαδιαίες αποδοχές}} \\ \multicolumn{2}{c}{\text{(σε χιλ. δραχμές)}} \\ \text{Ειδικευμένοι} & \begin{bmatrix}50\\40\end{bmatrix}. \\ \text{Ανειδίκευτοι} & \end{array}$$

Να εκφράσετε με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού των πινάκων το σύνολο των αμοιβών των εργατών στις δύο εταιρείες.

4. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A.

i) $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$ ii) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\2 & 5 & -3\\-3 & 2 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}14 & -8 & -1\\-17 & 10 & 1\\-19 & 11 & 1\end{bmatrix}$

5. Να βρείτε τον αντίστροφο, εφόσον υπάρχει, καθενός από τους παρακάτω πίνακες:

$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$ και $\Gamma=\begin{bmatrix}\text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta\\\text{ημ}\theta & \text{συν}\theta\end{bmatrix}$.

6. i) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $\begin{bmatrix}\text{ημ}\alpha & -\text{συν}\alpha\\\text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha\end{bmatrix}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{bmatrix} ημα & -συνα \\ συνα & ημα \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} συνα & ημα \\ -ημα & -συνα \end{bmatrix}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, τότε:

i) Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $A^2 = xA + yI$.

ii) Να υπολογίσετε τους πίνακες A^3 και A^4.

2. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε να ισχύει

$$A^3 - 10A - xI = O.$$

3. Να βρείτε τους πίνακες $X = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $X^2 = I$.

4. Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, να αποδείξετε ότι:

i) $A^2 = I$, $B^2 = I$ ii) $(A-B)^2 = O$, $(A+B)^2 = 4I$.

iii) $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$

5. Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, να αποδείξετε ότι:

i) Ο πίνακας A αντιστρέφεται και να βρείτε τον A^{-1}.

ii) $(A + A^{-1})^\nu = 2^\nu I$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

6. Αν $A(x) = \begin{bmatrix} συνx & -ημx \\ ημx & συνx \end{bmatrix}$, $B(x) = \begin{bmatrix} ημx & συνx \\ -συνx & ημx \end{bmatrix}$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $A^2(x) = A(2x)$, $B^2(x) = -A(2x)$

ii) Να αποδείξετε ότι $A^2(x) + B^2(x) = O$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $A^2(x) - B^2(x) = 2I$.

7. Μια βιομηχανία επίπλων κουζίνας έχει δύο εργοστάσια E_1 και E_2. Οι πίνακες M και N δίνουν τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για την κατασκευή κάθε επίπλου και τις ωριαίες αμοιβές του προσωπικού σε δραχμές αντιστοίχως.

$$M=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{Κατασκευή} & \text{Βάψιμο} & \text{Συσκευασία}\end{array}\\ \begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}2\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}3\\ 1{,}5 & 1{,}2 & 0{,}4\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{Πάγκος}\\ \text{Καρέκλα}\\ \text{Τραπέζι}\end{array},\quad N=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}E_1 & E_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}1500 & 1550\\ 1600 & 1700\\ 1350 & 1400\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{Κατασκευή}\\ \text{Βάψιμο}\\ \text{Συσκευασία}\end{array}$$

i) Να βρείτε τον πίνακα MN και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

ii) Ποιο είναι το κόστος εργασίας για την παραγωγή μιας καρέκλας στο εργοστάσιο E_1 και ενός πάγκου στο εργοστάσιο E_2;

8. Αν $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix}$, να αποδείξετε ότι:

i) $A^3=\mathbb{O}$ και γενικά $A^\nu=\mathbb{O}$, $\nu\geq 3$

ii) $B^2=I$, $B^3=B$ και γενικά $B^\nu=\begin{cases}I & \text{αν } \nu \text{ άρτιος θετικός}\\ B & \text{αν } \nu \text{ περιττός θετικός}\end{cases}$.

9. Δίνεται ο πίνακας $A(x)=\dfrac{1}{\text{συν}x}\begin{bmatrix}1 & \text{ημ}x\\ \text{ημ}x & 1\end{bmatrix}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

i) Να αποδείξετε ότι $A^{-1}(x)=A(-x)$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=I$.

10. Αν $A(x)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

i) Να αποδείξετε ότι $A(x)A(y)=A(x+y)$

ii) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των x,y ώστε ο πίνακας $A(y)$ να είναι αντίστροφος του $A(x)$.

iii) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

11. Αν $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1+\lambda\\ 1-\lambda & -\lambda\end{bmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $A^2=I$, $A^3=A$ και γενικά ότι $A^\nu=\begin{cases}I, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ A, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$

ii) Αν $\lambda = 2$, να βρείτε τον πίνακα X για τον οποίο ισχύει $A^{1993}X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$I + A + A^2 + \cdots + A^{10}.$$

12. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

i) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα A

ii) Να βρείτε τον πίνακα X σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $AX = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ β) $AXA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ γ) $AX = A^2 + 2A$.

13. Αν $A = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $A^3 = -I$ και γενικά ότι $A^{3\nu} = \begin{cases} I, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -I, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$.

ii) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

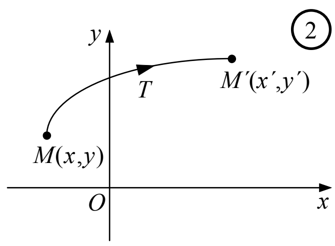
$$x^2A^{1992} + (x+2)A^{1989} = \mathbb{O}.$$

1.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Η Έννοια του Γεωμετρικού Μετασχηματισμού

● Γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ότι συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μοναδικό στοιχείο του B. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις για τις οποίες τα A και B συμπίπτουν με το σύνολο E των σημείων ενός καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο επίπεδο** ή, απλά, **γεωμετρικοί μετασχηματισμοί**. Δηλαδή, γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι οποιαδήποτε συνάρτηση

$$T:\mathsf{E} \to \mathsf{E}.$$



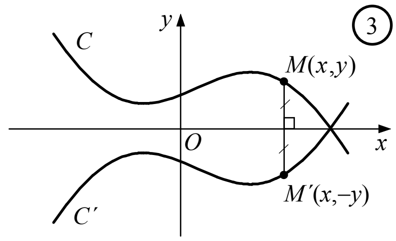
Ως προς τη συνάρτηση αυτή η εικόνα, $T(M)$, του σημείου $M(x,y)$ θα συμβολίζεται με $M'(x',y')$.

Ένα παράδειγμα γεωμετρικού μετασχηματισμού είναι η συνάρτηση

$$T: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$$

$$M(x,y) \to M'(x,-y),$$

η οποία αντιστοιχίζει κάθε σημείο M στο συμμετρικό του M' ως προς τον άξονα $x'x$.



● Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που απεικονίζουν τα σημεία $M(x,y)$ στα $M'(x',y')$ των οποίων οι συντεταγμένες δίνονται από ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \mu \\ y' = \gamma x + \delta y + \nu \end{cases}$$

ή, ισοδύναμα, από μια εξίσωση της μορφής

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix} \qquad (1)$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ πραγματικοί αριθμοί.
Αν $\mu = 0$ και $\nu = 0$, τότε η εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή

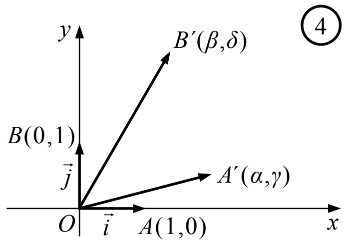
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Στην περίπτωση αυτή ο γεωμετρικός μετασχηματισμός λέγεται **γραμμικός μετασχηματισμός** και ο πίνακας $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ λέγεται **πίνακας** του γραμμικού μετασχηματισμού.
Για παράδειγμα, ο γεωμετρικός μετασχηματισμός που ορίζεται από το σύστημα $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$ ή, ισοδύναμα, από την εξίσωση $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα τον $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Με αυτόν τον μετασχηματισμό το σημείο $A(1,2)$ απεικονίζεται στο $A'(13,6)$, ενώ το σημείο $B(1,-2)$ στο $B'(1,-2)$, δηλαδή στον εαυτό του.

● Ας θεωρήσουμε τώρα το γραμμικό μετασχηματισμό

$$T:\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

και τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i} = (1,0)$ και $\vec{j} = (0,1)$. Τότε, η εικόνα A' του πέρατος $A(1,0)$ του διανύσματος $\vec{i}$ έχει συντεταγμένες (α,γ), αφού



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix},$$

ενώ η εικόνα B' του πέρατος $B(0,1)$ του διανύσματος $\vec{j}$ έχει συντεταγμένες (β,δ), αφού

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι:

Οι συντεταγμένες της εικόνας του πέρατος, $A(1,0)$, του διανύσματος $\vec{i} = (1,0)$ είναι η πρώτη στήλη, ενώ οι συντεταγμένες της εικόνας του πέρατος, $B(0,1)$, του διανύσματος $\vec{j}$ είναι η δεύτερη στήλη του πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού.

Για παράδειγμα, ο γραμμικός μετασχηματισμός, που απεικονίζει τα πέρατα $A(1,0)$ και $B(0,1)$ των διανυσμάτων $\vec{i} = (1,0)$ και $\vec{j} = (0,1)$ στα σημεία $A'(3,1)$ και $B'(1,2)$ αντιστοίχως, έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός**

$$\boldsymbol{T}:\begin{bmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

i) Να βρεθούν οι εικόνες $A'(x_1',y_1')$ και $B'(x_2',y_2')$ των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ αντιστοίχως.

ii) Να αποδειχτεί ότι $(A'B') = (AB)$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

Επομένως, οι εικόνες των $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι τα σημεία $A'(-y_1, x_1)$ και $B'(-y_2, x_2)$ αντιστοίχως.

ii) Είναι

$$(A'B') = \sqrt{(-y_2 + y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (AB).$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός διατηρεί τις αποστάσεις. Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί που διατηρούν τις αποστάσεις λέγονται **ισομετρίες**.

2. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$\boldsymbol{T}: \begin{bmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί:

i) Το πρότυπο του σημείου $A'(2,0)$, δηλαδή το σημείο $A(x, y)$ που απεικονίζεται στο $A'(2,0)$.

ii) Η εικόνα της ευθείας $\varepsilon: y = -2x + 1$.

ΛΥΣΗ

i) Ισχύει

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Επειδή ο πίνακας $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον αντίστροφό του, που είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα το σημείο A έχει συντεταγμένες $(2,-2)$.

ii) Αρκεί να βρούμε την εξίσωση η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των εικόνων των σημείων της ευθείας ε και μόνο απ' αυτές. Πράγματι, έχουμε:

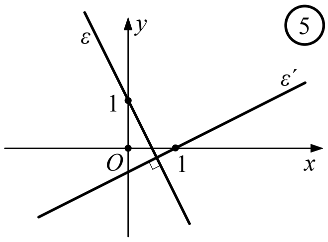
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' - 3y' \\ -x' + 4y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 3y' \\ y = -x' + 4y' \end{cases}. \qquad (1)$$

Επομένως, αν το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, τότε θα ισχύει:



$$y = -2x + 1$$
$$-x' + 4y' = -2x' + 6y' + 1$$
$$-2y' = -x' + 1$$
$$y' = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}$$

Άρα, το σημείο $M'(x',y')$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon'\colon y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Αλλά και *αντιστρόφως*, αν το σημείο $M'(x',y')$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon'\colon y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, τότε το $M(x,y)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon\colon y = -2x + 1$.

Συνεπώς, η εικόνα της ευθείας $\varepsilon\colon y = -2x + 1$ είναι η ευθεία $\varepsilon'\colon y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός, του οποίου ο πίνακας **αντιστρέφεται**, απεικονίζει:

— ευθείες σε ευθείες

— ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τις εικόνες των άκρων

— πολύγωνα σε πολύγωνα με κορυφές τις εικόνες των κορυφών.

Για παράδειγμα, με το μετασχηματισμό

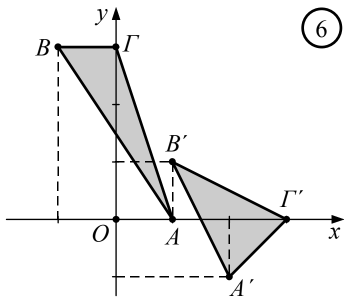
$$T:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,0)$, $B(-1,3)$ και $\Gamma(0,3)$ απεικονίζεται στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ που έχει ως κορυφές τις εικόνες $A'(2,-1)$, $B'(1,1)$ και $\Gamma'(3,0)$ των κορυφών του τριγώνου $AB\Gamma$.

Είναι βολικό, πολλές φορές, ένα πολύγωνο $A_1A_2...A_\nu$ να το παριστάνουμε με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_\nu\\y_1 & y_2 & \dots & y_\nu\end{bmatrix},$$

που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των κορυφών του. Τον πίνακα αυτόν θα τον λέμε **πίνακα του πολυγώνου**. Έτσι, ο πίνακας του $AB\Gamma$ είναι ο $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 3 & 3\end{bmatrix}$, ενώ του $A'B'\Gamma'$ ο $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Είναι φανερό ότι

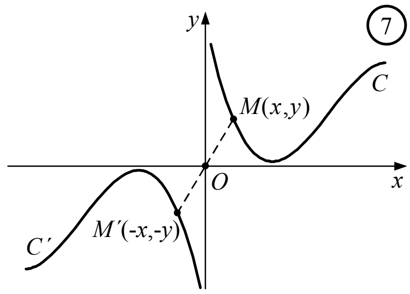


$$\begin{array}{ccc}A' & B' & \Gamma'\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc}A & B & \Gamma\end{array}$$
$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Άρα ο πίνακας του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού με τον πίνακα του τριγώνου $AB\Gamma$. Αυτό ισχύει και για οποιοδήποτε πολύγωνο.

Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

1. Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων



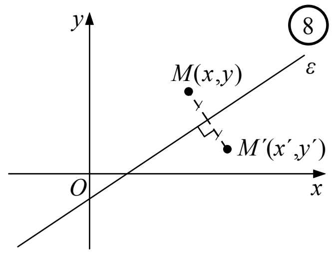
Καλούμε συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου απεικονίζεται στο συμμετρικό του $M'(x',y')$ ως προς την αρχή των αξόνων. Όπως γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ισχύει

$$\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-1x+0y\\y'=\ 0x-1y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

Άρα, η συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{bmatrix}=-\boldsymbol{I}$.

2. Συμμετρία ως προς άξονα μια ευθεία ε.

Καλούμε συμμετρία ως προς άξονα μια ευθεία *ε*, το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου απεικονίζεται στο συμμετρικό του, $M'(x',y')$, ως προς την ευθεία *ε*.

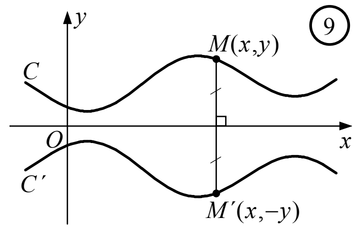


Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$, τη συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$ και τη συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$.

2α. Συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$.

΄Οπως γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ισχύει:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1x+0y \\ y'=0x-1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

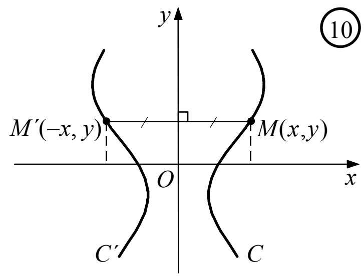


Άρα, η συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$.

2β. Συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$.

Όπως γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ισχύει:

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-1x+0y \\ y'=\ \ 0x+1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

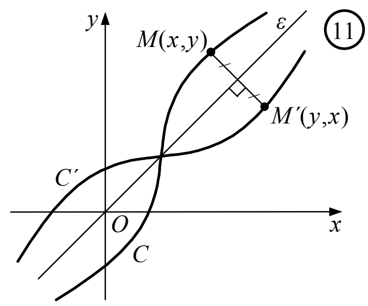


Άρα η συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$.

2γ. Συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία $y = x$.

Όπως γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ισχύει:

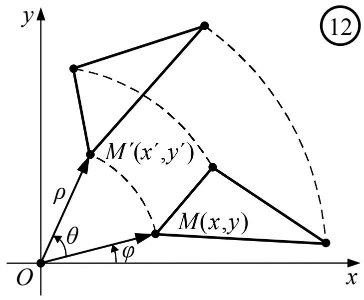
$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=0x+1y \\ y'=1x+0y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$



Άρα, η συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία $y=x$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Οι παραπάνω γραμμικοί μετασχηματισμοί είναι όλοι **ισομετρίες**.

3. Στροφή με κέντρο Ο και γωνία θ.



Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και θ μια θετική ή αρνητική γωνία. Καλούμε στροφή με κέντρο O και γωνία θ το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου αντιστοιχίζεται στο πέρας $M'(x',y')$, του διανύσματος $\overrightarrow{OM'}$ που είναι η τελική θέση του $\overrightarrow{OM}$, αν αυτό στραφεί γύρω από το O κατά γωνία θ. Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ με τον άξονα $x'x$ και ρ το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, τότε θα ισχύει:

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{συν}\varphi \\ y = \rho\,\text{ημ}\varphi \end{cases} \quad (1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} x' = \rho\,\text{συν}(\varphi+\theta) \\ y' = \rho\,\text{ημ}(\varphi+\theta) \end{cases} \quad (2).$$

Έτσι, θα ισχύει

$$\begin{cases} x' = \rho(\text{συν}\varphi\text{συν}\theta - \text{ημ}\varphi\text{ημ}\theta) \\ y' = \rho(\text{ημ}\varphi\text{συν}\theta + \text{συν}\varphi\text{ημ}\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (\rho\text{συν}\varphi)\text{συν}\theta - (\rho\text{ημ}\varphi)\text{ημ}\theta \\ y' = (\rho\text{ημ}\varphi)\text{συν}\theta + (\rho\text{συν}\varphi)\text{ημ}\theta \end{cases}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x' = x\text{συν}\theta - y\text{ημ}\theta \\ y' = x\text{ημ}\theta + y\text{συν}\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, η στροφή με κέντρο O και γωνία θ είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\text{συν}\theta} & \boldsymbol{-\text{ημ}\theta} \\ \boldsymbol{\text{ημ}\theta} & \boldsymbol{\text{συν}\theta} \end{bmatrix}$. Ειδικότερα:

α) Η στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$ έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

β) Η στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = \pi$ έχει πίνακα $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$

και είναι η συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) Η στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = \frac{3\pi}{2}$ έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

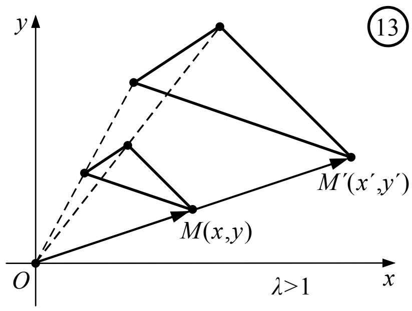
δ) Τέλος, η στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = 2\pi$ έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

και είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι και η στροφή είναι μια ισομετρία.

4. Ομοιοθεσία.

Καλούμε **ομοιοθεσία** με κέντρο την αρχή των αξόνων O και λόγο $\lambda \in \mathbb{R}^*$ το μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου αντιστοιχίζεται στο σημείο $M'(x', y')$ που ορίζεται από την ισότητα



$$\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM} .$$

Επειδή $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ και $\overrightarrow{OM'} = (x', y')$, έχουμε:

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow (x', y') = \lambda(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda x + 0y \\ y' = 0x + \lambda y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

Άρα,η ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο $\lambda \neq 0$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\lambda I}$.

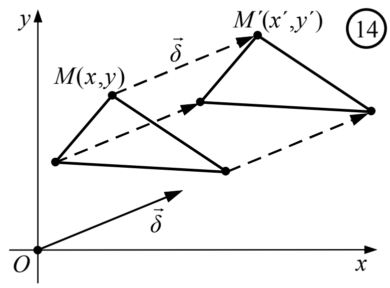
ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ

Για να θυμόμαστε τον πίνακα των παραπάνω γραμμικών μετασχηματισμών, αρκεί να θυμόμαστε ότι η πρώτη στήλη του είναι οι συντεταγμένες της εικόνας του σημείου $A(1, 0)$, ενώ η δεύτερη στήλη του είναι οι συντεταγμένες της εικόνας του $B(0,1)$. Για παράδειγμα, ο πίνακας της συμμετρίας ως προς τον άξονα $x'x$ είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ που έχει για πρώτη και δεύτερη στήλη τις συντεταγμένες των συμμετρικών ως προς τον άξονα $x'x$ των σημείων $A(1, 0)$ και $B(0,1)$ αντιστοίχως.

5. Παράλληλη μεταφορά.

Έστω $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Καλούμε παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$ το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου αντιστοιχίζεται στο σημείο $M'(x', y')$ που ορίζεται από την ισότητα $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}$ (Σχ. 14).

Επειδή $\overrightarrow{MM'} = (x'-x, y'-y)$, έχουμε



$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta} \Leftrightarrow (x'-x, y'-y) = (\delta_1, \delta_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=\delta_1 \\ y'-y=\delta_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+\delta_1 \\ y'=y+\delta_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Άρα, η παράλληλη μεταφορά **δεν** είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω T ο μετασχηματισμός “στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = -\frac{\pi}{4}$”. Να βρεθεί η εικόνα C' της καμπύλης $C: y = \frac{1}{x}$ ως προς το μετασχηματισμό T.

ΛΥΣΗ

Έστω $M(x, y)$ ένα σημείο του επιπέδου και $M'(x', y')$ η εικόνα του ως προς το μετασχηματισμό T. Τότε θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}\frac{\pi}{4} & \text{ημ}\frac{\pi}{4} \\ \text{-ημ}\frac{\pi}{4} & \text{συν}\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

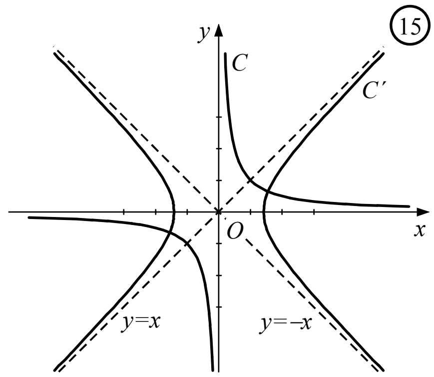
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}. \qquad (1)$$

Επομένως, αν το $M(x,y)$ ανήκει στην καμπύλη C, τότε θα ισχύει:

$$xy=1$$

$$\frac{1}{2}\left[(x')^2-(y')^2\right]=1$$

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2}=1,$$



οπότε το σημείο $M'(x',y')$ θα είναι σημείο της ισοσκελούς υπερβολής

$$C':\ \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1.$$

Αλλά και *αντιστρόφως*, αν το $M'(x',y')$ ανήκει στην καμπύλη C', τότε το $M(x,y)$ θα ανήκει στην C.

Άρα, η εικόνα της $C: y=\frac{1}{x}$, ως προς τη στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta=-\frac{\pi}{4}$, είναι η υπερβολή $C': \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$. Συνεπώς, η καμπύλη $C: y=\frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή που προκύπτει αν στρέψουμε την C' κατά γωνία $-\theta=\frac{\pi}{4}$.

2. Έστω T_1 και T_2 οι γραμμικοί μετασχηματισμοί με πίνακες

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A_2=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

αντιστοίχως. Να βρεθεί ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού που προκύπτει, αν εφαρμόσουμε πρώτα τον T_1 και έπειτα τον T_2, δηλαδή του μετασχηματισμού $T_2\circ T_1$.

ΛΥΣΗ

Έστω $M(x,y)$ ένα σημείο του επιπέδου. Αν $M'(x',y')$ είναι η εικόνα του M μέσω του μετασχηματισμού T_1 και $M''(x'',y'')$ η εικόνα του M' μέσω του μετασχηματισμού T_2, τότε θα ισχύει

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix},$$

οπότε θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, ο πίνακας του $T_2 \circ T_1$ είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ που είναι το γινόμενο $A_2 \cdot A_1$ των πινάκων των μετασχηματισμών T_2 και T_1. Γενικά:

“Αν A_1, A_2 είναι πίνακες δύο γραμμικών μετασχηματισμών, T_1 και T_2 αντιστοίχως, τότε ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού $T_2 \circ T_1$ είναι ο $A_2 \cdot A_1$, ενώ του $T_1 \circ T_2$ είναι ο $A_1 \cdot A_2$”.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τους πίνακες των γραμμικών μετασχηματισμών:

$$T_1 : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}, \qquad T_2 : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}, \qquad T_3 : \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$$

και να βρείτε τις εικόνες των σημείων $A(1,0)$ και $B(0,1)$.

2. Να βρείτε το γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα πέρατα $A(1,0)$ και $B(0,1)$ των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ στα σημεία (i) (1,2) και (−1,3) αντιστοίχως, (ii) (−1,1) και (2,1) αντιστοίχως.

3. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε τις εικόνες των σημείων $O(0,0)$ και $A(3,4)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι ο T δεν είναι ισομετρία.

4. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i) Να βρείτε την εικόνα $A'B'\Gamma'\Delta'$ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ που έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

ii) Να αποδείξετε ότι το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο.

5. Δίνεται ο μετασχηματισμός:

$$T:\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε

i) το πρότυπο του σημείου $A'(0,5)$

ii) την εικόνα της ευθείας $\varepsilon: y = x+1$.

6. Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι γραμμικοί μετασχηματισμοί που έχουν πίνακα:

i) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$, ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

iii) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, iv) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

v) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, vi) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T:\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i) Να αποδείξετε ότι ο T απεικονίζει όλα τα σημεία του επιπέδου στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x$.

ii) Να βρείτε τα πρότυπα του σημείου $O(0,0)$.

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A'(1,1)$ δεν έχει πρότυπο.

2. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T:\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

και δύο οποιαδήποτε σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι

i) Ο T δεν είναι ισομετρία, δηλαδή ότι $(A'B') \neq (AB)$.

ii) Ο T απεικονίζει το μέσο του ευθ. τμήματος AB στο μέσο της εικόνας του $A'B'$.

iii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με το εμβαδό της εικόνας του $O'A'B'$.

3. Να βρείτε το γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα σημεία $A(1,1)$ και $B(1,-1)$ στα σημεία:

i) $A'(0,1)$ και $B'(2,1)$ αντιστοίχως

ii) $A'(6,3)$ και $B'(3,1)$ αντιστοίχως.

Σε καθεμιά περίπτωση να βρείτε την εικόνα της ευθείας $\varepsilon: y=-2x$.

4. Να αποδείξετε ότι καθένας από τους παρακάτω γεωμετρικούς μετασχηματισμούς είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

i) Η συμμετρία ως προς την ευθεία $y=-x$.

ii) Η προβολή πάνω στον άξονα $x'x$.

iii) Η προβολή πάνω στον άξονα $y'y$.

iv) Η προβολή πάνω στην ευθεία $y=x$.

Στη συνέχεια να βρείτε σε καθεμία περίπτωση την εικόνα του τετραγώνου $OA\Gamma B$ με πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και να επιβεβαιώσετε γεωμετρικά την απάντησή σας.

5. Δίνεται ο μετασχηματισμός T με πίνακα $A=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, όπου $\alpha>\beta>0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του κύκλου $C: x^2+y^2=1$ είναι η έλλειψη $C': \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$

ii) Αφού βρείτε την εικόνα $O'A'\Gamma'B'$ του τετραγώνου $OA\Gamma B$, που έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, να δείξετε ότι $(O'A'\Gamma'B')=\alpha\beta\cdot(OA\Gamma B)$.

1.5 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

● Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_\nu x_\nu=\beta$, όπου $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ β είναι πραγματικοί αριθμοί και $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ άγνωστοι, λέγεται **γραμμική εξίσωση με ν αγνώστους**. Οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu$ λέγονται **συντελεστές των αγνώστων** και ο ***β*** **σταθερός όρος**.
Για παράδειγμα, η εξίσωση $x-3y=-3$ είναι μια γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους. Επίσης, η $x_1-\sqrt{2}x_2+x_3-5x_4=1$ είναι γραμμική εξίσωση με τέσσε-

ρις αγνώστους, ενώ οι εξισώσεις $2x^2 - y = 1$ και $2\sqrt{x} - 3y = 2$ δεν είναι γραμμικές.

Κάθε διατεταγμένη ν-άδα αριθμών $(s_1, s_2, ..., s_\nu)$ που επαληθεύει μια γραμμική εξίσωση με ν αγνώστους λέγεται **λύση της εξίσωσης**.

Για παράδειγμα, η διατεταγμένη τριάδα $(-1, 0, 2)$ είναι λύση της εξίσωσης $3x - 2y + \omega = -1$, αφού $3(-1) - 2 \cdot 0 + 2 = -3 + 2 = -1$.

● Ένα πλήθος μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους των οποίων ζητάμε τις κοινές λύσεις, λέγεται **γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους** ή απλούστερα **$\mu \times \nu$ γραμμικό σύστημα**.

Για παράδειγμα, το

$$\begin{cases} 2x - \ \ y + 3\omega = 1 \\ \ \ x + 3y - \ \ \omega = -2 \end{cases} \qquad (\Sigma_1)$$

είναι ένα 2×3 γραμμικό σύστημα.

Γενικά, ένα $\mu \times \nu$ γραμμικό σύστημα έχει τη μορφή

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = \beta_\mu \end{cases} \qquad (\Sigma_2)$$

Ο 1ος δείκτης i του συντελεστή α_{ij} δείχνει την εξίσωση στην οποία ανήκει ο α_{ij}, ενώ ο 2ος δείκτης j δείχνει τον άγνωστο με τον οποίο πολλαπλασιάζεται ο α_{ij}. Για παράδειγμα, ο α_{32} είναι ο συντελεστής του αγνώστου x_2 στην τρίτη εξίσωση ενός συστήματος.

Κάθε διατεταγμένη ν-άδα αριθμών η οποια επαληθεύει όλες τις εξισώσεις ενός $\mu \times \nu$ γραμμικού συστήματος, λέγεται **λύση** του συστήματος. Για παράδειγμα, η διατεταγμένη τριάδα $(-1, 0, 1)$ είναι λύση του συστήματος (Σ_1), αφού $2(-1) - 0 + 3 \cdot 1 = 1$ και $-1 + 3 \cdot 0 - 1 = -2$.

Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τις λύσεις ενός συστήματος λέγεται **επίλυση** του συστήματος.

Ένα σύστημα που έχει μια τουλάχιστον λύση λέγεται **συμβιβαστό**, ενώ ένα σύστημα που δεν έχει καμία λύση λέγεται **αδύνατο**.

Τέλος, δύο γραμμικά συστήματα που έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις λέγονται **ισοδύναμα**.

● Με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα (Σ_1) γράφεται

$$\begin{bmatrix} 2x - \ \ y + 3\omega \\ x + 3y - \ \ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Το 1ο μέλος όμως της ισότητας αυτής είναι το γινόμενο του 2×3 πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ των συντελεστών των αγνώστων με τον 3×1 πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix}$ των αγνώστων. Επομένως το σύστημα (Σ_1) γράφεται

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Γενικότερα, το $\mu\times\nu$ γραμμικό σύστημα (Σ_2) γράφεται

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}.$$

Αν τώρα συμβολίσουμε με A τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, με X τον πίνακα-στήλη των αγνώστων και με B τον πίνακα-στήλη των σταθερών όρων, τότε το (Σ_2) γράφεται $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

Αν οι σταθεροί όροι ενός γραμμικού συστήματος είναι όλοι ίσοι με το μηδέν, τότε το σύστημα λέγεται **ομογενές** και σύντομα γράφεται $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$.

Τέλος ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{cccc:c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{array}\right]$$

που αποτελείται από τον πίνακα A των συντελεστών των αγνώστων, συμπληρωμένο με τη στήλη των σταθερών όρων λέγεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο πίνακας αυτός παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση του συστήματος. Η κατακόρυφη διακεκομμένη γραμμή στον επαυξημένο πίνακα προστίθεται απλώς για να ξεχωρίζει τη στήλη των σταθερών όρων.

1.6 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΤΟΥ GAUSS

Αποδεικνύεται ότι, αν σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόσουμε μια από τις επόμενες διαδικασίες, τότε προκύπτει ισοδύναμο σύστημα:

— Εναλλαγή της θέσης δύο εξισώσεων

— Πολλαπλασιασμός των μελών μιας εξίσωσης με ένα μη μηδενικό αριθμό.

— Πρόσθεση των μελών μιας εξίσωσης (πολλαπλασιασμένων με έναν αριθμό) στα μέλη μιας άλλης.

Έτσι, όταν έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα προσπαθούμε, εφαρμόζοντας τις προηγούμενες διαδικασίες, να το μετασχηματίσουμε σε ένα άλλο ισοδύναμο σύστημα του οποίου η λύση να είναι προφανής.

Ας δούμε τώρα με ένα παράδειγμα πως εφαρμόζονται και πως συμβολίζονται οι τρεις αυτές διαδικασίες.

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 2x-y+5\omega=-3 \\ 3x+y+2\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_1)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της 1ης εξίσωσης E_1 του (Σ_1) με -2 και τα προσθέτουμε στα αντίστοιχα μέλη της 2ης εξίσωσης E_2 του (Σ_1). Έτσι, απαλείφεται από την E_2 ο άγνωστος x.

$$E_2 \to E_2-2E_1 \qquad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 3y+3\omega=-3 \\ 3x+y+2\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_2)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της E_1 του (Σ_2) με -3 και τα προσθέτουμε στα μέλη της E_3. Έτσι, απαλείφεται από την E_3 ο άγνωστος x.

$$E_3 \to E_3-3E_1 \qquad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 3y+3\omega=-3 \\ 7y-\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_3)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της E_2 του (Σ_3) με $\frac{1}{3}$. Έτσι, ο συντεστής του y γίνεται 1.

$$E_2 \to \frac{1}{3}E_2 \qquad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ y+\omega=-1 \\ 7y-\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_4)$$

Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας τις παραπάνω διαδικασίες που παριστάνουμε πλέον μόνο συμβολικά:

$$E_3 \to E_3-7E_2 \qquad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ y+\omega=-1 \\ -8\omega=8 \end{cases} \quad (\Sigma_5)$$

$$E_3 \to -\frac{1}{8}E_3 \qquad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ y+\omega=-1 \\ \omega=-1 \end{cases} \quad (\Sigma_6)$$

$$E_2 \to E_2 - E_3 \qquad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases} \quad (\Sigma_7)$$

$$E_1 \to E_1 - E_3 \qquad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases} \quad (\Sigma_8)$$

$$E_1 \to E_1 + 2E_2 \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases} \quad (\Sigma_9)$$

Επειδή το σύστημα (Σ_9) είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα (Σ_1), συμπεραίνουμε ότι η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(1, 0, -1)$.

Μπορούμε να περιγράψουμε απλούστερα τη διαδικασία επίλυσης ενός $\mu \times \nu$ γραμμικού συστήματος, αν σκεφτούμε ως εξής: Αφού κάθε εξίσωση παριστάνεται με μια γραμμή του επαυξημένου πίνακα, αρκεί οι παραπάνω μετατροπές των εξισώσεων να γίνονται στις γραμμές $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_\mu$ του επαυξημένου πίνακα. Οι μετατροπές αυτές λέγονται **γραμμοπράξεις** και είναι οι εξής:

Γραμμοπράξη	**Συμβολισμός**
1. Εναλλαγή της θέσης δύο γραμμών	$\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$
2. Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με ένα μη μηδενικό αριθμό	$\Gamma_i \to \lambda\Gamma_i, \ \lambda \neq 0$
3. Πρόσθεση των στοιχείων μιας γραμμής, πολλαπλασιασμένων με έναν αριθμό, στα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής.	$\Gamma_i \to \Gamma_i + \lambda\Gamma_j$

Όταν έχουμε δύο πίνακες A, B που ο ένας προκύπτει από τον άλλο με γραμμοπράξεις, τότε οι πίνακες αυτοί λέγονται **γραμμοϊσοδύναμοι** ή απλώς **ισοδύναμοι** και γράφουμε $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. Είναι προφανές ότι, αν οι επαυξημένοι πίνακες δύο συστημάτων είναι ισοδύναμοι, τότε και τα συστήματα είναι ισοδύναμα, αφού καθεμιά γραμμοπράξη ξεχωριστά οδηγεί σε σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό.

Έτσι, η επίλυση του προηγούμενου συστήματος μπορεί να γίνει ως εξής:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 7\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right] \overset{\Gamma_3 \to -\frac{1}{8}\Gamma_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 2\Gamma_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα $\begin{cases} x \qquad = 1 \\ \quad y \quad = 0 \\ \qquad \omega = -1 \end{cases}$.

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(1,\ 0,\ -1)$.

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας. Έτσι μπορούμε να “διαβάσουμε” αμέσως τη λύση του συστήματος.

Για να απλοποιήσουμε και να συντομεύσουμε ακόμη περισσότερο τη διαδικασία επίλυσης ενός συστήματος, πολλές φορές στο ίδιο βήμα εφαρμόζουμε περισσότερες από μία γραμμοπράξεις.

Ας λύσουμε τώρα και το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}.$$

Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα και έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \end{array}\right] \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -9 & -14 \end{array}\right] \overset{\Gamma_2 \to \frac{1}{2}\Gamma_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -9 & -14 \end{array}\right] \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 4\Gamma_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \overset{\Gamma_3 \to -\Gamma_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3 \\ \Gamma_1 \to \Gamma_1 - 6\Gamma_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 5\Gamma_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 3 \\ \qquad\qquad x_4 & = -1 \\ \qquad\qquad\quad x_5 & = 2 \end{cases}.$$

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς έναν άγνωστο, π.χ. ως προς x_1 (αυτό μας διευκολύνει, αφού ο συντελεστής του αγνώστου αυτού είναι 1) και έχουμε

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 + x_3 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 2 \end{cases}.$$

Επειδή ο άγνωστος x_1 εκφράζεται ως συνάρτηση των x_2, x_3, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε αυθαιρέτως τις τιμές των x_2, x_3. Δηλαδή, το γραμμικό σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, τις διατεταγμένες πεντάδες $(3 - 2x_2 + x_3, x_2, x_3, -1, 2)$, όπου οι x_2, x_3 μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε πραγματικές τιμές.

Π.χ. για $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ έχουμε τη λύση $(1, 1, 0, -1, 2)$ του συστήματος.

Ο τελευταίος από τους παραπάνω ισοδύναμους επαυξημένους πίνακες είναι, όπως λέμε, ένας **ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας**. Γενικά, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας $\mu \times \nu$ πίνακας λέγεται **ανηγμένος κλιμακωτός**[1] , αν ισχύουν συγχρόνως τα παρακάτω:

α) Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές.

β) Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1 και βρίσκεται δεξιότερα του αντίστοιχου 1 της προηγούμενης γραμμής.

γ) Το πρώτο από αριστερά 1 κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Έτσι π.χ. οι πίνακες

---

[1] Ένας $\mu \times \nu$ πίνακας λέγεται, απλώς, **κλιμακωτός**, αν

α) Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές και

β) Το πρώτο από τα αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το αντίστοιχο στοιχείο της προηγούμενης γραμμής, χωρίς να είναι κατανάγκη ίσο με 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί, ενώ οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

Σχετικά με τους ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε πίνακας μετατρέπεται σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα με την εκτέλεση ενός πεπερασμένου πλήθους γραμμοπράξεων.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτός ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι και μοναδικός.
Ο παρακάτω αλγόριθμος μας δίνει μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να βρίσκουμε κάθε φορά το μοναδικό αυτόν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1ο: Βρίσκουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.

ΒΗΜΑ 2ο: Μεταφέρουμε στον πίνακα πρώτη τη γραμμή που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο της στήλης (γραμμοπράξη 1).

ΒΗΜΑ 3ο: Κάνουμε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης μονάδα (γραμμοπράξη 2).

ΒΗΜΑ 4ο: Κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που είναι κάτω από τη μονάδα μηδενικά (γραμμοπράξη 3).

ΒΗΜΑ 5ο: Αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 4 για τις επόμενες γραμμές του πίνακα. Αν όμως οι γραμμές που απέμειναν είναι μηδενικές, πηγαίνουμε στο 6ο βήμα.

ΒΗΜΑ 6ο: Από γραμμή σε γραμμή χρησιμοποιώντας το πρώτο από αριστερά 1 κάθε γραμμής και τη γραμμοπράξη 3 κάνουμε μηδέν όλα τα στοιχεία της στήλης στην οποία βρίσκεται η μονάδα αυτή.

Ο παραπάνω αλγόριθμος, που ονομάζεται και **αλγόριθμος του Gauss**, ολοκληρώνεται όταν σε κάθε μη μηδενική γραμμή του πίνακα το πρώτο από αριστερά 1 είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.
Έτσι για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με τον αλγόριθμο του Gauss, μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακά του σε έναν ισοδύναμο ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.
Για παράδειγμα, ας λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = -4 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}.$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

και έχουμε διαδοχικά:

$\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3$ (βήμα 2ο)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1$
$\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_1$ (βήμα 4ο)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

Αγνοούμε την 1η γραμμή (βήμα 5ο)
$\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3$ (βήμα 2ο)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right]$$

($\Gamma_2 \to \frac{1}{7}\Gamma_2$ βήμα 3ο)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right]$$

$\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 7\Gamma_2$ (βήμα 4ο)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Αγνοούμε τη 2η γραμμή (βήμα 5ο)
$\Gamma_3 \to -\Gamma_3$ (βήμα 3ο)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3$
$\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 3\Gamma_3$ (βήμα 6ο)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2$ (βήμα 6ο)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός και αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 1 \\ \quad x_3 - x_4 & = -1 \\ \quad\quad x_5 & = 1 \end{cases}$$

που είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_3 = -1 + x_4 \\ x_5 = 1 \end{cases}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$$(1 + x_2, x_2, -1 + x_4, x_4, 1), \qquad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

- Ας λύσουμε τώρα και το σύστημα: $\begin{cases} x + 2y - 3z + \omega = 1 \\ 2x - y + 2z - \omega = 1 \\ 4x + 3y - 4z + \omega = 2 \end{cases}.$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 4 & 3 & -4 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \vdots & \frac{1}{5} \\ 0 & -5 & 8 & -3 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 5\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \vdots & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Από την 3η γραμμή του τελευταίου πίνακα έχουμε ότι $0x+0y+0z+0\omega=-1$ ή $0=-1$, που σημαίνει ότι το σύστημα είναι αδύνατο. Γενικά,

Αν κατά την επίλυση ενός συστήματος με τη βοήθεια του επαυξημένου πίνακα παρουσιαστεί μια γραμμή της μορφής $0\;0\ldots0\,|\,\alpha$, με $\alpha\neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

ΣΧΟΛΙΟ

Από τα συστήματα που λύσαμε μέχρι τώρα, παρατηρούμε ότι, όσα από αυτά είναι συμβιβαστά, ή έχουν μία μοναδική λύση ή έχουν άπειρο πλήθος λύσεων. Δηλαδή, δεν εμφανίστηκε σύστημα που να έχει περισσότερες από μία αλλά πεπερασμένου πλήθους λύσεις. Αποδεικνύεται ότι αυτό ισχύει γενικά για τα γραμμικά συστήματα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases}\kappa x+y=1\\ x+\kappa y=1, \quad \kappa\in\mathbb{R}.\\ x+y=1\end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{cc|c}\kappa & 1 & 1\\ 1 & \kappa & 1\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_1\to\Gamma_3} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 1 & \kappa & 1\\ \kappa & 1 & 1\end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2\to-\Gamma_2-\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 0 & \kappa-1 & 0\\ 0 & 1-\kappa & 1-\kappa\end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 0 & \kappa-1 & 0\\ 0 & 0 & 1-\kappa\end{array}\right].$$

- Αν $\kappa\neq 1$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $\kappa=1$, τότε ο τελευταίος πίνακας γράφεται $\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$.

Επομένως, το σύστημα ισοδυναμεί με την εξίσωση

$$x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$$

και έτσι έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $(x,1-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} 2x-3y+5\omega = 1 \\ x-2y+\omega=-2 \end{cases}$ και ii) $\begin{cases} x+y = 2 \\ 3x-2y+6\omega=12 \\ y+3\omega = 6 \end{cases}$

στη μορφή $AX=B$, όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, X ο πίνακας των αγνώστων και B ο πίνακας των σταθερών όρων.

2. Να γράψετε τα γραμμικά συστήματα που περιγράφουν οι ισότητες:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Στη συνέχεια να γράψετε τους επαυξημένους πίνακες των συστημάτων αυτών.

3. Να λύσετε τα συστήματα που αντιστοιχούν στους ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες:

i) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ ii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$

iii) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

4. Με τον αλγόριθμο του Gauss να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 4x-y+3z=1 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y+z=-3 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$.

5. Ομοίως τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+y+z+2\omega=2 \\ 2x-y-z+\omega=1 \\ x+2y+2z-\omega=3 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-y+2z-\omega=1 \\ x-2y+z+\omega=-1 \\ -2x+3y-3z=0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2x-y+3z-\omega=0 \\ x+y-2z+\omega=2 \\ 3x+z=0 \end{cases}$

6. Ομοίως τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-4y=4 \\ x-6y=-1 \\ 3x+14x=13 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x-2y=1 \\ x-10y+4z=1 \end{cases}$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα α, β, γ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma\omega=0 \\ \alpha x+2y-\gamma\omega=1 \\ 3x-\beta y+\gamma\omega=3 \end{cases}$ να έχει ως λύση την $(x,y,\omega)=(1,-1,1)$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, που διέρχεται από τα σημεία $(1,0)$, $(2,0)$ και $(-1,6)$.

3. Αν $0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$ και $\begin{cases} 2\eta\mu\alpha+4\sigma\upsilon\nu\beta-\varepsilon\varphi\gamma=2 \\ 4\eta\mu\alpha-2\sigma\upsilon\nu\beta+\varepsilon\varphi\gamma=3\sqrt{3}-1 \\ 2\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta-\varepsilon\varphi\gamma=\frac{1}{2} \end{cases}$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

4. Αν $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ και $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix}$, να λύσετε το γραμμικό σύστημα

$$AX = 4X\,.$$

5. Αν $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$, να βρείτε ολους τους πίνακες X για τους οποίους ι-σχύει:

$$AX = XA\,.$$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+y+\omega=1\\ x+2y+4\omega=\alpha\\ x+4y+10\omega=\alpha^2\end{cases}$ ii) $\begin{cases} x+y+\omega=6\\ x+2y+3\omega=10\\ x+2y+\lambda\omega=\mu\end{cases}$ iii) $\begin{cases} x+y=1\\ x+\kappa y=\kappa\\ 2x+(\kappa+1)y=3\end{cases}$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

1.7 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Εισαγωγή

Στην προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να βρίσκουμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος.
Όμως, όπως έχουμε δει στα γραμμικά συστήματα με δύο αγνώστους, είναι χρήσιμο να έχουμε και έναν τύπο, ο οποίος να εκφράζει τις λύσεις ενός γραμμικού συστήματος ως συνάρτηση των συντελεστών του.
Οι τύποι που θα βρούμε γενικεύουν τους τύπους που ήδη ξέρουμε για την περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος 2×2.
Θα προχωρήσουμε στην αναζήτηση ενός τέτοιου τύπου που τα εργαλεία για την ανεύρεσή του είναι οι **ορίζουσες**.

Ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα

Έστω ο 2×2 πίνακας $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}$.

Ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}}$ λέγεται **ορίζουσα του πίνακα *A*** και συμβολίζεται με $|A|$ ή με $\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}$. Δηλαδή,

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}}\\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}}\end{vmatrix}=\boldsymbol{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}}\,.$$

Επειδή η ορίζουσα αυτή αντιστοιχεί σε έναν 2×2 πίνακα, λέγεται **ορίζουσα 2ης τάξης**.
Για παράδειγμα, η ορίζουσα

— του πίνακα $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ είναι $|A|=3(-2)-(-1)2=-6+2=-4$

— του πίνακα $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ είναι $|I|=1-0=1$

— του πίνακα $\mathbf{O}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ είναι $|\mathbf{O}|=0$.

Ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα

Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ορίζεται με την βοήθεια της ορίζουσας 2ης τάξης ως εξής:

Έστω ο 3×3 πίνακας $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$.

Ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha_{11}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_{22}} & \boldsymbol{\alpha_{23}}\\ \boldsymbol{\alpha_{32}} & \boldsymbol{\alpha_{33}}\end{vmatrix}-\boldsymbol{\alpha_{12}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{23}}\\ \boldsymbol{\alpha_{31}} & \boldsymbol{\alpha_{33}}\end{vmatrix}+\boldsymbol{\alpha_{13}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}}\\ \boldsymbol{\alpha_{31}} & \boldsymbol{\alpha_{32}}\end{vmatrix}$ λέγεται **ορίζουσα του πίνακα $\boldsymbol{A}$** και συμβολίζεται με $|\boldsymbol{A}|$ ή με $\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}} & \boldsymbol{\alpha_{13}}\\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & \boldsymbol{\alpha_{23}}\\ \boldsymbol{\alpha_{31}} & \boldsymbol{\alpha_{32}} & \boldsymbol{\alpha_{33}}\end{vmatrix}$.

Δηλαδή

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}-\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Επειδή η ορίζουσα αυτή αντιστοιχεί σε έναν 3×3 πίνακα, λέγεται **ορίζουσα 3ης τάξης**.

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$, τότε

$$|A|=2\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2(-6)+1(-3)+5(-1)=-20$$

Η παράσταση (1) με την οποία ορίζεται η $|A|$ λέγεται **ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής**.

Με εκτέλεση των πράξεων στο ανάπτυγμα αυτό έχουμε:

$$\begin{aligned}|A|&=\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{32}\alpha_{23})-\alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{31}\alpha_{23})+\alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{31}\alpha_{22})\\ &=-\alpha_{21}(\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{32}\alpha_{13})+\alpha_{22}(\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31})-\alpha_{23}(\alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{31})\end{aligned}$$

$$= -\alpha_{21}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix} + \alpha_{22}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix} - \alpha_{23}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix} \quad (2)$$

Η παράσταση (2) λέγεται **ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής.**

Ομοίως, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει και

$$|A| = \alpha_{31}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{vmatrix} - \alpha_{32}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{23}\end{vmatrix} + \alpha_{33}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}, \quad (3)$$

που λέγεται **ανάπτυγμα $|A|$ ως προς τα στοιχεία της τρίτης γραμμής.**

Παρατηρούμε ότι σε καθένα από τα αναπτύγματα της $|A|$, κάθε στοιχείο α_{ij} της αντίστοιχης γραμμής πολλαπλασιάζεται με την ορίζουσα 2ης τάξης του πίνακα που προκύπτει από τον A, αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου α_{ij}. Η ορίζουσα αυτή λέγεται **ελλάσων ορίζουσα του στοιχείου $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{M_{ij}}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε όρος ενός αναπτύγματος της $|A|$ έχει πρόσημο + ή −, ίδιο με το πρόσημο του $(-1)^{i+j}$. Το γινόμενο $\boldsymbol{(-1)^{i+j}M_{ij}}$ λέγεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{A_{ij}}$.

Δηλαδή

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Με τους συμβολισμούς αυτούς τα αναπτύγματα (1), (2) και (3) γράφονται:

$$|A| = \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{12}A_{12} + \alpha_{13}A_{13}$$

$$|A| = \alpha_{21}A_{21} + \alpha_{22}A_{22} + \alpha_{23}A_{23}$$

$$|A| = \alpha_{31}A_{31} + \alpha_{32}A_{32} + \alpha_{33}A_{33}.$$

Με εκτέλεση των πράξεων προκύπτουν

$$|A| = \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{21}A_{21} + \alpha_{31}A_{31}$$

$$|A| = \alpha_{12}A_{12} + \alpha_{22}A_{22} + \alpha_{32}A_{32}$$

$$|A| = \alpha_{13}A_{13} + \alpha_{23}A_{23} + \alpha_{33}A_{33}$$

που είναι ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της 1ης, της 2ης και της 3ης στήλης αντιστοίχως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην πράξη το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας είναι ως προς τη γραμμή ή στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά.

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, τότε

$$|A|=0\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-(3-4)=1\,.$$

Ορίζουσα ενός $\nu\times\nu$ πίνακα

Ορίσαμε μέχρι τώρα την ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα και με τη βοήθειά της την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα.

Ορίζουμε επίσης ως ορίζουσα ενός πίνακα με ένα στοιχείο $[\alpha_{11}]$, να είναι το ίδιο το στοιχείο.

Γενικά, μπορούμε να ορίσουμε την ορίζουσα ν τάξης $\nu\geq3$ με τη βοήθεια του ορισμού της ορίζουσας $\nu-1$ τάξης. Ένας τέτοιος ορισμός λέγεται ***ε π α γ ω γ ι κ ό ς***.

Συγκεκριμένα, έστω ο $\nu\times\nu$ πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix}.$$

Ονομάζουμε ορίζουσα του πίνακα A και τη συμβολίζουμε με $|A|$ ή

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{vmatrix}$$

τον αριθμό

$$\boxed{|A|=\alpha_{11}A_{11}+\alpha_{12}A_{12}+\cdots+\alpha_{1\nu}A_{1\nu}}$$

όπου $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ και M_{ij}, η $(\nu-1)$ τάξης ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον A, αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου α_{ij}.

Όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξης, η ορίζουσα M_{ij} λέγεται **ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου α_{ij}** και το γινόμενο $(-1)^{i+j}M_{ij}$ λέγεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij}.**

Η παράσταση $\alpha_{11}A_{11}+\alpha_{12}A_{12}+\cdots+\alpha_{1\nu}A_{1\nu}$ με την οποία ορίσαμε την $|A|$ λέγεται, όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξης, **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής**.

Αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Για οποιαδήποτε γραμμή i ή στήλη j ενός $\nu\times\nu$ πίνακα A ισχύει:

(α) $|A| = \alpha_{i1}A_{i1} + \alpha_{i2}A_{i2} + \cdots + \alpha_{i\nu}A_{i\nu}$ και

(β) $|A| = \alpha_{1j}A_{1j} + \alpha_{2j}A_{2j} + \cdots + \alpha_{\nu j}A_{\nu j}$

Η παράσταση (α) λέγεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας** ως προς τα στοιχεία της i γραμμής, ενώ η (β) **ανάπτυγμα της ορίζουσας** ως προς τα στοιχεία της j στήλης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Είναι φανερό ότι αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης ενός πίνακα A είναι όλα μηδέν, τότε $|A| = 0$.
2) Αν ένας πίνακας είναι τριγωνικός άνω ή κάτω, τότε αποδεικνύεται ότι η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου. Για παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ln 3 \\ 0 & -3 & \kappa^5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1(-3)\frac{1}{3} = -1\,.$$

3) Αποδεικνύεται επίσης ότι, αν δύο γραμμές (δύο στήλες) ενός πίνακα είναι ίσες ή ανάλογες, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.
   Για παράδειγμα,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 10 & 12 & 15 \end{vmatrix} = 0\,,$$

   αφού $\Gamma_2 = 3\Gamma_1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της 2ης στήλης της ορίζουσας των πινάκων

i) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$ **ii)** $B=\begin{bmatrix}4\eta\mu^2\alpha & 0 & -\sigma\upsilon\nu 2\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha & 0 & \sigma\upsilon\nu^2\alpha\end{bmatrix}$

και στη συνέχεια να υπολογισθούν οι $|A|$, $|B|$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(-2-6)=8$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1+3=4$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-(2-2)=0\,.$$

Επομένως, $|A|=2A_{12}+0A_{22}+1A_{32}=2\cdot 8+0\cdot 4+1\cdot 0=16$.

ii) Έχουμε

$$B_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 0\\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha & \sigma\upsilon\nu^2\alpha\end{vmatrix}=0$$

$$B_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4\eta\mu^2\alpha & -\sigma\upsilon\nu 2\alpha\\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha & \sigma\upsilon\nu^2\alpha\end{vmatrix}=4\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha$$

$$=(2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)^2+\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha=\eta\mu^2 2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha=1$$

$$B_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4\eta\mu^2\alpha & -\sigma\upsilon\nu 2\alpha\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

Επομένως

$$|B|=0\cdot B_{12}+1B_{22}+0\cdot B_{32}=1\,.$$

Επίλυση $\nu\times\nu$ γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο του Cramer

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, ένα γραμμικό $\mu\times\nu$ σύστημα μπορεί να έχει μοναδική λύση ή άπειρο πλήθος λύσεων ή να είναι αδύνατο. Στην ειδική περίπτωση που το σύστημα είναι $\nu\times\nu$, το επόμενο θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μας πληροφορεί πότε το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση και πότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων ή είναι αδύνατο.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω το $\nu\times\nu$ γραμμικό σύστημα $AX=B$.

- Αν $|A| \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ με
$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}, x_2 = \frac{Dx_2}{D}, ..., x_\nu = \frac{Dx_\nu}{D}$$
όπου D είναι η ορίζουσα $|A|$ των συντελεστών των αγνώστων και Dx_i, $i = 1, 2, 3, ..., \nu$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την D αν αντικαταστήσουμε την i στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_i με τη στήλη των σταθερών όρων.
- Αν $|A| = 0$, τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το ομογενές σύστημα $AX = \mathbf{0}$,
- έχει μόνο τη μηδενική λύση, αν και μόνο αν $|A| \neq 0$.
- έχει και μη μηδενικές λύσεις (άπειρο πλήθος), αν και μόνο αν $|A| = 0$.

ΣΧΟΛΙΑ

1) Ένα $\nu \times \nu$ γραμμικό σύστημα $AX = B$ με $|A| \neq 0$, λέγεται και **σύστημα Cramer**, η δε επίλυση του συστήματος αυτού αναφέρεται και ως **κανόνας του Cramer**. Ο κανόνας του Cramer δεν είναι αποδοτική μέθοδος για να χρησιμοποιηθεί στη λύση συστημάτων με ένα μεγάλο αριθμό εξισώσεων, γιατί πρέπει να υπολογιστούν πολλές ορίζουσες μεγάλης τάξης. Γιαυτό στη συνέχεια με τον κανόνα αυτόν θα επιλύουμε μόνο $\mathbf{2 \times 2}$ και $\mathbf{3 \times 3}$ γραμμικά συστήματα.
Ως προς τους αριθμητικούς υπολογισμούς η μέθοδος επίλυσης συστήματος με τον αλγόριθμο του Gauss υπερτερεί του κανόνα του Cramer. Όμως, ο κανόνας του Cramer είναι ιδιαίτερα χρήσιμος σε θεωρητικά ζητήματα.

2) Για την επίλυση ενός $\nu \times \nu$ γραμμικού συστήματος $AX = B$ με $|A| = 0$ εργαζόμαστε συνήθως με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

3) Αν ένα $\nu \times \nu$ γραμμικό σύστημα είναι ομογενές, τότε $Dx_1 = Dx_2 = ... = Dx_\nu = 0$, αφού όλες οι ορίζουσες έχουν μια μηδενική στήλη.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \boldsymbol{x} & & \boldsymbol{-\omega} & = & \mathbf{1} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{+y} & \boldsymbol{-\omega} & = & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{+2y} & \boldsymbol{+5\omega} & = & \mathbf{2} \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}=4\neq 0$, $\quad Dx=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 5\end{vmatrix}=7$

$$Dy=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}=-7 \quad \text{και} \quad D\omega=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=3.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, είναι

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{7}{4},\quad y=\frac{Dx}{D}=-\frac{7}{4},\quad \omega=\frac{D\omega}{D}=\frac{3}{4}$$

δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $\left(\frac{7}{4},-\frac{7}{4},\frac{3}{4}\right)$.

2. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases}\boldsymbol{\lambda x} & \boldsymbol{+y} & \boldsymbol{-\omega} & = & \mathbf{1}\\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{+\lambda y} & \boldsymbol{-\omega} & = & \mathbf{1}\\ \boldsymbol{-x} & \boldsymbol{+y} & \boldsymbol{+\lambda\omega} & = & \mathbf{1}\end{cases}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & \lambda & -1\\ -1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2+1)-1(\lambda-1)-1(1+\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$Dx=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & \lambda & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2+1)-1(\lambda+1)-1(1-\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$Dy=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)-(\lambda-1)-1(1+1)=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$D\omega=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)-(1+1)+1(1+\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Οι τιμές της παραμέτρου λ που μηδενίζουν την ορίζουσα $D=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$ είναι οι $0,-1,1$.

— Για $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -1$ και $\lambda\neq 1$ είναι $D\neq 0$ και επομένως

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{1}{\lambda}, \qquad y=\frac{Dy}{D}=\frac{1}{\lambda} \qquad \text{και} \qquad \omega=\frac{D\omega}{D}=\frac{1}{\lambda}$$

δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right)$.

— Για $\lambda=0$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} \quad\; y-\omega=1 \\ x \qquad -\omega=1 \\ -x+y \qquad =1 \end{cases}$. Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε το σύστημα $\begin{cases} y-\omega=1 \\ x-\omega=1 \\ y-\omega=2 \end{cases}$, το οποίο προφανώς είναι αδύνατο.

— Για $\lambda=1$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x+y-\omega=1 \\ x+y-\omega=1 \\ -x+y+\omega=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\omega=1 \\ -x+y+\omega=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\omega=1 \\ 2y \quad =2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \text{προσθέσαμε κατά} \\ \text{μέλη τις εξισώσεις} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\omega \\ y=1 \end{cases}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(\omega,\ 1,\ \omega)$, $\omega\in\mathbb{R}$.

— Για $\lambda=-1$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -x+y-\omega=1 \\ x-y-\omega=1 \\ -x+y-\omega=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y-\omega=1 \\ x-y-\omega=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y\ -\omega=1 \\ \quad -2\omega=2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \text{προσθέσαμε κατά} \\ \text{μέλη τις εξισώσεις} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y \ = \ 0 \\ \quad \omega=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \omega=-1 \end{cases}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(y, y, -1)$, $y\in\mathbb{R}$.

3. **Να λυθεί το ομογενές σύστημα** $\begin{cases} \boldsymbol{\lambda x+y+\omega=0} \\ \boldsymbol{x+\lambda y+\omega=0} \\ \boldsymbol{x+y+\lambda\omega=0} \end{cases}$**.**

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-1)-(\lambda-1)+(1-\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

Οι τιμές της παραμέτρου λ που μηδενίζουν την ορίζουσα D είναι οι 1 και -2.

— Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2$ είναι $D \neq 0$ και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική $(0, 0, 0)$.

— Για $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x+y+\omega=0 \\ x+y+\omega=0 \\ x+y+\omega=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+\omega=0$

και έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(-y-\omega, y, \omega), y, \omega \in \mathbb{R}$.

— Για $\lambda = -2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -2x + y + \omega = 0 \\ x - 2y + \omega = 0 \\ x + y - 2\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + \omega = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3\omega = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{αφαιρέσαμε την πρώτη εξίσωση} \\ \text{από τις άλλες δύο} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \omega = x \end{cases}.$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x, x, x), $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες

$$\text{i)} \begin{vmatrix} 30 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix}, \quad \text{ii)} \begin{vmatrix} e^2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ e^3 & e & 8 \end{vmatrix}, \quad \text{iii)} \begin{vmatrix} \text{ημ}\theta & 2 - \text{συν}\theta \\ 0 \quad 1 & 0 \\ \text{συν}\theta \; 2 & \text{ημ}\theta \end{vmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{v)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \log 5 \\ -1 & 0 & \log 2 \end{vmatrix}, \quad \text{vi)} \begin{vmatrix} e & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ e^2 & 0 & e \end{vmatrix}.$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ii)} \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ x & 1 & x \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

iii) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & x & 3 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \eta\mu x & 1 & -1 \\ \eta\mu^2 x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3. Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ -x + 3y = -7 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 3x + 4y + 4\omega = 11 \\ 4x - 4y + 6\omega = 11 \\ 6x - 6y = 3 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 7x + y + z = 0 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ 3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = 2 \end{cases}, \quad x \in [0, 2\pi)$.

4. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα παρακάτω συστήματα έχουν και μη μηδενικές λύσεις.

i) $\begin{cases} (2-\kappa)x + y = 0 \\ -x - \kappa y + \omega = 0 \\ x + 3y + (1-\kappa)\omega = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \kappa x + y + \omega = 0 \\ x + \kappa y + \omega = 0 \\ x + y + \kappa\omega = 0 \end{cases}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ \kappa x + \kappa y + \omega = \kappa + 1 \\ \kappa x + 2y + 2\omega = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \lambda x + y - \omega = 1 \\ \lambda x + y + \lambda\omega = \lambda - 1 \\ 3x + 3y + \lambda\omega = 1 \end{cases}$.

2. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \lambda(y + \omega) = 0 \\ \lambda x + 2y = \omega \\ \lambda x + y + \omega = 0 \end{cases}.$$

3. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών

i) $\begin{cases} \varepsilon_1: x + 2y = -1 \\ \varepsilon_2: 2x + y = 1 \\ \varepsilon_3: 3x - 2y = 5 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \varepsilon_1: x + 2y = 5 \\ \varepsilon_2: 2x + 5y = 1 \\ \varepsilon_3: -x + 3y = 5 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \varepsilon_1: 2x + y = 0 \\ \varepsilon_2: 4x + 2y = 3 \\ \varepsilon_3: x + y = 1 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} \varepsilon_1: 3x + 9y = 1 \\ \varepsilon_2: x + 3y = 0 \\ \varepsilon_3: 2x + 6y = 5 \end{cases}$.

4. Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ και το σύστημα

$$\begin{cases} x \quad + y + z = 0 \\ \beta x + 2\alpha y \quad = 0 \\ 2\gamma x \ + \beta y \quad = 0 \end{cases}.$$

i) Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

ii) Αν η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα, να εξετάσετε πόσες λύσεις έχει το σύστημα.

5. Αν για τους $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ υπάρχουν $x, y, \omega \in \nabla$, που δεν είναι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$x = \gamma y + \beta\omega, \qquad y = \alpha\omega + \gamma x \qquad \text{και} \qquad \omega = \beta x + \alpha y$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma = 1.$$

6. Να λύσετε τα συστήματα+

i) $\begin{cases} (\lambda+1)x \quad + y = \lambda+1 \\ x + (\lambda+1)y = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ x \quad + y = 2\lambda+1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x - y + \lambda = 0 \\ \lambda x + y + 5 = 0 \\ x - y - \lambda = 0 \end{cases}.$

7. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

i) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει μη μηδενικός πίνακας $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ τέτοιος, ώστε $AX = \lambda X$ (1).

ii) Για τις τιμές του λ που θα βρείτε να λύσετε την εξίσωση (1).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται ο πίνακας

$$A(x) = \begin{bmatrix} \text{συν}x & -\text{ημ}x \\ \text{ημ}x & \text{συν}x \end{bmatrix}.$$

Να αποδείξετε ότι

i) $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$

ii) $[A(x)]^{-1}=A(-x)$

iii) $[A(x)]^{\nu}=A(\nu x)$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

2. Δίνεται ο πίνακας $M=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

i) Να αποδείξετε ότι $M^3=\mathbb{O}$ και γενικά $M^{\nu}=\mathbb{O}$ για κάθε $\nu\geq 3$.

ii) Αν $A=\alpha M^2+\alpha M+I$ και $B=\alpha(\alpha-1)M^2-\alpha M+I$, $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε να βρείτε το γινόμενο AB και να αποδείξετε ότι $B^{-1}=A$.

3. Αν $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ και $J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ τότε να αποδείξετε ότι:

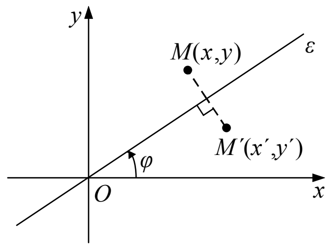
i) $J^2=-I$

ii) Το άθροισμα και το γινόμενο πινάκων της μορφής $\alpha I+\beta J$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί είναι επίσης πίνακες της ίδιας μορφής.

iii) Ο πίνακας $\alpha I+\beta J$ έχει αντίστροφο, αν και μόνο αν $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

4. Να αποδείξετε ότι η συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία ε του διπλανού σχήματος είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}\text{συν}2\varphi & \text{ημ}2\varphi\\ \text{ημ}2\varphi & -\text{συν}2\varphi\end{bmatrix}.$$



Μπορείτε από τον πίνακα A να βρείτε τους πίνακες των συμμετριών ως προς τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$, την ευθεία $y=x$ και την ευθεία $y=-x$;

5. Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$T:\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\quad \text{με}\quad \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι ο T είναι συνάρτηση "$1-1$".

ii) Να βρείτε τον αντίστροφο του μετασχηματισμού T.

iii) Να βρείτε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς των συμμετριών της στροφής και της ομοιοθεσίας.

6. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x \quad + y + z = 0 \\ \alpha x \quad + \beta y \quad = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y \quad = 0 \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^* .$$

7. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in [0,\pi)$ το σύστημα:

$$\begin{cases} x \quad + y + \omega = 0 \\ (\eta\mu\alpha)x \ + (\sigma\upsilon\nu\alpha)y + \omega = 0 \\ (\eta\mu^2\alpha)x + (\sigma\upsilon\nu^2\alpha)y + \omega = 0 \end{cases}.$$

8. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ τις σχετικές θέσεις των ευθειών

$$\varepsilon_1 : x + y = 1 , \qquad \varepsilon_2 : x + y = \kappa \qquad \varepsilon_3 : \kappa x + y = 1 .$$

9. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + y \ + \omega = 0 \\ \lambda y \ - \omega = 0 \\ y + \lambda\omega = 0 \end{cases}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

10. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & -\alpha \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}$. Αν υπάρχουν μη μηδενικός πίνακας $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ και πραγματικός αριθμός λ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $AX = \lambda X$, να αποδείξετε ότι $-2 \le \alpha \le 2$.

11. i) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5\lambda + 4 \\ x + 2y = 3\lambda + 2 \end{cases}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι εξισώσεις:

$$2t^2 + 3t - (5\lambda + 4) = 0$$

$$t^2 + 2t - (3\lambda + 2) = 0$$

έχουν κοινή ρίζα. Ποια είναι η κοινή ρίζα σε κάθε μια περίπτωση;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν $(\lambda^2+1)A=O$, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $A=O$. Α Ψ

2. Αν $(\lambda^2-4)A=O$, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε κατ' ανάγκη είναι $A=O$. Α Ψ

3. Αν $(\lambda^2+\lambda+1)(A-B)=O$, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $A=B$. Α Ψ

4. Αν $AB=2I$, όπου A,B τετραγωνικοί πίνακες, τότε οι A,B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες. Α Ψ

5. Αν $AB=2I$, όπου A,B τετραγωνικοί πίνακες, τότε $BA=2I$. Α Ψ

6. Αν $(A-I)^2=O$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι $A=I$. Α Ψ

7. Αν $A^2=I$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι

$$A=I \text{ ή } A=-I.$$

Α Ψ

8. Αν $A^2=O$ τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Α Ψ

9. Ισχύει πάντοτε $(AB)^2=A^2B^2$. Α Ψ

10. Αν $AX=BX$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $A=B$. Α Ψ

11. Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$. Α Ψ

12. Τα συστήματα

$$\begin{cases} x+y+2z=0\\ x+2y+3z=0\\ x+3y+5z=-1\end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x+y+z=0\\ y+z=0\\ y+2z=-1\end{cases}$$

είναι ισοδύναμα. Α Ψ

13. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δυο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρες λύσεις. Α Ψ

14. Ένα ομογενές σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο. Α Ψ

15. Το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+(\lambda-1)y=0 \\ x+\quad \lambda y \quad =0 \end{cases}$ έχει και μη μηδενικές λύσεις. Α Ψ

16. Αν η εξίσωση $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$,είναι αδύνατη στο ∇, τότε το σύστημα $\begin{cases} \beta x+2\gamma y=\alpha \\ 2\alpha x+\beta y\ =\beta \end{cases}$ έχει μοναδική λύση. Α Ψ

17. Το σύστημα $\begin{cases} x+\ \ y=0 \\ x+\kappa y=2 \\ \kappa x+\ \ y=\kappa \end{cases}$, $\kappa\neq -2$, είναι αδύνατο. Α Ψ

18. Έστω (Σ) ένα 3×3 γραμμικό σύστημα.

i) Αν $|D_x|+|D_y|+|D_z|>0$, τότε το σύστημα είναι ομογενές. Α Ψ

ii) Αν $D_x^2+(D_y-1)^2+D_z^2=0$, τότε το σύστημα είναι ομογενές. Α Ψ

ΙΙ.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \lambda^2-4\lambda+4 & 0 \\ 0 & \lambda^2-3\lambda+3 \end{bmatrix}$ είναι ο μοναδιαίος, αν

Α) $\lambda=2$, Β) $\lambda=0$, Γ) $\lambda=1$, Δ) $\lambda=3$.

2. Έστω A ένας $2\times\nu$ πίνακας. Αν υπάρχει πίνακας X τέτοιος, ώστε $AX=XA$, τότε ο X είναι τύπου

Α) 2×2, Β) 2×3, Γ) 3×2, Δ) 3×3.

3. Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $\kappa\neq 0$. Ο αντίστροφος του πίνακα κA είναι ο πίνακας

Α) $\frac{1}{\kappa}A$, Β) κA^{-1}, Γ) $\frac{1}{\kappa}A^{-1}$, Δ) $-\kappa A^{-1}$.

4. Το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$ είναι αδύνατο, αν

Α) $\lambda = 0$, Β) $\lambda = 1$, Γ) $\lambda = -1$, Δ) $\lambda \neq 0, -1, 1$.

5. Οι ευθείες

$\sqrt{2}x + y = 1$, $2x + \sqrt{2}y = 2$, $x + \sqrt{2}y = \sqrt{2}$.

Α) Περνούν από το ίδιο σημείο.

Β) Σχηματίζουν τρίγωνο.

Γ) Είναι παράλληλες ανά δύο.

Δ) Οι δύο είναι παράλληλες και η τρίτη τις τέμνει.

Ε) Οι δύο συμπίπτουν και η τρίτη τις τέμνει.

III.

Να αντιστοιχίσετε κάθε μετασχηματισμό της πρώτης στήλης στον πίνακά του της δεύτερης στήλης

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ	**ΠΙΝΑΚΑΣ**
1. Στροφή κατά γωνία 90^o και στη συνέχεια συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.	α. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	β. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
2. Συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.	γ. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	δ. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
3. Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.	ε. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι “γραμμοπράξεις” σ’ ένα κινέζικο πρόβλημα του 3^{ου} αιώνα π.Χ.

Το επόμενο πρόβλημα προέρχεται από μια αρχαία κινεζική συλλογή προβλημάτων με τίτλο “Εννέα κεφάλαια στη μαθηματική τέχνη”. Η λύση που δίνεται εκεί συμπίπτει ουσιαστικά με τη σύγχρονη μέθοδο του “επαυξημένου πίνακα” και των “γραμμοπράξεων”.

3 δεμάτια μιας καλής συγκομιδής, 2 δεμάτια μιας μέτριας συγκομιδής και 1 δεμάτι μιας κακής συγκομιδής δίνουν 39 dou σιτάρι.
2 δεμάτια της καλής, 3 δεμάτια της μέτριας και 1 δεμάτι της κακής συγκομιδής δίνουν 34 dou σιτάρι.
1 δεμάτι της καλής, 2 δεμάτια της μέτριας και 3 δεμάτια της κακής συγκομιδής δίνουν 26 dou σιτάρι.
Να βρεθεί πόσο σιτάρι δίνει ένα δεμάτι από κάθε είδος συγκομιδής.

Το πρόβλημα αυτό ανάγεται σήμερα στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους x, y, z:

$$\begin{array}{rrrcl} 3x & +2y & +z & = & 39 \\ 2x & +3y & +z & = & 34. \\ x & +2y & +3z & = & 26 \end{array}$$

Στο αρχαίο κείμενο, στο οποίο δεν υπάρχουν καθόλου σύμβολα, δίνονται οδηγίες για την τοποθέτηση των αριθμών στις κατακόρυφες στήλες ενός άβακα σύμφωνα με τον εξής τρόπο:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Η παραπάνω διάταξη μετασχηματίζεται στη συνέχεια ως εξής:

Η 2η στήλη πολλαπλασιάζεται επί 3 και κατόπιν αφαιρείται απ’ αυτήν 2 φορές η 3η στήλη, με αποτέλεσμα:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array}$$

Κατόπιν η 1η στήλη πολλαπλασιάζεται επί 3 και απ’ αυτήν αφαιρείται η 3η στήλη, με αποτέλεσμα:

$$\begin{array}{rrr} & & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Τέλος, η 1η στήλη πολλαπλασιάζεται επί 5 και απ’ αυτήν αφαιρείται 4 φορές η 2η στήλη, με αποτέλεσμα

$$\begin{array}{rrr} & & 3 \\ & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Το αρχικό σύστημα έχει λοιπόν μετασχηματιστεί στο

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 36z &= 99 \end{aligned}$$

από το οποίο υπολογίζεται αμέσως ο z και με διαδοχικές αντικαταστάσεις, οι x, y. Στο αρχαίο κείμενο, με μια ανάλογη διαδικασία που εκτελείται πάνω στον άβακα, προσδιορίζεται η λύση του προβλήματος:

1 δεμάτι της κακής συγκομιδής δίνει $2\frac{3}{4}$dou σιτάρι

1 δεμάτι της μέτριας συγκομιδής δίνει $4\frac{1}{4}$dou σιτάρι

1 δεμάτι της καλής συγκομιδής δίνει $9\frac{1}{4}$dou σιτάρι.

Στο έργο “Αριθμητικά”, του Έλληνα μαθηματικού της Αλεξανδρινής περιόδου Διόφαντου, υπάρχουν πολλά προβλήματα που ανάγονται στην επίλυση γραμμικών συστημάτων. Στο επόμενο, που είναι το πρόβλημα 19 του πρώτου βιβλίου, ο τρόπος επίλυσης βρίσκεται πολύ κοντά προς το σύγχρονο αλγεβρικό τρόπο σκέψης:

Ευρείν τέσσαρας αριθμούς όπως οι τρεις λαμβανόμενοι του λοιπού υπερέχωσιν επιταχθέντι αριθμώ. (Να βρεθούν 4 αριθμοί έτσι ώστε λαμβανόμενοι ανά τρεις να ξεπερνούν τον άλλο κατά δοθέντα αριθμό).

Ο Διόφαντος παρουσιάζει τη λύση του προβλήματος μέσα από μια ειδική περίπτωση (που γενικεύεται άμεσα). Έστω, γράφει, ότι οι α, β, γ ξεπερνούν τον δ κατά 20, οι β, γ, δ ξεπερνούν τον α κατά 30, οι γ, δ, α ξεπερνούν τον β κατά 40 και οι δ, α, β ξεπερνούν τον γ κατά 50. Το πρόβλημα, όπως είναι φανερό, ανάγεται στην επίλυση του γραμμικού συστήματος:

$$\alpha+\beta+\gamma=\delta+20$$
$$\beta+\gamma+\delta=\alpha+30$$
$$\gamma+\delta+\alpha=\beta+40$$
$$\delta+\alpha+\beta=\gamma+50$$

Ο Διόφαντος, ο οποίος δε χρησιμοποιεί ειδικά σύμβολα για την πρόσθεση και την ισότητα, λύνει το πρόβλημα με την εισαγωγή ενός βοηθητικού αγνώστου, που εκφράζει το άθροισμα των 4 ζητούμενων αριθμών. Η μέθοδός του, με σύγχρονο συμβολισμό, συνοψίζεται ως εξής:
Αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2x$, τότε από την $\alpha+\beta+\gamma=\delta+20$ έχουμε $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\delta+20$ ή $2x=2\delta+20$ ή $\delta=x-10$. Όμοια, από τις άλλες εξισώσεις παίρνουμε $\alpha=x-15$, $\beta=x-20$ και $\gamma=x-25$. Από τις 4 τελευταίες ισότητες, με πρόσθεση παίρνουμε $\alpha+\beta+\gamma+\delta=4x-70$ ή $2x=4x-70$ ή $x=35$ και άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$\alpha=35-15=20,\quad \beta=35-20=15,\quad \gamma=35-25=10,\quad \delta=35-10=25$$

Η πρώτη εμφάνιση μιας "ορίζουσας " σε πρόβλημα απαλοιφής

Ο G.W. Leibniz, σε μια επιστολή του προς τον l' Hospital στις 28-4-1693, πρότεινε μια μέθοδο χρησιμοποίησης των αριθμών για την έκφραση γενικών σχέσεων, όπως ακριβώς γίνεται με τη χρήση των γραμμάτων. Ως παράδειγμα έδωσε ένα γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 2 αγνώστους, γραμμένο στη μορφή:

$$\begin{aligned}10+11x+12y&=0\\20+21x+22y&=0\\30+31x+32y&=0\end{aligned}\qquad(1)$$

Οι συντελεστές του συστήματος δεν εκφράζουν εδώ αριθμούς αλλά λειτουργούν όπως και οι διπλοί δείκτες που χρησιμοποιούνται σήμερα για την παράσταση των στοιχείων ενός πίνακα. Αυτοί οι "ψευδοαριθμοί" (όπως τους αποκαλεί ο Leibniz) δείχνουν με το πρώτο ψηφίο τους την εξίσωση στην οποία βρίσκονται και με το δεύτερο, το γράμμα στο οποίο ανήκουν. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, ο Leibniz απαλείφει τον άγνωστο *y*, αρχικά από την 1η και 2η εξίσωση και κατόπιν από την 1η και 3η. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$10.22+11.22x-12.20-12.21x=0$$
$$10.32+11.32x-12.30-12.31x=0$$

Στη συνέχεια απαλείφει το *x* από τις δυο τελευταίες εξισώσεις (λύνοντας καθεμιά ως προς *x* και εξισώνοντας τα αποτελέσματα) και φτάνει στην ισότητα:

$$10.21.32+11.22.30+12.20.31=10.22.31+11.20.32+12.21.30$$

ή

$$10.21.32+11.22.30+12.20.31-10.22.31-11.20.32-12.21.30=0\,.$$

Δηλαδή σ' αυτό που σήμερα αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση το σύστημα (1) (ο μηδενισμός της ορίζουσας του επαυξημένου πίνακα του συστήματος).
Το προηγούμενο αποτέλεσμα του Leibniz έχει κυρίως τη σημασία της **απαλείφουσας** ενός γραμμικού συστήματος, δηλαδή της σχέσης μεταξύ των συντελεστών η οποία προκύπτει όταν γίνεται απαλοιφή όλων των αγνώστων. Στην ίδια επιστολή ο Leibniz δίνει και ένα γενικό κανόνα για τον υπολογισμό της απαλείφουσας ενός οποιουδήποτε γραμμικού συστήματος, που έχει επαρκή αριθμό εξισώσεων για την απαλοιφή όλων των αγνώστων.

Οι ορίζουσες και οι πίνακες ως ανεξάρτητες έννοιες

Η χρησιμοποίηση των οριζουσών για την επίλυση γραμμικών συστημάτων έγινε πρώτη φορά από τον C. MacLaurin το 1729, αλλά η μέθοδος αυτή έμεινε γνωστή με το όνομα του G. Cramer, ο οποίος την παρουσίασε στο βιβλίο του "Εισαγωγή στην ανάλυση των αλγεβρικών καμπύλων γραμμών" (1750). Θέλοντας να προσδιορίσει μια καμπύλη που διέρχεται από 5 γνωστά σημεία και έχει εξίσωση της μορφής

$$A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$$

ο Cramer καταλήγει σ' ένα γραμμικό σύστημα 5 εξισώσεων με αγνώστους τα A, B, C, D, E. Για να λύσει αυτό το σύστημα, περιγράφει μια μέθοδο υπολογισμού των αγνώστων με κατασκευή κλασμάτων, των οποίων ο κοινός παρονομαστής και οι αριθμητές προσδιορίζονται από τους συντελεστές του συστήματος σύμφωνα με γενικούς κανόνες. Αυτή είναι ουσιαστικά η σημερινή μέθοδος των οριζουσών αλλά ο Cramer δε χρησιμοποιεί κάποιο ειδικό όνομα ή σύμβολο για την έννοια της ορίζουσας.
Ο λατινικός όρος **determinantem** (ορίζουσα) χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον C.F. Gauss το 1801 αλλά όχι με τη σημερινή σημασία.
Η πρώτη συστηματική διαπραγμάτευση της θεωρίας των οριζουσών έγινε από τον A.L. Cauchy σε μια εργασία του που δημοσιεύτηκε το 1815. Η λέξη "ορίζουσα" χρησιμοποιείται εκεί με τη σημερινή σημασία ενώ εισάγεται και η τετραγωνική διάταξη των στοιχείων της με τη βοήθεια των διπλών δεικτών:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & a_{22} \cdots \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \cdots \alpha_{nn} \end{matrix}$$

(οι 2 κάθετες γραμμές για το συμβολισμό μιας ορίζουσας, χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά από τον A. Cayley το 1841).

Σε αντίθεση από τη σημερινή λογική σειρά παρουσίασης, η έννοια του πίνακα υπήρξε, ιστορικά, μεταγενέστερη από την έννοια της ορίζουσας.
Το γεγονός ότι η ορίζουσα δεν είναι μόνο ένας αριθμός αλλά συσχετίζει αυτόν τον αριθμό με μια τετραγωνική διάταξη στοιχείων, οδήγησε βαθ-

μιαία στη μελέτη αυτής της ίδιας της διάταξης, ανεξάρτητα από την τιμή της ορίζουσας. Ο όρος **matrix** (μήτρα, καλούπι), που σήμερα χρησιμοποιείται διεθνώς για την έννοια του πίνακα, πρωτοεμφανίστηκε σε μια εργασία του J.J. Sylvester το 1850, για να διαχωριστεί η έννοια της ορίζουσας από την τετραγωνική διάταξη των στοιχείων που την παράγει. Το 1855 ο A. Cayley εισήγαγε για πρώτη φορά τους πίνακες στη μελέτη των γραμμικών μετασχηματισμών, ενώ το 1858 στην εργασία του "Μια πραγματεία στη θεωρία των μητρών", ανέπτυξε συστηματικά όλη τη βασική θεωρία. Όπως γράφει ο Cayley, στην ιδεά του πίνακα έφτασε τόσο από την έννοια της ορίζουσας όσο και από την ανάγκη ενός βολικού τρόπου έκφρασης των εξισώσεων $x' = \alpha x + by$, $y' = cx + dy$ ενός μετασχηματισμού, ο οποίος απεικονίζει το σημείο (x, y) στο σημείο (x', y'). Ως ένα τέτοιο τρόπο έκφρασης, ο Cayley εισάγει τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

και με βάση τις ιδιότητες των μετασχηματισμών ορίζει τις πράξεις των πινάκων και προσδιορίζει τις ιδιότητές τους. Π.χ., αν τον προηγούμενο μετασχηματισμό από το (x, y) στο (x', y') ακολουθήσει ένας νέος μετασχηματισμός από το (x', y') στο (x'', y'') και με εξισώσεις $x'' = ex' + fy', y'' = gx' + hy'$ τότε, όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, ισχύει:

$$x'' = (e\alpha + fc)x + (eb + fd)y$$

$$y'' = (g\alpha + hc)x + (gb + hd)y\,.$$

Έτσι ο Cayley ορίζει τον πολλαπλασιασμό πινάκων, με βάση το πρότυπο της διαδοχικής εκτέλεσης των δυο μετασχηματισμών, ως εξής:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\alpha + fc & eb + fd \\ g\alpha + hc & gb + hd \end{pmatrix}.$$

Στην ίδια εργασία επισημαίνει επίσης ότι αυτός ο πολλαπλασιασμός είναι μια πράξη **μη αντιμεταθετική** καθώς και το γεγονός ότι υπάρχουν μη μηδενικοί πίνακες που έχουν ως γινόμενο το μηδενικό πίνακα.

Ο λογισμός των πινάκων αναπτύχθηκε τα επόμενα χρόνια σε μια αυτοτελή μαθηματική θεωρία, που αποτελεί μέρος ενός ευρύτερου κλάδου των Μαθηματικών, της Γραμμικής Άλγεβρας. Το 1925, ο W. Heisenberg (βραβείο Νόμπελ Φυσικής 1932) χρησιμοποίησε τη θεωρία των πινάκων για να εκφράσει τα μη αντιμεταθετικά Μαθηματικά που περιγράφουν τα φαινόμενα της κβαντικής μηχανικής, ενώ αργότερα η χρήση των πινάκων επεκτάθηκε και σε άλλες επιστήμες.

2 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ[1]

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Εισαγωγή

Η δημιουργία των μιγαδικών αριθμών οφείλεται στην προσπάθεια επίλυσης των εξισώσεων 3ου βαθμού. Αν στην $ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ θέσουμε $x=y-\dfrac{\beta}{3a}$ και εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε προκύπτει μια εξίσωση της μορφής $x^3=px+q$. Στις αρχές του 16ου αιώνα οι Ιταλοί αλγεβριστές S. del Ferro και N. Tartaglia ανακάλυψαν μια μέθοδο επίλυσης τέτοιων εξισώσεων, που με σημερινό συμβολισμό ισοδυναμεί με τον τύπο

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\,,\quad \text{όπου}\quad D=\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^2.$$

Στην περίπτωση που η “διακρίνουσα” D είναι θετική, ο τύπος αυτός δίνει αμέσως μια ρίζα της εξίσωσης. Για παράδειγμα, στην $x^3=9x+28$ είναι $D=169$ και ο τύπος δίνει $x=4$, που είναι η μοναδική πραγματική ρίζα. Διαπιστώθηκε, όμως, τότε ένα φαινόμενο τελείως διαφορετικό από την περίπτωση των εξισώσεων 2ου βαθμού: Υπάρχουν εξισώσεις με πραγματικές ρίζες, όπως, για παράδειγμα, η $x^3=15x+4$, που έχει μια προφανή ρίζα το 4 (οι άλλες δύο είναι οι $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$), αλλά η διακρίνουσα D είναι αρνητική! Ο τύπος στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνει

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\,. \tag{1}$$

Όπως είναι φανερό, οι μαθηματικοί βρέθηκαν, εδώ, μπροστά σε ένα δίλημμα: ή θα έπρεπε να εγκαταλείψουν τη μέθοδο των Ferro-Tartaglia ως γενική μέθοδο επίλυσης εξισώσεων 3ου βαθμού ή να δεχτούν ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός, όπως το 4, μπορεί να εκφραστεί με παραστάσεις που περιέχουν τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Η δεύτερη άποψη φαινόταν αδιανόητη αλλά αυτό δεν

---

[1] Το κεφάλαιο αυτό έχει ληφθεί από το βιβλίο: «Μαθηματικά Β΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης» των: Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

εμπόδισε την εφαρμογή των αλγεβρικών πράξεων σε τέτοιες παραστάσεις. Στα μέσα του 16ου αιώνα ο R. Bombelli, κάνοντας τολμηρές υποθέσεις, βρήκε ότι ισχύει $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=2+\sqrt{-121}$ και $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3=2-\sqrt{-121}$. Αντικαθιστώντας αυτές τις ισότητες στην (1) προκύπτει αμέσως ότι $x=4$, δηλαδή το αδιανόητο γίνεται πραγματικότητα! Οι αριθμοί της μορφής $\alpha+\beta i$ με $i=\sqrt{-1}$, που ονομάστηκαν αρχικά φανταστικοί και αργότερα μιγαδικοί, έγιναν από τότε αναπόσπαστο εργαλείο των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους στις άλλες επιστήμες. Ο J. Hadamard, ο οποίος το 1896 απέδειξε με χρήση της μιγαδικής ανάλυσης το "θεώρημα των πρώτων αριθμών", έγραψε ότι:

> *"Ο συντομότερος δρόμος ανάμεσα σε δύο αλήθειες στο πεδίο των πραγματικών περνά μέσα από το πεδίο των μιγαδικών".*

Το Σύνολο $\Re$ των Μιγαδικών Αριθμών

Γνωρίζουμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα δεν έχει λύση στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Ειδικότερα η εξίσωση $x^2=-1$ δεν έχει λύση στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Για να ξεπεράσουμε την "αδυναμία" αυτή, διευρύνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ σε ένα σύνολο $\mathbb{C}$, το οποίο να έχει τις ίδιες πράξεις με το $\mathbb{R}$, τις ίδιες ιδιότητες των πράξεων αυτών και στο οποίο να υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $x^2=-1$, δηλαδή ένα στοιχείο i, τέτοιο, ώστε $i^2=-1$. Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτές το διευρυμένο σύνολο $\mathbb{C}$ θα έχει ως στοιχεία:

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς
- Όλα τα στοιχεία της μορφής βi, που είναι γινόμενα των στοιχείων του $\mathbb{R}$ με το i και
- Όλα τα αθροίσματα της μορφής $\alpha+\beta i$, με α και β πραγματικούς αριθμούς.

Τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το $\mathbb{C}$ **σύνολο των μιγαδικών αριθμών**. Επομένως:

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

- Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο $\mathbb{R}$, με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,
- Υπάρχει ένα στοιχείο $\boldsymbol{i}$ τέτοιο, ώστε $\boldsymbol{i^2=-1}$,
- Κάθε στοιχείο z του $\mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Η έκφραση $\alpha+\beta i, \alpha,\beta \in$ ℝ είναι ακριβώς ό,τι λέμε **μιγαδικό αριθμό**. Είναι η σύνθεση δύο αριθμών, του πραγματικού α και του βi, τον οποίο ονομάζουμε **φανταστικό αριθμό**. Ο α λέγεται **πραγματικό μέρος** του z και σημειώνεται $\mathbf{Re}(z)$, ενώ ο β λέγεται **φανταστικό μέρος** του z και σημειώνεται $\mathbf{Im}(z)$. Επιπλέον, στο ℂ κάθε πραγματικός αριθμός α εκφράζεται ως $\alpha+0i$, ενώ κάθε φανταστικός αριθμός βi εκφράζεται ως $0+\beta i$.

Στη συνέχεια, όταν λέμε ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$, εννοούμε ότι οι α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και το γεγονός αυτό δε θα τονίζεται ιδιαίτερα.

Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $\alpha+\beta i$, δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$. Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta.}$$

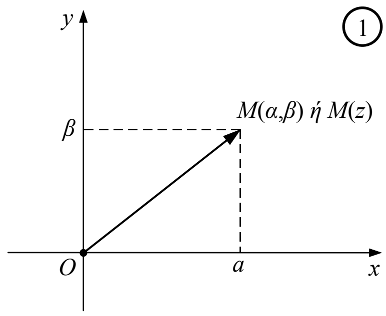
Επομένως, επειδή $0=0+0i$, έχουμε

$$\boxed{\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0.}$$

Μετά τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών δημιουργείται το ερώτημα αν διατάσσονται οι μιγαδικοί αριθμοί. Γνωρίζουμε ότι, κατά την επέκταση από το ℘ στο ∧, οι πράξεις, η διάταξη και οι ιδιότητες αυτών οι οποίες ισχύουν στο ℘, μεταφέρονται και στο ∧. Τα ίδια συμβαίνουν και για τις επεκτάσεις από το ∧ στο ∠ και από το ∠ στο ∇. Στην επέκταση, όμως, από το ∇ στο ℜ, ενώ οι πράξεις και οι ιδιότητες αυτών που ισχύουν στο ∇ εξακολουθούν να ισχύουν και στο ℜ, εν τούτοις η διάταξη και οι ιδιότητές της δε μεταφέρονται.

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών

Κάθε μιγαδικό αριθμό $\alpha+\beta i$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο $M(\alpha,\beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και *αντιστρόφως*, κάθε σημείο $M(\alpha,\beta)$ του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό $\alpha+\beta i$. Το σημείο M λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού $\alpha+\beta i$. Αν θέσουμε $z=\alpha+\beta i$, τότε το σημείο $M(\alpha,\beta)$ μπορούμε να το συμβολίζουμε και με $M(z)$.



Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **μιγαδικό επίπεδο**. Ο άξονας $x'x$ λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(\alpha,0)$ που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $\alpha=\alpha+0i$, ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται **φανταστικός** άξονας, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(0,\beta)$ που είναι εικόνες των φανταστικών $\beta i = 0+\beta i$

Ένας μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$ παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα, $\overrightarrow{OM}$, του σημείου $M(\alpha,\beta)$.

2.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\Re$ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τον ορισμό του $\Re$, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες πράξεις με διώνυμα $\alpha+\beta x$ στο ∇, όπου βέβαια αντί για x έχουμε το i . Έτσι:

● Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i} \,.$$

Για παράδειγμα, $(3+4i)+(5-6i)=(3+5)+(4-6)i=8-2i$.

● Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma+\delta i$ από τον $\alpha+\beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma-\delta i$, έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha+\beta i)+(-\gamma-\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i \,.$$

Δηλαδή

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i} \,.$$

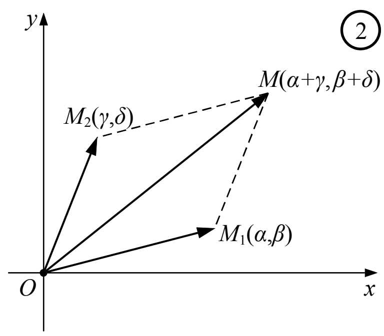
Για παράδειγμα

$$(3+4i)-(5-6i)=(3-5)+(4+6)i=-2+10i \,.$$

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$.



Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:

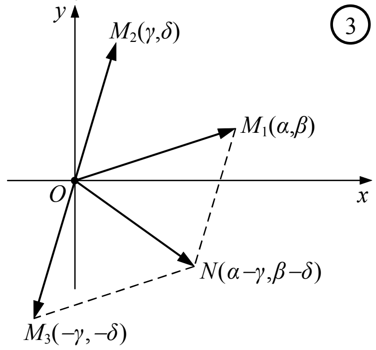
“Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους”.

Επίσης, η διαφορά

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



“Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους”.

● Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)=$$

$$=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i.$$

Δηλαδή,

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i}.$$

Για παράδειγμα,

$$(3+4i)\cdot(5-6i)=15-18i+20i-24i^2=(15+24)+(20-18)i=39+2i.$$

Ειδικότερα, έχουμε: $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$. Ο αριθμός $\alpha-\beta i$ λέγεται **συζυγής** του $\alpha+\beta i$ και συμβολίζεται με $\overline{\alpha+\beta i}$. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i}.$$

Επειδή είναι και $\overline{\alpha-\beta i}=\alpha+\beta i$, οι $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

● Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\boldsymbol{\alpha+\beta i}}{\boldsymbol{\gamma+\delta i}}=\frac{\boldsymbol{\alpha\gamma+\beta\delta}}{\boldsymbol{\gamma^2+\delta^2}}+\frac{\boldsymbol{\beta\gamma-\alpha\delta}}{\boldsymbol{\gamma^2+\delta^2}}\boldsymbol{i}\ .$$

Για παράδειγμα: $\frac{2+i}{1-3i}=\frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{2+6i+i+3i^2}{1+9}=\frac{-1+7i}{10}=-\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i$.

Δύναμη Μιγαδικού

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού z με εκθέτη ακέραιο ορίζονται ακριβώς όπως και στους πραγματικούς, δηλαδή ορίζουμε:

$$z^1=z\ ,\ z^2=z\cdot z,...,\ \text{και γενικά}\ z^\nu=z^{\nu-1}\cdot z\ ,$$

για κάθε θετικο ακέραιο ν, με $\nu>1$. Επίσης, αν $z\neq 0$, ορίζουμε

$$z^0=1,\qquad z^{-\nu}=\frac{1}{z^\nu}\qquad \text{για κάθε θετικό ακέραιο } \nu.$$

Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών. Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις του i έχουμε:

$$\boldsymbol{i^0=1,\qquad i^1=i,\qquad i^2=-1,\qquad i^3=i^2 i=-i}\ .$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι είναι:

$$i^4=i^2i^2=1,\ i^5=i^4i=1\cdot i=i,\ i^6=i^4i^2=1\cdot i^2=-1,\ i^7=i^4i^3=1\cdot i^3=-i\ ,$$

δηλαδή, μετά το i^4 οι τιμές του i^ν επαναλαμβάνονται. Άρα, για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i , γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

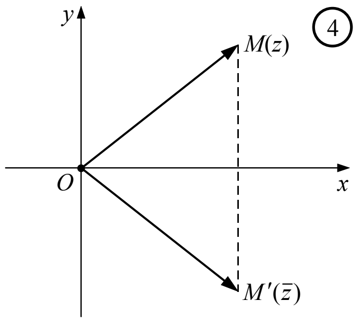
$$i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases} 1 & ,\ \text{αν}\ \ \upsilon=0\\ i & ,\ \text{αν}\ \ \upsilon=1\\ \text{-}1 & ,\ \text{αν}\ \ \upsilon=2\\ -i & ,\ \text{αν}\ \ \upsilon=3\end{cases}$$

Για παράδειγμα:

$$i^{14}=i^{3\cdot 4+2}=i^2=-1$$
$$i^{19}=i^{4\cdot 4+3}=i^3=-i$$
$$i^{16}=i^{4\cdot 4+0}=i^0=1$$
$$i^{21}=i^{4\cdot 5+1}=i^1=i\ .$$

Ιδιότητες Συζυγών

Επειδή οι συζυγείς μιγαδικοί, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, μας διευκολύνουν στη μελέτη των μιγαδικών αριθμών, θα αναφερθούμε ιδιαιτέρως σε αυτούς.



● Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,-\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

● Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$\boldsymbol{z+\bar{z}=2\alpha}$$
$$\boldsymbol{z-\bar{z}=2\beta i}\,.$$

● Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1.	$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
2.	$\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$
3.	$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$
4.	$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}$$
$$=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2\,.$$

Οι παραπάνω ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για περισσότερους από δυο μιγαδικούς αριθμούς. Είναι δηλαδή:

$$\overline{\boldsymbol{z_1+z_2+\cdots+z_\nu}}=\boldsymbol{\bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots+\bar{z}_\nu}$$

$$\overline{\boldsymbol{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}}=\boldsymbol{\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\ldots\cdot\bar{z}_\nu}\,.$$

Ιδιαίτερα, αν είναι $z_1=z_2=\ldots=z_\nu=z$, τότε η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$\boldsymbol{\overline{(z^\nu)}=(\bar{z})^\nu}$$

Για παράδειγμα, $\overline{\left[\left(\dfrac{2-3i}{4+5i}\right)^3\right]}=\left[\overline{\left(\dfrac{2-3i}{4+5i}\right)}\right]^3=\left(\dfrac{2+3i}{4-5i}\right)^3$.

Επίλυση της Εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha z^2+\beta z+\gamma=0}$ **με** $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}}$ *και* $\boldsymbol{\alpha\neq 0}$

Επειδή $i^2=-1$ και $(-i)^2=i^2=-1$, η εξίσωση $x^2=-1$ έχει στο σύνολο $\Re$ των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $x_1=i$ και $x_2=-i$. Ομοίως, η εξίσωση $x^2=-4$ έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $x_1=2i$ και $x_2=-2i$, αφού

$$z^2=-4\Leftrightarrow z^2=i^2\cdot 4\Leftrightarrow z^2=(2i)^2\Leftrightarrow z=2i \quad \text{ή} \quad z=-2i\,.$$

Εύκολα, όμως, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο **C**. Πράγματι, έστω η εξίσωση

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0\,,\qquad \text{με}\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\quad\text{και}\quad \alpha\neq 0\,.$$

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}\,,$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- $\Delta=0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- $\Delta<0$. Τότε, επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2}=\dfrac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2}=\dfrac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2}=\left(\dfrac{\iota\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται: $\left(z+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$.

  Άρα οι λύσεις της είναι:

$$z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\,, \tag{1}$$

  οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $z^2-5z+6=0$ έχει $\Delta=25-24=1>0$ και οι λύσεις της είναι: $z_1=\dfrac{5+1}{2}=3$, $z_2=\dfrac{5-1}{2}=2$. Όμως, η εξίσωση $z^2-2z+2=0$ έχει

$\Delta = 4-8 = -4 < 0$ και οι λύσεις της είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί: $z_1 = \frac{2+i\sqrt{4}}{2} = 1+i$, $z_2 = \frac{2-i\sqrt{4}}{2} = 1-i$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + z_2 = \frac{-\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου ν να υπολογιστεί το άθροισμα

$$S = i + i^2 + i^3 + \cdots + i^\nu .$$

ΛΥΣΗ

Οι προσθετέοι του αθροίσματος έχουν πλήθος ν και είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο i και λόγο επίσης i. Επομένως, $S = i\frac{i^\nu - 1}{i-1}$, οπότε, λόγω της ισότητας $\nu = 4\rho + \upsilon$ της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\upsilon = 0$. Τότε $\nu = 4\rho$, οπότε $S = i\frac{1-1}{i-1} = 0$
- $\upsilon = 1$. Τότε $\nu = 4\rho+1$, οπότε $S = i\frac{i-1}{i-1} = i$
- $\upsilon = 2$. Τότε $\nu = 4\rho+2$, οπότε $S = i\frac{-1-1}{i-1} = \frac{-2i}{i-1} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = -1+i$
- $\upsilon = 3$. Τότε $\nu = 4\rho+3$, οπότε $S = i\frac{-i-1}{i-1} = \frac{1-i}{i-1} = -1$.

2. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι α) φανταστικός β) πραγματικός.

ΛΥΣΗ

Αν $z = x + yi$, τότε:

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z-2i}&=\frac{(x-1)+yi}{x+(y-2)i}\\&=\frac{(x^2-x+y^2-2y)+i(2x+y-2)}{x^2+(y-2)^2}\\&=\frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}+\frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}i\,.\end{aligned}$$

Επομένως:

α) Ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $\frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=0$, δηλαδή, αν και μόνο αν $x^2-x+y^2-2y=0$ και $x^2+(y-2)^2\neq 0$ ή, ισοδύναμα,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4} \quad \text{και} \quad (x,y)\neq(0,2)\,.$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K=\left(\frac{1}{2},1\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$.

β) Ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $\frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}=0$, δηλαδή, αν και μόνο αν

$$2x+y-2=0 \quad \text{και} \quad x^2+(y-2)^2\neq 0\,.$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $2x+y-2=0$, με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\nabla$, ώστε ο $z=(\lambda+3i)(2-i)$ να είναι:
α) πραγματικός αριθμός   β) φανταστικός αριθμός.

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:

α) $(x+y)+(x-y)i=3-i$

β) $\sqrt{3x^2+x-6}+(x^2-3)i=2+i$

γ) $9-27i=(3x+2y)-yi$.

3. Στο μιγαδικ+ό επίπεδο να σημειώσετε τις εικόνες και τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών αριθμών: $1+i$, 1, i, $-2i$, $3+4i$, $3-4i$, 5, 0.

4. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:
α) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.
β) Το φανταστικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.
γ) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με το φανταστικό του μέρος.

5. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\alpha+\beta i$

α) $(-4+6i)+(7-2i)$ β) $(3-2i)-(6+4i)$
γ) $(3+4i)+(-8-7i)+(5+3i)$ δ) $(3+2i)(4+5i)$
ε) $3i(6+i)$ στ) $(4+3i)(4-3i)$
ζ) $i(3+i)(2-i)$.

6. Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή $\alpha+\beta i$:

α) $\dfrac{1}{1-i}$ β) i^6
γ) i^2+2i+1 δ) $(1+i\sqrt{3})^2$
ε) $\dfrac{3+i}{2-i}$ στ) $\dfrac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$.

7. Να βρείτε τους $x, y \in \nabla$, για τους οποίους ισχύει:

α) $(3-2i)^2-(x+iy)=x-yi$

β) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2+\dfrac{1}{x+iy}=1+i$

γ) $(3-2i)(2x-iy)=2(2x-iy)+2i-1$.

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$

β) $\dfrac{1}{i^{11}}-\dfrac{1}{i^{41}}+\dfrac{1}{i^{75}}-\dfrac{1}{i^{1023}}$.

9. Ποιος είναι ο $\bar{z}$, όταν:
α) $z=-5+7i$ β) $z=-4-9i$ γ) $z=4i$
δ) $z=11$ ε) $z=-i$ στ) $z=0$.

10. Με ποιες συμμετρίες μπορούν να προκύψουν από την εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ οι εικόνες των μιγαδικών $\bar{z}$, $-z$ και $-\bar{z}$;

11. Αν $z_1 = \dfrac{5-9i}{7+4i}$ και $z_2 = \dfrac{5+9i}{7-4i}$, να δείξετε ότι ο $z_1 + z_2$ είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο $z_1 - z_2$ φανταστικός αριθμός.

12. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:
α) $z - \bar{z} = 6i$ β) $z^2 = \bar{z}^2$ γ) $\bar{z}^2 = -z^2$ δ) $\bar{z} = 2 - z$

13. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:
α) $x^2 - 3x + 2 = 0$ β) $x^2 - 2x + 3 = 0$ γ) $x + \dfrac{1}{x} = 1$.

14. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι $3+2i$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν α, β, γ και δ είναι πραγματικοί αριθμοί, να εξετάσετε πότε το πηλίκο $\dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$ είναι πραγματικός αριθμός.

2. Αν $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\dfrac{1}{z^2 - z}$.

3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1+i)^{20} - (1-i)^{20}$.

4. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^{\nu} + i^{-\nu}$;

5. Να λύσετε τις εξισώσεις
α) $\bar{z} = z^2$ β) $\bar{z} = z^3$.

6. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να δείξετε ότι ο $\dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός και ότι $-2 \leq \dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z} \leq 2$.

7. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta i)^{10} + (\beta - \alpha i)^{10} = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

8. α) Για ένα μιγαδικό αριθμό z να αποδείξετε ότι:

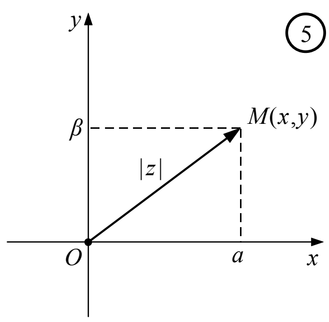
- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z=\bar{z}$
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z=-\bar{z}$.

β) Αν $\bar{z}_1=\frac{1}{z_1}$ και $\bar{z}_2=\frac{1}{z_2}$ και $z_1\cdot z_2\neq -1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $v=\frac{z_1-z_2}{1+z_1z_2}$ είναι φανταστικός.

9. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

α) $\mathrm{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=5\,\mathrm{Re}(z)$ β) $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=-3\,\mathrm{Im}(z)$.

2.3 *ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ*



Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή

$$\boxed{|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}}$$

Για παράδειγμα, $|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

Όταν ο μιγαδικός z είναι της μορφής $z=x+0i=x\in\mathbb{R}$, τότε $|z|=\sqrt{x^2+0^2}=|x|$, που είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού x.

Αν $z=x+yi$, τότε $\bar{z}=x-yi$ και $-z=-x-yi$. Επομένως,

- $|z|=|\bar{z}|=|-z|$
- $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

Οι επόμενες ιδιότητες αναφέρονται στις σχέσεις που συνδέουν το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών με τα μέτρα τους και είναι ίδιες με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών.
Αν z_1,z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Πράγματι, έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$
$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2$$
$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα.

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

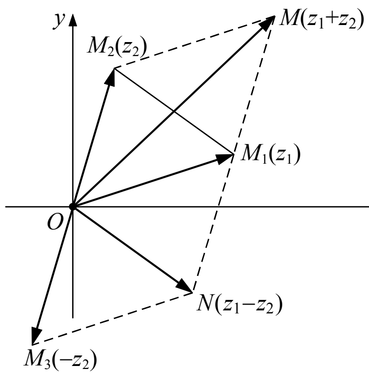
$$|z_1 z_2 \ldots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_\nu|$$

και ειδικότερα

$$|z^\nu| = |z|^\nu .$$

Τέλος, από τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $z_1 + z_2$ και της διαφοράς $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:

$$\boxed{\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$



6

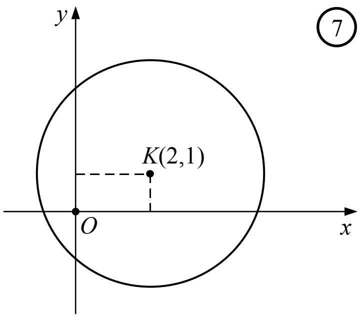
Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$. Επομένως:

“Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους”.

Δηλαδή:

$$\boxed{(M_1M_2) = |z_1 - z_2|}$$

Έτσι, για παράδειγμα, η εξίσωση $|z-(2+i)| = 3$ επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από την εικόνα του μιγαδικού $2+i$, δηλαδή από το σημείο $K(2,1)$, απόσταση 3 μονάδες. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(2,1)$ και ακτίνα $\rho = 3$.



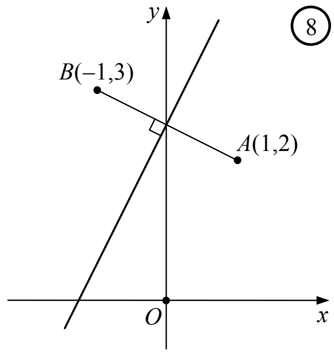
7

Γενικά, η εξίσωση

$$|z - z_0| = \rho, \qquad \rho > 0$$

παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.

Επίσης, η εξίσωση $|z-(1+2i)| = |z-(-1+3i)|$ επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να ισαπέχουν από τις εικόνες των μιγαδικών $1+2i$ και $-1+3i$, δηλαδή από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-1,3)$. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$.



Γενικά, η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, ..., z_\nu$ ισχύει

$$\left|\frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| + \left|\frac{z_2 - i}{z_2 + i}\right| + \cdots + \left|\frac{z_\nu - i}{z_\nu + i}\right| < 1,$$

να αποδειχτεί ότι κανένας από αυτούς δεν είναι πραγματικός αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ένας από τους $z_1, z_2, ..., z_\nu$, για παράδειγμα ο z_κ, ήταν πραγματικός, τότε οι μιγαδικοί $z_\kappa - i$ και $z_\kappa + i$ θα ήταν συζυγείς και επομένως $\left|\frac{z_\kappa - i}{z_\kappa + i}\right| = \frac{|z_\kappa - i|}{|z_\kappa + i|} = 1$, αφού
τα μέτρα δύο συζυγών μιγαδικών είναι ίσα. Τότε όμως θα είχαμε

$$\left|\frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| + \left|\frac{z_2 - i}{z_2 + i}\right| + \cdots + \left|\frac{z_\kappa - i}{z_\kappa + i}\right| + \cdots + \left|\frac{z_\nu - i}{z_\nu + i}\right| \geq 1,$$

που είναι άτοπο.

2. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-(2+2i)| = \sqrt{2}$, να βρεθεί:

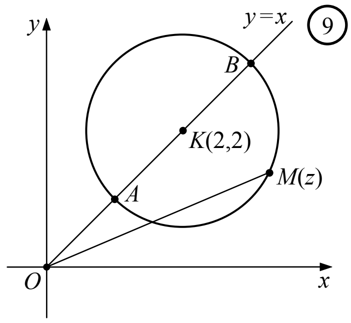
α) Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο.

β) Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

ΛΥΣΗ

α) Η ισότητα $|z-(2+2i)|=\sqrt{2}$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από το σημείο $K(2,2)$ σταθερή απόσταση ίση με $\sqrt{2}$ και μόνο από αυτούς. Επομένως, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $K(2,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$, δηλαδή ο κύκλος

$$(x-2)^2+(y-2)^2=2.$$



β) Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας $M(z)$ από την αρχή $O(0,0)$, δηλαδή το μήκος (OM). Από τη Γεωμετρία, όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο στα A και B, τότε $(OA)\leq(OM)\leq(OB)$, που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA).

Η εξίσωση, όμως, της ευθείας OK είναι η $y=x$.

Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων A και B θα είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=2\\ y=x\end{cases},$$

που είναι τα ζεύγη $(1,1)$ και $(3,3)$. Άρα, η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με $(OB)=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ και η ελάχιστη ίση με $(OA)=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$1+i$, $\quad 1-i$, $\quad 3+4i$, $\quad 3-4i$, $\quad -5i$, $\quad -4$, $\quad \dfrac{1+i}{1-i}$,

$(1-i)^2\cdot(1+i)^4$, $\quad (2-i)\cdot(1+2i)$ $\quad$ και $\quad \dfrac{3+i}{4-3i}$.

2. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$(1+i)^2$, $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$, $\left(\dfrac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2$, όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ με $|\lambda|+|\mu|\neq 0$.

3. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$ για τους οποίους ισχύει:

α) $|z^2| = z^2$ β) $|z-1| = z$ γ) $|z+i| = 2\bar{z}$.

4. Να βρείτε πού ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:

α) $|z| = 1$ β) $|z-i| = 1$

γ) $|z+1+2i| = 3$ δ) $1 < |z| < 2$

ε) $|z| \geq 2$.

5. Να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

α) $|z+1| = |z-2i|$ β) $|z-i| > |z+1|$

6. Αν $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z, όπου $z = \dfrac{1+xi}{x+i}$.

7. Από τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύει $|z-4i| = 2$, ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο;

8. Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w = 2z+1$.

9. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 .$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει:

$$\sqrt{2}\cdot|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| .$$

2. Έστω ο μιγαδικός z, για τον οποίο ισχύει $z \neq -1$. Να αποδείξετε ότι: Αν $|z| = 1$, τότε ο $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός αριθμός και αντιστρόφως.

3. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι: Ο $w = z + \dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

4. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq \alpha i$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι: ο $w = \dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

5. Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=1$, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w=\dfrac{2z-i}{iz+2}$.

6. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|2z-1|=|z-2|$, να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

7. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|1+z|^2+|1-z|^2$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.

8. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει: $|z+1|=|z+4i|$. Ποιο από τα σημεία M απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή $O(0,0)$.

9. Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως και $z_2=z_1+\dfrac{4}{z_1}$, να αποδείξετε ότι: Όταν το M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 4, τότε το M_2 κινείται σε μια έλλειψη.

10. α) Αν $|z|=1$, να δείξετε ότι $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$.

β) Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \ldots, z_\kappa$ ισχύει $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_\kappa|=1$,

να αποδείξετε ότι: $|z_1+z_2+\ldots+z_\kappa|=\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\ldots+\dfrac{1}{z_\kappa}\right|$.

2.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

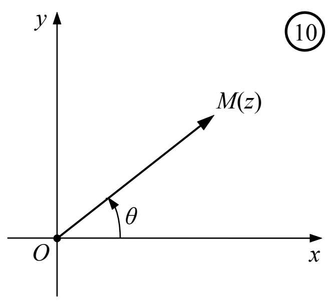
Εισαγωγή

Η αποδοχή των μιγαδικών αριθμών, εκτός από τις δυνατότητες που άνοιξε στην επίλυση των εξισώσεων, έδωσε μεγάλη ευελιξία στον αλγεβρικό λογισμό. Για παράδειγμα, η παράσταση x^2+y^2 μπορεί τώρα να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $(x+yi)(x-yi)$. Οι μαθηματικοί εκμεταλλεύτηκαν αυτό το γεγονός σε πολλά ζητήματα, όπως είναι, για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση των τόξων ενός κύκλου. Το 1739 ο A. de Moivre, συνδυάζοντας τον υπολογισμό των κυβικών ριζών παραστάσεων της μορφής $a+i\sqrt{\beta}$ (που εμφανίζονται στον τύπο επίλυσης της $x^3=px+q$) με την τριγωνομετρική ταυτότητα $3\eta\mu\theta-4\eta\mu^3\theta=\eta\mu 3\theta$, έδωσε τις πρώτες ιδέες για την τριγωνομετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών. Το 1748 ο L. Euler, ξεκινώντας από την ανάλυση της ισότητας $\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$ στη μορφή $(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)(\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta)=1$, τόνισε τη σημασία των παραστάσεων της μορφής $\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$ και έδειξε ότι $(\sigma\upsilon\nu x+i\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu y+i\eta\mu y)=\sigma\upsilon\nu(x+y)+i\eta\mu(x+y)$. Γενικεύοντας έφτασε στη σχέση $(\sigma\upsilon\nu z\pm i\eta\mu z)^n=\sigma\upsilon\nu nz\pm i\eta\mu nz$ (που σήμερα φέρει το όνομα του de Moivre), από την οποία, με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος, βρήκε τύπους για τα $\eta\mu nz$ και $\sigma\upsilon\nu nz$.

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις οι μιγαδικοί αντιμετωπίζονταν ως καθαρά συμβολικές παραστάσεις, που δεν απεικόνιζαν κάποια συγκεκριμένη πραγματικότητα. Η τριγωνομετρική παράσταση έδωσε όμως τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν (από τον C. Wessel το 1799 και τον R. Argand το 1806) για την αναλυτική έκφραση της διεύθυνσης στο επίπεδο, ακριβώς όπως οι θετικοί και αρνητικοί χρησιμοποιούνται για τη διάκριση της φοράς στην ευθεία. Αυτές οι εξελίξεις διεύρυναν τις εφαρμογές των μιγαδικών και άνοιξαν το δρόμο για τη γεωμετρική ερμηνεία τους, την οποία καθιέρωσε ο C.F. Gauss το 1831.

Όρισμα Μιγαδικού

Έστω ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z=x+yi$ και $\overrightarrow{OM}$ η αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα του.



10

Ονομάζουμε **όρισμα** του μιγαδικού z καθεμιά από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM.

Από όλα τα ορίσματα του z ένα ακριβώς βρίσκεται στο διάστημα $[0,2\pi)$. Αυτό λέγεται **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού z και συμβολίζεται με $\boldsymbol{Arg(z)}$. Είναι φανερό ότι:

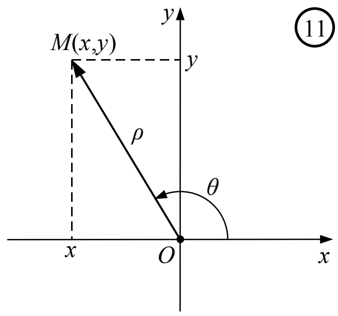
- Το $Arg(z)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z με τον άξονα $x'x$.
- Δυο ορίσματα του z διαφέρουν κατά γωνία $2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Για το μιγαδικό $z=0$ δεν ορίζεται όρισμα. Γι'αυτό, στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε όρισμα μιγαδικού, θα εννοούμε ότι $z\neq 0$.

Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού

Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi \neq 0$, που έχει μέτρο $\boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$. Αν θ είναι ένα όρισμα του z, τότε, από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθοκανονικό σύστημα, έχουμε

$$\textbf{συν}\boldsymbol{\theta = \frac{x}{\rho}} \qquad \text{και} \qquad \textbf{ημ}\boldsymbol{\theta = \frac{y}{\rho}}$$



οπότε

$$x = \rho\text{συν}\theta \qquad \text{και} \qquad y = \rho\text{ημ}\theta$$

Επομένως, ο μιγαδικός z γράφεται

$$z = x + yi = \rho\text{συν}\theta + \rho\text{ημ}\theta \cdot i,$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή

$$\boxed{z = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)}$$

Ο τρόπος αυτός γραφής του μιγαδικού z λέγεται **τριγωνομετρική** ή **πολική μορφή του** $\boldsymbol{z}$.

Για παράδειγμα, αν $z = -\sqrt{3} + i$, τότε το μέτρο του z είναι $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ και για κάθε όρισμά του θ ισχύουν:

$$\text{συν}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{και} \qquad \text{ημ}\theta = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, μια τιμή του ορίσματος είναι η $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Άρα, έχουμε $z = 2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6} + i\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right)$ ή γενικότερα:

$$z = 2\left[\text{συν}\left(2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + i\text{ημ}\left(2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right], \qquad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Αποδεικνύεται ότι, αν για έναν μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z = r(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$, όπου $r > 0$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε η παράσταση $r(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$ είναι τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού z.

Επειδή ίσοι μιγαδικοί αριθμοί έχουν την ίδια εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο και αντιστρόφως, έχουμε το ακόλουθο κριτήριο ισότητας μιγαδικών:

“Δυο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π”.

Δηλαδή:

> Αν $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ είναι τριγωνομετρικές μορφές των μιγαδικών z_1 και z_2, τότε:
>
> $$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\,\rho_1 = \rho_2 \quad \text{και} \quad \theta_1 - \theta_2 = \kappa \cdot 2\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}).$$

Τριγωνομετρική Μορφή Γινομένου Μιγαδικών

Αν $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ είναι οι τριγωνομετρικές μορφές δύο μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2, τότε για το γινόμενό τους έχουμε:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)\cdot \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2[(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)\cdot(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[(\text{συν}\theta_1\text{συν}\theta_2 - \text{ημ}\theta_1\text{ημ}\theta_2) + i(\text{ημ}\theta_1\text{συν}\theta_2 + \text{συν}\theta_1\text{ημ}\theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\text{συν}(\theta_1 + \theta_2) + i\text{ημ}(\theta_1 + \theta_2)]\,. \end{aligned}$$

Ομοίως, για το πηλίκο τους $\dfrac{z_1}{z_2}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)}{\rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)]} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\,\frac{(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)(\text{συν}\theta_2 - i\text{ημ}\theta_2)}{(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)(\text{συν}\theta_2 - i\text{ημ}\theta_2)]} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\,\frac{(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)[\text{συν}(\text{-}\theta_2) + i\text{ημ}(\text{-}\theta_2)]}{\text{συν}^2\theta_2 + \text{ημ}^2\theta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{συν}(\theta_1 - \theta_2) + i\text{ημ}(\theta_1 - \theta_2)]\,. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

> Αν $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ είναι δυο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε
>
> $$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\text{συν}(\theta_1 + \theta_2) + i\text{ημ}(\theta_1 + \theta_2)]$$
>
> $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{συν}(\theta_1 - \theta_2) + i\text{ημ}(\theta_1 - \theta_2)]\,.$$

Για παράδειγμα, αν $z_1 = 2\left(\text{συν}\dfrac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\dfrac{2\pi}{3}\right)$ και $z_2 = 3\left(\text{συν}\dfrac{11\pi}{6} + i\text{ημ}\dfrac{11\pi}{6}\right)$, τότε έχουμε:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3\left[\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right)+i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right)\right] = 6\left(\text{συν}\frac{5\pi}{2}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{2}\right) = 6i$$

και

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left[\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}\right)+i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\text{συν}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)+i\text{ημ}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)\right]$$

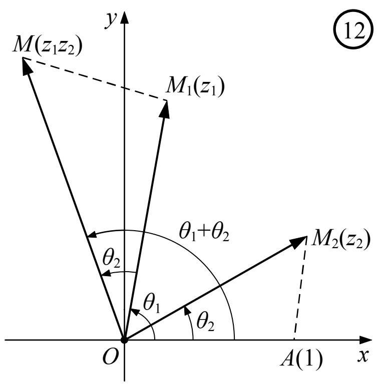
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3}+i\frac{1}{3}.$$

Από τις τριγωνομετρικές μορφές του γινομένου και του πηλίκου μιγαδικών προκύπτουν οι ιδιότητες

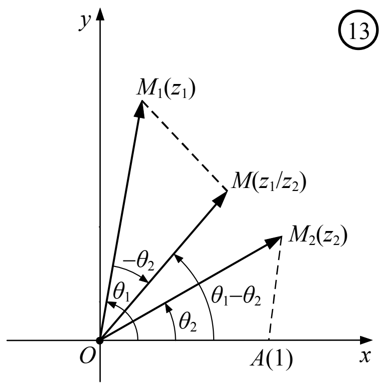
$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \quad \text{και} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

τις οποίες έχουμε συναντήσει και στην § 2.3.

Η γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Τα τρίγωνα OAM_2 και OM_1M είναι όμοια



Τα τρίγωνα OAM_2 και OMM_1 είναι όμοια

Σύμφωνα με τα παραπάνω:

- Ο πολλαπλασιασμός του μιγαδικού $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία θ_2 και μετά πολλαπλασιασμό της με ρ_2 (Σχ. 12). Επομένως, ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού z με το μιγαδικό $\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta$ στρέφει μόνο τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία θ, αφού $|\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta|=1$. Ειδικότερα, ο πολλαπλασιασμός του z με i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$, αφού $i=\text{συν}\frac{\pi}{2}+i\text{ημ}\frac{\pi}{2}$.

● Η διαίρεση του μιγαδικού $z_1 = (\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία $-\theta_2$ και μετά πολλαπλασιασμό της με $\dfrac{1}{\rho_2}$ (Σχ. 13).

Θεώρημα του De Moivre

Αν $z = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή, σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$z^2 = z \cdot z = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)\rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta) = \rho^2(\text{συν}2\theta + i\text{ημ}2\theta)\cdot$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2(\text{συν}2\theta + i\text{ημ}2\theta)\rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta) = \rho^3(\text{συν}3\theta + i\text{ημ}3\theta)\cdot$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι

$$z^4 = \rho^4(\text{συν}4\theta + i\text{ημ}4\theta)\cdot$$

$$z^5 = \rho^5(\text{συν}5\theta + i\text{ημ}5\theta)\cdot$$

Γενικά, ισχύει το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν $z = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και ν είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$z^\nu = \rho^\nu[\text{συν}(\nu\theta) + i\text{ημ}(\nu\theta)].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu=1$ η ισότητα γίνεται $z^1 = \rho^1[\text{συν}(1\cdot\theta) + i\text{ημ}(1\cdot\theta)]$ ή, ισοδύναμα, $z = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$, που ισχύει. Άρα η $P(1)$ είναι αληθής.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν $P(\nu)$ αληθής, τότε $P(\nu+1)$ αληθής δηλαδή, αν $z^\nu = \rho^\nu[\text{συν}(\nu\theta) + i\text{ημ}(\nu\theta)]$, τότε $z^{\nu+1} = \rho^{\nu+1}[\text{συν}(\nu+1)\theta + i\text{ημ}(\nu+1)\theta]$.

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} z^{\nu+1} = z^\nu \cdot z &= \rho^\nu[\text{συν}(\nu\theta) + i\text{ημ}(\nu\theta)]\cdot\rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta) \\ &= \rho^{\nu+1}[\text{συν}(\nu+1)\theta + i\text{ημ}(\nu+1)\theta]. \end{aligned}$$

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν. ■

Για παράδειγμα, αν $z=\sqrt{3}+i$, επειδή $z=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)$, έχουμε:

$$z^{1998}=\left[2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)\right]^{1998}=2^{1998}\left(\text{συν}\frac{1998\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{1998\pi}{6}\right)$$

$$=2^{1998}(\text{συν}333\pi+i\text{ημ}333\pi)=2^{1998}(\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi)=-2^{1998}.$$

Το προηγούμενο θεώρημα αποδίδεται στο μαθηματικό **De Moivre** και γι' αυτό φέρει το όνομά του.

Το Θεώρημα του De Moivre ισχύει και όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός ακέραιος.

Πράγματι, έχουμε

$$[\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)]^{-\nu}=\frac{1}{\rho^{\nu}(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^{\nu}}$$

$$=\frac{1\cdot(\text{συν}0+i\text{ημ}0)}{\rho^{\nu}\cdot(\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta))}$$

$$=\rho^{-\nu}[\text{συν}(0-\nu\theta)+i\text{ημ}(0-\nu\theta)]$$

$$=\rho^{-\nu}[\text{συν}(-\nu\theta)+i\text{ημ}(-\nu\theta)].$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{6}$.

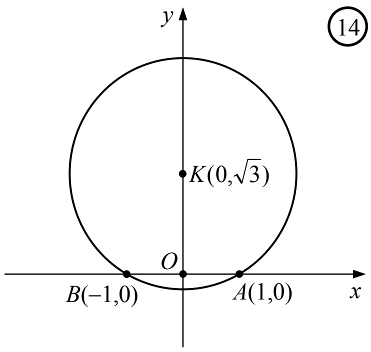
ΛΥΣΗ

Αν $z=x+yi$, τότε $\frac{z-1}{z+1}=\frac{(x-1)+yi}{(x+1)+yi}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i$.

Άρα,

$$\frac{z-1}{z+1}=A+Bi,\quad \text{όπου}\quad A=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}\quad \text{και}\quad B=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

Επομένως, η συνθήκη $Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{6}$ είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις:



$$\begin{cases} \frac{B}{A}=\text{εφ}\frac{\pi}{6} \\ B>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x^2+y^2-1}=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-\sqrt{3})^2=2^2 \\ y>0 \end{cases}.$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι το τόξο του κύκλου κέντρου $K(0,\sqrt{3})$ και ακτίνας $\rho=2$ που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

2. **Αν $\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma=0$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma=0$, να αποδειχτεί ότι**

α) $\sigma\upsilon\nu3\alpha+\sigma\upsilon\nu3\beta+\sigma\upsilon\nu3\gamma=3\,\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta+\gamma)$

β) $\eta\mu3\alpha+\eta\mu3\beta+\eta\mu3\gamma=3\,\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)$.

ΛΥΣΗ

Έστω οι μιγαδικοί $a=\sigma\upsilon\nu\alpha+i\eta\mu\alpha$, $b=\sigma\upsilon\nu\beta+i\eta\mu\beta$, $c=\sigma\upsilon\nu\gamma+i\eta\mu\gamma$. Έχουμε

$$a+b+c=(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma)+i(\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma)=0+0i=0$$

και επομένως, $a^3+b^3+c^3=3abc$.
Με αντικατάσταση των a,b και c έχουμε διαδοχικά:

$$(\sigma\upsilon\nu\alpha+i\eta\mu\alpha)^3+(\sigma\upsilon\nu\beta+i\eta\mu\beta)^3+(\sigma\upsilon\nu\gamma+i\eta\mu\gamma)^3=$$

$$=3(\sigma\upsilon\nu\alpha+i\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\beta+i\eta\mu\beta)(\sigma\upsilon\nu\gamma+i\eta\mu\gamma)$$

$$(\sigma\upsilon\nu3\alpha+i\eta\mu3\alpha)+(\sigma\upsilon\nu3\beta+i\eta\mu3\beta)+(\sigma\upsilon\nu3\gamma+i\eta\mu3\gamma)=$$

$$=3[\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)+i\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$(\sigma\upsilon\nu3\alpha+\sigma\upsilon\nu3\beta+\sigma\upsilon\nu3\gamma)+i(\eta\mu3\alpha+\eta\mu3\beta+\eta\mu3\gamma)=$$

$$=3\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)+i3\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma).$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των δύο μελών έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu3\alpha+\sigma\upsilon\nu3\beta+\sigma\upsilon\nu3\gamma=3\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma) \quad \text{και}$$

$$\eta\mu3\alpha+\eta\mu3\beta+\eta\mu3\gamma=3\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς:

α) $1+\sqrt{3}i$ β) $1-\sqrt{3}i$

γ) $-1-\sqrt{3}i$ δ) $-1+\sqrt{3}i$

ε) 4 στ) -4.

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $4(\text{συν}15^0+i\text{ημ}15^0)\cdot 6(\text{συν}30^0+i\text{ημ}30^0)$

β) $5\left(\text{συν}\frac{\pi}{8}+i\text{ημ}\frac{\pi}{8}\right)\cdot 2\left(\text{συν}\frac{3\pi}{8}+i\text{ημ}\frac{3\pi}{8}\right)$

γ) $\left(\text{συν}\frac{2\pi}{10}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{10}\right)\cdot\left(\text{συν}\frac{3\pi}{10}+i\text{ημ}\frac{3\pi}{10}\right)$.

3. Να κάνετε τις πράξεις

α) $\dfrac{25(\text{συν}160^0+i\text{ημ}160^0)}{5(\text{συν}100^0+i\text{ημ}100^0)}$ β) $\dfrac{6\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right)}{\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}}$

γ) $\dfrac{7(\text{συν}130^0+i\text{ημ}130^0)}{14(\text{συν}(-20^0)+i\text{ημ}(-20^0))}$.

4. Να βρείτε τις δυνάμεις

α) $[2(\text{συν}20^0+i\text{ημ}20^0)]^3$ β) $\left[3\left(\text{συν}\frac{5\pi}{4}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{4}\right)\right]^8$

γ) $\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{16}$.

5. Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}$.

6. Αν $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, να υπολογίσετε τον z^{2000}.

7. Αν $z_1=\sqrt{3}+i$ και $z_2=\sqrt{3}-i$, να υπολογίσετε την παράσταση $z_1^\nu+z_2^\nu$, όπου ν θετικός ακέραιος.

8. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη διαίρεση ενός μιγαδικού z με i.

9. Αν $z=1+i\sqrt{3}$ και $w=1+i$, να δείξετε ότι $Arg\left(\dfrac{z}{w}\right)=\dfrac{\pi}{12}$ και να βρείτε το ημ$\dfrac{\pi}{12}$ και το συν$\dfrac{\pi}{12}$.

10. Να βρείτε το μέτρο και το βασικό όρισμα του μιγαδικού $z\neq 0$ αν $z^2=\bar{z}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Να βρείτε το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού w, όπου

$$w=\left(\frac{1+\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta}{1+\text{συν}\theta-i\text{ημ}\theta}\right)^\nu,\ \nu\in\mathbb{N}^*\ \text{και}\ \theta\neq(2\kappa+1)\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{100}$.

2. α) Να δείξετε ότι αν $(1+i)^\nu=(1-i)^\nu$, όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$ τότε $\nu=4\kappa,\ \kappa\in\mathbb{N}$

β) Αν $f(\nu)=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^\nu+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^\nu$, να δείξετε ότι $f(\nu+4)+f(\nu)=0$.

3. Να αποδείξετε ότι

$$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|,\ \text{αν και μόνο αν}\ Arg(z_1)=Arg(z_2).$$

4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:

α) $Arg(z-i)=\dfrac{\pi}{6}$ β) $Arg(z+1)=\dfrac{\pi}{4}$ γ) $Arg\left(\dfrac{z}{z-i}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

5. Μεταξύ όλων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη συνθήκη $|z+2-5i|\leq 2$, να βρείτε εκείνον που έχει:

α) Το μικρότερο πρωτεύον όρισμα

β) Το μεγαλύτερο πρωτεύον όρισμα.

6. Αν $z = συνθ + iημθ$, να αποδείξετε ότι:

α) $z^ν + \frac{1}{z^ν} = 2συν(νθ)$ β) $z^ν - \frac{1}{z^ν} = 2iημ(νθ)$.

7. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν $|z| = 1$ και $w = (\sqrt{3} - i)z$, τότε:

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w.

β) Να βρείτε την εικόνα εκείνου του μιγαδικού από τους w, για τον οποίο ισχύει $Arg(w) = \frac{\pi}{4}$.

8. Αν $z = \frac{1-κ^2}{1+κ^2} + i\frac{2κ}{1+κ^2}$ και $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $κ$

9. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2|z_1 - z_2|x + (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$, όπου z_1 και z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.5 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{C}$

Εισαγωγή

Η επίλυση των εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού, η “αναγκαστική” επαφή με τους μιγαδικούς αριθμούς για την έκφραση των πραγματικών ριζών και η εξέλιξη του αλγεβρικού λογισμού δημιούργησαν στις αρχές του 17ου αιώνα τις προϋποθέσεις για την ανάπτυξη μιας γενικής θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων στην Άλγεβρα. Βασικά στοιχεία αυτής της θεωρίας δεν ήταν μόνο οι μέθοδοι επίλυσης, αλλά και δομικά ζητήματα, όπως οι σχέσεις ριζών και συντελεστών μιας εξίσωσης, καθώς και η σχέση ανάμεσα στο βαθμό και στο πλήθος των ριζών. Το τελευταίο, που καθιερώθηκε αργότερα ως **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**

“κάθε πολυωνυμική εξίσωση ν βαθμού έχει στο σύνολο των μιγαδικών ν ακριβώς ρίζες”,

διατυπώνεται στην αρχή διστακτικά, καθώς οι μιγαδικοί δε θεωρούνται ακόμη ισότιμοι προς τους υπόλοιπους αριθμούς. Ο R. Descartes, στο βιβλίο III της “La Geometrie” (1637) γράφει ότι: “κάθε εξίσωση μπορεί να έχει τόσες διαφορετικές ρίζες όσες και οι διαστάσεις [δηλ. ο βαθμός] της άγνωστης ποσότητας στην εξίσωση”, αλλά ονομάζει τις θετικές ρίζες “αληθινές”, τις αρνητικές “ψεύτικες” και εισάγει για πρώτη φορά τον όρο “φανταστικές” για τις υπόλοιπες:

> *"...ενώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ έχει τρεις ρίζες, εν τούτοις υπάρχει μία μόνο πραγματική ρίζα, το 2, ενώ οι άλλες δύο παραμένουν φανταστικές".*

Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας άρχισε να αποκτά εξαιρετική σημασία με την ανάπτυξη της Ανάλυσης, καθώς η παραγοντοποίηση των πολυωνύμων έπαιζε πρωταρχικό ρόλο στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων (διάσπαση ρητών κλασμάτων σε απλά κλάσματα). Ο G.W. Leibniz έθεσε το 1702 αυτό το ζήτημα ισχυριζόμενος (λαθεμένα) ότι το πολυώνυμο $x^4 + \alpha^4$ δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Το γεγονός αυτό οδήγησε στις πρώτες συστηματικές προσπάθειες να αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού, που αποτελεί μια άλλη ισοδύναμη μορφή του θεμελιώδους θεωρήματος. Ύστερα από ορισμένες ημιτελείς προσπάθειες των d'Alembert (1746), L. Euler (1749) και J.L. Lagrange (1772), ο C.F. Gauss έδωσε την πρώτη αυστηρή απόδειξη το 1799 (σε ηλικία 22 χρονών), στη διδακτορική του διατριβή που είχε τίτλο: "Νέα απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε ακέραια ρητή συνάρτηση μιας μεταβλητής μπορεί να αναλυθεί σε πραγματικούς παράγοντες πρώτου και δεύτερου βαθμού".

Η Εξίσωση $z^\nu = 1$

Γνωρίζουμε ότι στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση $z^\nu = 1$ έχει μια λύση, την $z = 1$, αν ο ν είναι περιττός και δύο λύσεις, τις $z = 1$ και $z = -1$, αν ο ν είναι άρτιος.

Ας λύσουμε τώρα στο σύνολο $\Re$ των μιγαδικών αριθμών μερικές εξισώσεις της μορφής $z^\nu = 1$, όπου ν θετικός ακέραιος. Έχουμε:

- $$\begin{aligned} z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1 = 0 &\Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z - 1 = 0 \text{ ή } z^2 + z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \text{ ή } z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ή } z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

δηλαδή η εξίσωση έχει στο $\Re$ τρεις ρίζες.

- $$\begin{aligned} z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 - 1 = 0 &\Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad z^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ή} \quad z = i \quad \text{ή} \quad z = i \quad \text{ή} \quad z = -i, \end{aligned}$$

δηλαδή η εξίσωση έχει στο σύνολο $\Re$ τέσσερις λύσεις.

Γενικά ισχύει το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

> Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $z^\nu = 1$, όπου ν θετικός ακέραιος, έχει ν ακριβώς διαφορετικές λύσεις, οι οποίες δίνονται από τον τύπο:
>
> $$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}, \qquad \kappa = 0,1,2,3,\ldots,\nu-1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $r(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$ μια λύση, σε τριγωνομετρική μορφή, της εξίσωσης $z^\nu = 1$. Τότε,

$$[r(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)]^\nu = 1,$$

οπότε

$$r^\nu(\text{συν}(\nu\theta) + i\text{ημ}(\nu\theta)) = \text{συν}0 + i\text{ημ}0$$

Άρα, $r^\nu = 1$ και $\nu\theta - 0 = 2\kappa\pi$, για κάποιο $\kappa \in \mathbb{Z}$, οπότε $r = 1$ και $\theta = \frac{2\kappa\pi}{\nu}$. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $z^\nu = 1$, θα είναι της μορφής

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Αλλά και *αντιστρόφως*, κάθε μιγαδικός της μορφής $z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $z^\nu = 1$, αφού

$$z_\kappa = \left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}\right)^\nu = \text{συν}(2\kappa\pi) + i\text{ημ}(2\kappa\pi) = 1.$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης $z^\nu = 1$ είναι όλοι οι αριθμοί της μορφής

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Για $\kappa = 0$ έχουμε την προφανή λύση $z_0 = 1$.

Αν θέσουμε $z_1 = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) = \omega$, τότε για τις ρίζες της $z^\nu = 1$, θα ισχύει:

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu} = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^\kappa = \omega^\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Είναι λοιπόν:

$$
\begin{array}{lllll}
z_0 = 1 & z_\nu = \omega^\nu & & = 1 & \\
z_1 = \omega & z_{\nu+1} = \omega^{\nu+1} & = \omega^\nu \cdot \omega & = \omega & \\
z_2 = \omega^2 & z_{\nu+2} = \omega^{\nu+2} & = \omega^\nu \cdot \omega^2 & = \omega^2 & \text{κ.τ.λ.} \\
\vdots & \vdots & & & \\
z_{\nu-1} = \omega^{\nu-1} & z_{2\nu-1} = \omega^{2\nu-1} & = \omega^\nu \cdot \omega^{\nu-1} & = \omega^{\nu-1} &
\end{array}
$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι λύσεις της $z^\nu = 1$ που δίνονται από την (1) δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του κ έχουμε διαφορετικές λύσεις. Επειδή για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$ υπάρχουν ακέραιοι ρ και υ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\kappa = \rho\nu + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < \nu$, έχουμε:

$$\omega^\kappa = \omega^{\rho\nu+\upsilon} = (\omega^\nu)^\rho \cdot \omega^\upsilon = 1 \cdot \omega^\upsilon = \omega^\upsilon .$$

Δηλαδή, για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$ η λύση z_κ ταυτίζεται με μια από τις

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ ...,\ \omega^{\nu-1}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι οι λύσεις $1 = \omega^0,\ \omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3,\ ...,\ \omega^{\nu-1}$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Έστω ότι δε συμβαίνει αυτό. Τότε θα υπάρχουν φυσικοί λ_1, λ_2 με $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \nu$, τέτοιοι, ώστε $\omega^{\lambda_1} = \omega^{\lambda_2}$, οπότε θα έχουμε διαδοχικά:

$$
\begin{aligned}
\text{συν}\frac{2\lambda_1\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\lambda_1\pi}{\nu} &= \text{συν}\frac{2\lambda_2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\lambda_2\pi}{\nu} \\
\frac{2\lambda_1\pi}{\nu} - \frac{2\lambda_1\pi}{\nu} &= \mu \cdot 2\pi, \quad \text{για κάποιο} \quad \mu \in \mathbb{Z} \\
\lambda_1 - \lambda_2 &= \nu\mu, \qquad \text{για κάποιο} \quad \mu \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

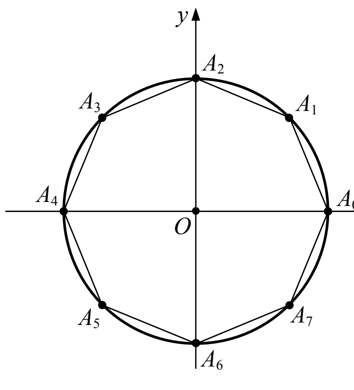
Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ο ακέραιος ν διαιρεί τη διαφορά $\lambda_1 - \lambda_2$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $0 < \lambda_1 - \lambda_2 < \nu$. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $z^\nu = 1$ είναι οι ν διαφορετικοί αριθμοί

$$\mathbf{1, \omega, \omega^2, \omega^3, ..., \omega^{\nu-1}}, \qquad \text{όπου} \qquad \boldsymbol{\omega} = \textbf{συν}\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{\nu}}\right) + \boldsymbol{i}\textbf{ημ}\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{\nu}}\right).$$

Οι λύσεις αυτές λέγονται και **νιοστές ρίζες της μονάδας**. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Οι εικόνες $A_0, A_1, A_2, ..., A_{\nu-1}$ των λύσεων $1, \omega, \omega^2, \omega^3, ..., \omega^{\nu-1}$ της εξίσωσης $z^\nu = 1$ είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές, εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $r = 1$. Πιο συγκεκριμένα:



15

— Η κορυφή A_0 παριστάνει τη λύση 1.

— Η επόμενη κορυφή A_1 παριστάνει τη λύση $\omega = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$.

— Η κορυφή A_2 παριστάνει την ω^2 και προκύπτει από την ω με στροφή του διανύσματος $\overrightarrow{OA_1}$ κατά γωνία $\frac{2\pi}{\nu}$, δηλαδή κατά γωνία ίση με την κεντρική γωνία του κανονικού ν-γωνου.

— Η κορυφή A_3 παριστάνει την ω^3 και προκύπτει από την ω με στροφή του διανύσματος $\overrightarrow{OA_1}$ κατά γωνία $\frac{2\cdot 2\pi}{\nu}$ κτλ.

Η Εξίσωση $z^\nu = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \neq 0$

Έστω $\mathbf{a} = \boldsymbol{\rho}(\textbf{συν}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{i}\textbf{ημ}\boldsymbol{\theta})$ μια τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού a. Τότε από τον τύπο του de Moivre έχουμε:

$$\mathbf{a} = \left(\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\rho}}\left(\textbf{συν}\frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{i}\textbf{ημ}\frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\nu}}\right)\right)^\nu .$$

Αν θέσουμε $z_0 = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{\theta}{\nu} + i\text{ημ}\frac{\theta}{\nu}\right)$, τότε η εξίσωση $z^\nu = a$ γράφεται $z^\nu = z_0^\nu$ ή, ισοδύναμα,

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^\nu = 1$$

Επομένως, το $\frac{z}{z_0}$ μπορεί να πάρει τις ν διαφορετικές τιμές

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{\nu-1}, \qquad \text{όπου} \qquad \omega = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right),$$

οπότε οι λύσεις της εξίσωσης $z^\nu = a$ είναι οι αριθμοί

$$z_\kappa = z_0 \cdot \omega^\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{\theta}{\nu} + i\text{ημ}\frac{\theta}{\nu}\right) \cdot \left[\text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi}{\nu}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\kappa\pi}{\nu}\right)\right]$$

$$= \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu}\right), \ \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1 .$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $z^{\nu} = \mathrm{a}$, όπου ν θετικός ακέραιος και $\mathrm{a} = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$, $\rho = \alpha$, έχει ν διαφορετικές λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_{\kappa} = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu}\right), \qquad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu - 1.$$

Οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $z^{\nu} = \mathrm{a}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές, εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt[\nu]{\rho}$, όπου $\rho = |\mathrm{a}|$.

Έστω για παράδειγμα η εξίσωση

$$z^5 = 16(\sqrt{3} + i). \qquad (1)$$

Επειδή $16(\sqrt{3} + i) = 32\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + i\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)$, οι λύσεις z_{κ} της εξίσωσης (1) δίδονται από τον τύπο

$$z_{\kappa} = \sqrt[5]{32}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}}{5} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}}{5}\right) = 2\left(\text{συν}\frac{12\kappa\pi + \pi}{30} + i\text{ημ}\frac{12\kappa\pi + \pi}{30}\right), \ \kappa = 0,1,2,3,4.$$

Πιο συγκεκριμένα οι λύσεις είναι:

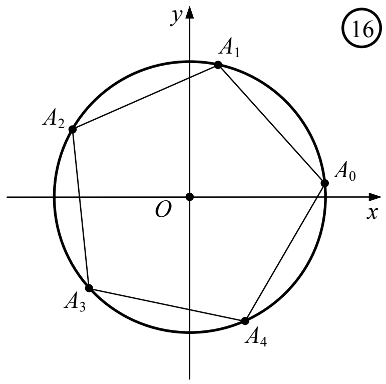
$$z_0 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{30} + i\text{ημ}\frac{\pi}{30}\right),$$

$$z_1 = 2\left(\text{συν}\frac{13\pi}{30} + i\text{ημ}\frac{13\pi}{30}\right),$$

$$z_2 = 2\left(\text{συν}\frac{25\pi}{30} + i\text{ημ}\frac{25\pi}{30}\right),$$

$$z_3 = 2\left(\text{συν}\frac{37\pi}{30} + i\text{ημ}\frac{37\pi}{30}\right),$$

$$z_4 = 2\left(\text{συν}\frac{49\pi}{30} + i\text{ημ}\frac{49\pi}{30}\right).$$



16

Οι λύσεις αυτές είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $\rho = 2$.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις με Πραγματικούς Συντελεστές

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, κάθε πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$, νιοστού βαθμού, δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_{\nu}z^{\nu} + \alpha_{\nu-1}z^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \qquad \alpha_{\nu} \neq 0,$$

έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ν ακριβώς ρίζες.
Αν $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$ (οι οποίες δεν είναι κατανάγκη διαφορετικές), τότε αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής:

$$\boldsymbol{P(z) = \alpha_\nu (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_\nu)}$$

Επομένως, η επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων στο $\Re$ γίνεται με τις ίδιες μεθόδους που χρησιμοποιούνται και στο σύνολο ∇ των πραγματικών αριθμών.

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε πολυωνυμικές εξισώσεις με πραγματικούς μόνο συντελεστές.
Έχουμε ήδη λύσει τη δευτεροβάθμια εξίσωση, η οποία, όπως είδαμε, έχει δύο ρίζες, οι οποίες, αν δεν είναι πραγματικές, είναι μιγαδικές συζυγείς. Ας λύσουμε τώρα μία ανωτέρου βαθμού, για παράδειγμα την $z^3 - 3z^3 + 5z - 3 = 0$, που είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού. Με σχήμα Horner έχουμε:

$$z^3 - 3z^2 + 5z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 2z + 3)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 3 = 0 \quad \text{ή} \quad z - 1 = 0 .$$

Όμως,

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = 1 + \sqrt{2}i \qquad \text{ή} \qquad z = 1 - \sqrt{2}i .$$

Άρα, οι ρίζες της εξίσωσης είναι $1 + \sqrt{2}i$, $1 - \sqrt{2}i$ και 1. Και στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι οι μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης είναι συζυγείς. Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται για οποιαδήποτε πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Αν ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = \alpha + \beta i$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με **πραγματικούς συντελεστές**, τότε και ο συζυγής του $\bar{z}_0 = \alpha - \beta i$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Μια πολυωνυμική εξίσωση, όπως γνωρίζουμε, έχει τη μορφή:

$$\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0 \text{, όπου } \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in \nabla \text{ με } \alpha_\nu \neq 0 .$$

Αφού ο αριθμός z_0 είναι ρίζα της εξίσωσης, έχουμε κατά σειρά:

$$\alpha_\nu z_0^\nu + \alpha_{\nu-1} z_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0 = 0$$

$$\overline{\alpha_\nu z_0^\nu + \alpha_{\nu-1} z_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0} = \overline{0}$$

$$\overline{\alpha_\nu z_0^\nu} + \overline{\alpha_{\nu-1} z_0^{\nu-1}} + \cdots + \overline{\alpha_1 z_0} + \overline{\alpha}_0 = 0$$

$$\overline{\alpha}_\nu \overline{z_0^\nu} + \overline{\alpha}_{\nu-1} \overline{z_0^{\nu-1}} + \cdots + \overline{\alpha}_1 \overline{z}_0 + \overline{\alpha}_0 = 0$$

$$\alpha_\nu \bar{z}_0^\nu + \alpha_{\nu-1}\bar{z}_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 \bar{z}_0 + \alpha_0 = 0, \text{ αφού } \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}.$$

Άρα, ο z_0 είναι και αυτός ρίζα της εξίσωσης. ■

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν $\omega = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$, να αποδειχτεί ότι:

α) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{\nu-1} = 0$ β) $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \cdot \ldots \cdot \omega^{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) Έχουμε $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{\nu-1} = \frac{1-\omega^\nu}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0$

β) $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \cdot \ldots \cdot \omega^{\nu-1} = \omega^{1+2+3+\ldots+(\nu-1)}$

$$= \omega^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$$

$$= \left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$$

$$= \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\nu(\nu-1)}{2\nu} + i\eta\mu\frac{2\pi\nu(\nu-1)}{2\nu}$$

$$= \sigma\upsilon\nu(\nu-1)\pi + i\eta\mu(\nu-1)\pi$$

$$= (\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi)^{\nu-1}$$

$$= (-1)^{\nu-1}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x + 1 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής, να κατασκευαστεί εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τις x_1^ν, x_2^ν.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\Delta = 4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 4 = 4(\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1) = -4\eta\mu^2\theta \le 0$. Επομένως,

$$x_{1,2} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\theta \pm 2\eta\mu\theta \cdot i}{2} = \sigma\upsilon\nu\theta \pm i\eta\mu\theta.$$

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι η

$$x^2 - (x_1^\nu + x_2^\nu)x + x_1^\nu \cdot x_2^\nu = 0.$$

Έχουμε

$$x_1^\nu = (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^\nu = \sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta)$$

και

$$x_2^\nu = (\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta)^\nu = [\sigma\upsilon\nu(-\theta) + i\eta\mu(-\theta)]^\nu = \sigma\upsilon\nu(-\nu\theta) + i\eta\mu(-\nu\theta)$$

$$= \sigma\upsilon\nu(\nu\theta) - i\eta\mu(\nu\theta).$$

Επομένως:

$$x_1^\nu + x_2^\nu = \sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta) + \sigma\upsilon\nu(\nu\theta) - i\eta\mu(\nu\theta) = 2\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)$$

και

$$x_1^\nu \cdot x_2^\nu = (\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta))(\sigma\upsilon\nu(-\nu\theta) + i\eta\mu(-\nu\theta)) = \sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0 = 1$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 2\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)x + 1 = 0.$$

3. Να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων το πολυώνυμο

$$\boldsymbol{P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6},$$

αν γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό $\boldsymbol{1+\sqrt{2}i}$.

ΛΥΣΗ

Αφού το $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό $x_0 = 1+\sqrt{2}i$, θα έχει ρίζα και το συζυγή του, $\bar{x}_0 = 1-\sqrt{2}i$. Επομένως, το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το γινόμενο $Q(x) = (x-x_0)(x-\bar{x}_0)$, για το οποίο έχουμε

$$Q(x) = [x-(1+\sqrt{2}i)][x-(1-\sqrt{2}i)] = [(x-1)-\sqrt{2}i][(x-1)+\sqrt{2}i]$$

$$= (x-1)^2 - (\sqrt{2}i)^2$$

$$= x^2 + 1 - 2x + 2$$

$$= x^2 - 2x + 3.$$

Αν κάνουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x)$, βρίσκουμε πηλίκο $3x+2$. Επομένως είναι

$$P(x) = (x^2 - 2x + 3)(3x + 2).$$

ΣΧΟΛΙΟ

Γενικά, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές, όπου οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες (αν υπάρχουν) έχουν αρνητική διακρίνουσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο:

α) $z^3 = 1$ β) $z^4 = 1$ γ) $z^6 = 1$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3 = -i$ β) $z^4 = 16\left(\text{συν}\dfrac{4\pi}{3} + i\text{ημ}\dfrac{4\pi}{3}\right)$

γ) $z^5 = 243\left(\text{συν}\dfrac{5\pi}{6} + i\text{ημ}\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3 = \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$ β) $z^4 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ γ) $z^6 = -64$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3 + 3z^2 + 4z = 8$ β) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

5. Αν ο μιγαδικός $2+i$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$3x^3 - 10x^2 + 7x + 10 = 0,$$

να βρείτε και τις άλλες ρίζες της.

6. Αν w είναι μια κυβική ρίζα της μονάδος, με $w \neq 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1-w+w^2)(1+w-w^2)$

7. Να λύσετε την εξίσωση

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0.$$

8. Να λύσετε την εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$ και να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3 = 1 - i$ β) $(z-1)^3 - (1-i)(z+1)^3 = 0$.

2. Να λύσετε την εξίσωση $z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0$.

3. Να λύσετε την εξίσωση $z^7 + 1 = 0$ και στη συνέχεια να βρείτε τα τριώνυμα με πραγματικούς συντελεστές που είναι παράγοντες του πολυωνύμου $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$.

4. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων $(z^2+1)^2 + z^3 + z = 0$ και $z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0$.

5. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z, για τους οποίους ισχύει $z^7 \bar{z}^3 = 1$.

6. Αν η εξίσωση $(1+iz)^\nu = p(1-iz)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχει πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι $|p| = 1$.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + 4 = 0$ με ρίζες τις x_1 και x_2.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ και $x_1^2 + x_2^2$.

β) Αν η εξίσωση $x^2 + px + q = 0$ έχει ως ρίζες τις x_1^2 και x_2^2, να βρείτε τις τιμές των p και q.

8. α) Να λύσετε την εξίσωση

$$\text{συν}^2\theta \cdot z - 2\text{συν}\theta \cdot z + (5 - 4\text{συν}^2\theta) = 0, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το θ μεταβάλλεται στο διάστημα $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης κινούνται σε μια υπερβολή.

8. Να λύσετε την εξίσωση

$$x^9 - x^5 + x^4 - 1 = 0.$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z)=\dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$ με $z\in\mathbb{C}$ και $\mathrm{Re}(z)\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(-\dfrac{1}{\bar{z}}\right)=f(z)$.

β) Έστω α,β δυο (σταθεροί) πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί από το 0. Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία $M(x,y)$, με $x\neq 0$, για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha x+\beta yi$ ικανοποιούν τη σχέση $\mathrm{Re}(f(z))=0$.

2. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w και w_1, για τους οποίους ισχύουν: $w=z-zi$ και $w_1=\dfrac{1}{\alpha}+\alpha i$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $w=\overline{w_1}$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z=\lambda+2+(3\lambda-1)i,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει $w=z+(1+i)$

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή $O(0,0)$.

4. Να γραμμοσκιάσετε το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:

α) $|2z+1|<|z+i|$ β) $|z-1|=1+\mathrm{Re}(z)$.

5. Να αποδείξετε ότι αν οι μιγαδικοί $z_1,z_2,\ldots,z_\kappa$ έχουν τις εικόνες τους στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$, τότε ισχύει $z_1+z_2+\ldots+z_\kappa\neq 0$.

6. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $(1-z)^\nu=z^\nu$ είναι σημεία της ευθείας $x=\dfrac{1}{2}$.

7. Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με πραγματικούς συντελεστές και $\alpha\neq 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι:

α) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ και λ ισχύει

$$(\alpha\kappa^2+\beta\kappa+\gamma)(\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma)>0.$$

β) Για οποιουσδήποτε συζυγείς μιγαδικούς z_1 και z_2 διαφορετικούς από τις ρίζες του τριωνύμου ισχύει επίσης

$$(\alpha z_1^2+\beta z_1+\gamma)(\alpha z_2^2+\beta z_2+\gamma)>0.$$

8. Γνωρίζοντας ότι για τις νιοστές ρίζες της μονάδας $1, z_1, z_2, ..., z_{\nu-1}$ ισχύει $1+z_1+z_2+..+z_{\nu-1}=0$, να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\eta\mu\dfrac{2\pi}{\nu}+\eta\mu\dfrac{4\pi}{\nu}+\eta\mu\dfrac{6\pi}{\nu}+...+\eta\mu\dfrac{2(\nu-1)\pi}{\nu}=0$,

β) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{\nu}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{\nu}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{6\pi}{\nu}+...+\sigma\upsilon\nu\dfrac{2(\nu-1)\pi}{\nu}=-1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

(i) Αν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ισχύει $u^2+v^2=0$, τότε :

Α. $u=0$ Β. $v=0$

Γ. $u=v=0$ Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

(ii) Ο αριθμός $z=(3+5i)^{10}+(3-5i)^{10}$ είναι:

Α. Φανταστικός Β. Μηδέν

Γ. Πραγματικός Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

2. Ποιες από τις επόμενες ισότητες αληθεύουν για κάθε μιγαδικό z :

Α. $|z^2|=|z|^2$ Β. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ Γ. $z\cdot\bar{z}=z^2$

Δ. $z\cdot\bar{z}=|z|$ Ε. $|z^2|=z^2$.

3. Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z και αναφέρεται στην πρώτη στήλη, να τους αντιστοιχίσετε στην ευθεία της δεύτερη στήλης που ανήκει η εικόνα τους:

	Συνθήκη		**Ευθεία**
Α.	$\|z-i\|=\|z+i\|$	α.	$x=1$
Β.	$\|z-1\|=\|z+1\|$	β.	yy'

Γ.	$\lvert z-1\rvert=\lvert z-i\rvert$	γ.	$y=x$
		δ.	$y=-x$
Δ.	$\lvert z+1\rvert=\lvert z+i\rvert$	ε.	$x'x$

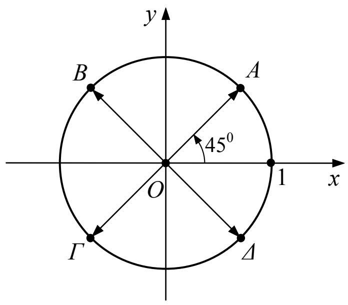
4. Να αντιστοιχίσετε κάθε μιγαδικό z της πρώτης στήλης στο όρισμά του της δεύτερης στήλης:

	Μιγαδικός ($k>0$)		**Όρισμα**
Α.	$k+ki$	α.	-45^0
Β.	$k-ki$	β.	225^0
Γ.	$-k-ki$	γ.	45^0
Δ.	$-k+ki$	δ.	180^0
		ε.	60^0
		ζ.	135^0

5. Να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.
Ο αριθμός των πραγματικών ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $5^{\underline{ου}}$ βαθμού με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να είναι:

Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 4 Ε. 5

6. Να γράψετε τους μιγαδικούς που έχουν ως εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ και Δ του διπλανού σχήματος:



Α:

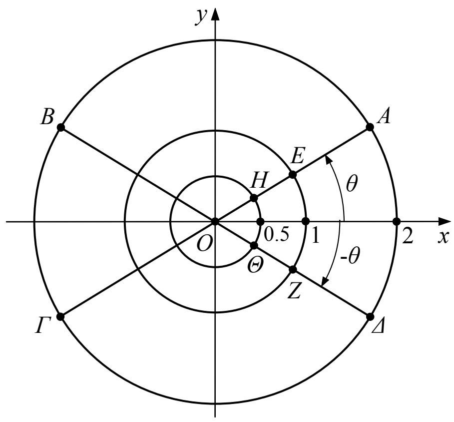
Β:

Γ:

Δ:

7. Αν z είναι ο μιγαδικός που έχει ως εικόνα το Α, να αντιστοιχίσετε κάθε μιγαδικό της πρώτης στήλης στην εικόνα του που αναφέρεται στη δεύτερη στήλη και σημειώνεται στο παρακάτω σχήμα:

Μιγαδικός	Εικόνα
$\bar{z}$	B
$\frac{1}{2}z$	Γ
$\frac{1}{z}$	Δ
$-z$	E
$-\bar{z}$	Z
	H
	Θ



ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Α΄ ΜΕΡΟΣ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

1 ΠΙΝΑΚΕΣ – ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

§ 1.1 Α΄ Ομάδας

1. i) 3×7 ii) π.χ. το στοιχείο α_{12} μας πληροφορεί ότι η ομάδα «ΝΙΚΗ» έχει 6 νίκες.

2. $A=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&0&1&2\\2&1&0&1\\3&2&1&0\end{bmatrix}$.

3. .i) $x=1$, $y=-1$ ii) δεν υπάρχουν

4. $x=e$.

5. $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{5\pi}{4}$.

§ 1.2 Α΄ Ομάδας

1. i) $\begin{bmatrix}11&1\\-1&8\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&-5\\3&-2\end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix}11&13&15&17\\11&13&15&17\end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&-1&-1&-1\end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}8&10&12\end{bmatrix}$

iv) δεν ορίζονται.

v) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\alpha-1&2\beta&2\gamma\\2x&2y-1&2\omega\\2\kappa&2\lambda&2\mu-1\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}-6&14\\2&2\end{bmatrix}$.

3. $x=-7$, $y=8$, $\omega=8$.

4. i) $\begin{bmatrix}13&-1&33\\-5&35&14\end{bmatrix}$,

ii) $\begin{bmatrix}-11&18&1\\4&-1&18\end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix}-\lambda^2&\lambda^2&2\lambda^2\\3\lambda^2&-\lambda^2&\lambda^2\end{bmatrix}$.

5. i) $\begin{bmatrix}6&-2\\4&2\\2&0\end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix}-18&6\\-12&-6\\-6&0\end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix}-16&32\\-4&8\\18&40\end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix}10&-6\\6&2\\1&-4\end{bmatrix}$.

6. i) $X=\begin{bmatrix}3&-1\\-3&1\end{bmatrix}$ ii) $X=\begin{bmatrix}3&1\\4&-2\end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

8. $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=3$, $\delta=-1$.

§ 1.2 Β΄ Ομάδας

1 i) $x=1$, $y=-1$ ii) $x=2$, $y=0$.

2. $X=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}-3&0\\0&-3\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} -9 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 34 & 29 & 41 \\ 24 & 30 & 37 \end{bmatrix}$.

5. i) $\begin{bmatrix} 220 & 198 & 154 & 66 \\ 88 & 44 & 132 & 132 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 31800 & 28620 & 22260 & 9540 \\ 12720 & 6360 & 19080 & 19080 \end{bmatrix}$.

§ 1.3 Α΄ Ομάδας

1. i) $[12]$, $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$.

iii) $\begin{bmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 4 & 13 & 17 \\ -18 & 17 & -8 \end{bmatrix}$, BA δεν ορίζεται.

2. i) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

3. Παρατηρήστε ότι οι αμοιβές στις δύο εταιρείες είναι:

$60.50 + 75.40$ και $30.50 + 60.40$ αντιστοίχως

4. Να αποδείξετε ότι $AB = I$.

5. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, ο B δεν αντιστρέφεται

$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \\ -\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix}$.

6. i) $\begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \\ -\sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix}$

ii) Πολλαπλασιάστε και τα 2-μέλη της εξίσωσης, από αριστερά, με τον αντίστροφο του πίνακα:

$\begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix}$, οπότε έχουμε

$X = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma\upsilon\nu 2\alpha \\ -1 & -\eta\mu 2\alpha \end{bmatrix}$.

§ 1.3 Β΄ Ομάδας

1. i) $x = 5$, $y = 0$ ii) $A^3 = \begin{bmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{bmatrix}$,

$A^4 = \begin{bmatrix} 125 & 250 \\ 250 & 500 \end{bmatrix}$.

2. $x = 3$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Να γίνουν οι πράξεις.

5. i) Ο πίνακας A αντιστρέφεται διότι έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός και είναι $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ii) Αποδείξετε ότι $A + A^{-1} = 2I$.

6. i) πράξεις, ii) και iii), να χρησιμοποιήσετε την (i).

7. i) $\begin{bmatrix} 2130 & 2230 \\ 3345 & 3600 \\ 4710 & 4925 \end{bmatrix}$ ii) 3345 δρχ. και 2230 δρχ.

8. i) Παρατηρήστε ότι $A^{\nu} = A^{\nu-3} \cdot A^3$

ii) $B^{\nu} = (B^2)^{\rho}$, $\nu = 2\rho$ και $B^{\nu} = B^{2\rho}B$, $\nu = 2\rho + 1$.

9. i) $A(-x)A(x) = I$ ii) $x = 0$.

10. i) Πράξεις ii) $y = -x$

iii) Παρατηρήστε ότι $M = A(1)$, οπότε $M^{-1} = A(-1)$.

11. i) $A^2 = A \cdot A = I$, $A^{\nu} = (A^2)^{\rho}$ με $\nu = 2\rho$ και $A^{\nu} = (A^2)^{\rho} A$ με $\nu = 2\rho + 1$.

ii) $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $6I + 5A$.

12. i) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ii) α) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ β) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

γ) $X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

13. i) Πράξεις

ii) Να γράψετε: 1992 = 3.664

1989 = 3.663 .

§ 1.4 Α΄ Ομάδας

1. Οι πίνακες των γραμμικών μετασχηματισμών είναι οι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

αντιστοίχως.

Το σημείο $A(1,0)$ αντιστοιχίζεται στα $(1,-1)$, $(1,1)$ και $(1,2)$ αντιστοίχως.

Όμοια: το $B(0,1)$ στα $(1,1)$, $(1,2)$ και $(2,4)$.

2. i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Το $O(0,0)$ αντιστοιχίζεται στο $O'(0,0)$. Το $A(3,4)$ στο $A'(10,-3)$.

Στη συνέχεια αποδείξετε ότι $(OA) \neq (O'A')$.

4 i) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ii) Αποδείξετε ότι $A'\Delta' \,//\, B'\Gamma'$ και $A'B' \,//\, \Delta'\Gamma'$. Στη συνέχεια δείξτε ότι η $A'\Delta'$ δεν είναι κάθετη στην $A'B'$.

5. i) $A(5,-5)$ ii) $5x - 2y = 1$.

6. i) Στροφή περί την αρχή των αξόνων *O* κατά γωνία $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

ii) Ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων *O* και λόγο $\lambda = 2 > 0$.

iii) Συμμετρία με άξονα την $y = x$ και στη συνέχεια συμμετρία ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων *O*.

iv) Ομοιοθεσία με κέντρο ομοιθεσίας την αρχή των αξόνων *O* και λόγο $\lambda = 2 > 0$ και στη συνέχεια συμμετρία ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων *O*.

v) Συμμετρία ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια συμμετρία ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα των *x*.

vi) Συμμετρία ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων *O*, συμμετρία ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα *x* και τέλος συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία $y = x$.

§ 1.4 Β΄ Ομάδας

1. i) Αρκεί να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της εικόνας του τυχαίου σημείου *M* του επιπέδου με το γραμμικό μετασχηματισμό *T* επαληθεύουν την $y = 2x$.

ii) $(-2y, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

iii) Το $A'(1,1)$ δεν έχει πρότυπο διότι, αν είχε θα έπρεπε να επαληθεύει την $y = 2x$.

2. i) $x' = x - y$
$y' = x$, και υπολογίστε τις αποστάσεις (AB) και $(A'B')$.

ii) Να βρείτε την εικόνα του $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ μέσου του AB με το γραμμικό μετασχηματισμό T.

iii) Χρησιμοποιείστε το γνωστό τύπο

$$E_{(OAB)} = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})|.$$

3. i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $y = \frac{1}{3}x$.

ii) Ομοίως.

4. i) Υπολογίστε τις συντεταγμένες του $M'(x_0', y_0')$, συμμετρικού του $M(x_0, y_0)$ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = -x$ συναρτήσει των x_0, y_0.

ii) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

iii) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

5. i) Είναι $x = \frac{x'}{\alpha}$ και $y = \frac{y'}{\beta}$, οπότε …

ii) $(OA'B'\Gamma') = 2(OA'\Gamma') = |\det(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{O\Gamma'})|$.

§ 1.5 – 1.6 Α΄ Ομάδας

3. i) $(3, -1, 2)$

ii) $(3 - 3\omega, 4 + 2\omega, \omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$

iii) $(2 + y, y, 3, 4)$, $y \in \mathbb{R}$.

4. i) $(1, -1, 1)$

ii) $\left(-\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}, z\right)$, $z \in \mathbb{R}$.

iii) Αδύνατο.

5. i) $(1, 1 - z, z, 0)$, $x \in \mathbb{R}$

ii) $(3 - 3z + 3\omega, 2 - z + 2\omega, z, \omega)$,

όπου $z, \omega \in \mathbb{R}$

iii) Αδύνατο.

6. i) $(2, 1/2)$ ii) Αδύνατο.

§ 1.5 – 1.6 Β΄ Ομάδας

1. $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, -1)$.

2. $y = x^2 - 3x + 2$.

3. Να λύσετε το σύστημα με αγνώστους ημα, συνβ, εφγ.

4. $(x, y, \omega) = \left(4\omega, \frac{5\omega}{2}, \omega\right)$ $\omega \in \mathbb{R}$.

5. $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\omega + z & -1/2\omega \\ \omega & z \end{bmatrix}$ $\omega, z \in \mathbb{R}$.

6. i) Αν $\alpha \neq 1, 2$, αδύνατο. Αν $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2$, άπειρες λύσεις.

ii) Αν $\lambda \neq 3$ μια λύση την:

$$\left(\frac{2\lambda + \mu - 16}{\lambda - 3}, \frac{4\lambda - 2\mu + 8}{\lambda - 3}, \frac{\mu - 10}{\lambda - 3}\right).$$

Αν $\lambda = 3$ και $\mu \neq 10$, άπειρες λύσεις της μορφής $(2 + \omega, 4 - 2\omega, \omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

iii) Αν $k \neq 2$, αδύνατο, ενώ αν $k = 2$ μοναδική λύση την $(0,1)$.

§ 1.7 Α΄ Ομάδας

1. i) -3000 ii) 0 iii) 1

   iv) $\alpha\beta(\beta-\alpha)$ v) -1 vi) 0.

2. i) $x=1$ ή $x=-1$ ii) $x=\pm1$

   iii) $x=0,1,2$ iv) $x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

3. i) $x=-2$, $y=-3$

   ii) $x=1$, $y=1/2$, $\omega=3/2$

   iii) $x=0$, $y=0$, $z=0$ iv) $x=0$.

4. i) $\kappa=2$ ή -1 ii) $\kappa=1$ ή -2.

§ 1.7 Β΄ Ομάδας

1. i) Αν $\kappa\neq1$ και $\kappa\neq2$, τότε έχει λύση την $\left(0,\dfrac{\kappa}{\kappa-1},\dfrac{1}{1-\kappa}\right)$.

   Αν $\kappa=1$, είναι αδύνατο, ενώ αν $\kappa=2$, έχει λύσεις τις $(2-y,y,-1)$, $y\in\mathbb{R}$.

   ii) Αν $\lambda\neq\pm1$, τότε έχει λύση την $\left(\dfrac{\lambda+4}{3(\lambda+1)},-\dfrac{\lambda^2-2\lambda+3}{3(\lambda+1)},\dfrac{\lambda-2}{\lambda+1}\right)$.

   Αν $\lambda=1$, έχει λύσεις τις $\left(\dfrac{1}{2}-y,y,-\dfrac{1}{2}\right)$, $y\in\mathbb{R}$, ενώ αν $\lambda=-1$, είναι αδύνατο.

2. Αν $\lambda\neq\pm1$, τότε έχει λύση την $(0,0,0)$. Αν $\lambda=1$, έχει λύσεις τις $(-3\omega,2\omega,\omega)$, $\omega\in\mathbb{R}$, ενώ αν $\lambda=-1$ έχει λύσεις τις $(3\omega,2\omega,\omega)$, $\omega\in\mathbb{R}$.

3. i) Διέρχονται από το $A(1,-1)$

   ii) Σχηματίζουν τρίγωνο

   iii) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και η ε_3 τέμνει αυτές στα σημεία $A(-1,2)$ $B(1/2,1/2)$

   iv) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$.

4. i) Η ορίζουσα του συστήματος είναι ίση με τη διακρίνουσα της εξίσωσης, οπότε …

   ii) Άπειρες λύσεις.

5. Οι τρεις ισότητες σχηματίζουν ομογενές σύστημα γραμμικό του τύπου 3×3 με ορίζουσα μηδέν, οπότε …

6. i) Λύστε το σύστημα των δυο τελευταίων εξισώσεων.

   ii) Λύστε το σύστημα

   $$\begin{cases}2x-y=-\lambda\\ x-y=\lambda\end{cases}.$$

7. i) $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$

   ii) Αν $\lambda=1$, έχει λύσεις της μορφής $(3y,y)$, $y\in\mathbb{R}$, ενώ αν $\lambda=-1$, έχει λύσεις της μορφής (y,y), $y\in\mathbb{R}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Γ΄ Ομάδας

1. i) Πράξεις ii) $A(x)A(-x)=A(0)$

   iii) Επαγωγή

2. i) Πράξεις ii) $AB=I$

3. i) Πράξεις

   ii) Να γίνουν οι πράξεις:

   $(\alpha I+\beta J)+(\alpha' I+\beta' J)$

   $(\alpha I+\beta J)\cdot(\alpha' I+\beta' J)$

4. Να αποδείξετε ότι

   $$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{συν}2\varphi & \text{ημ}2\varphi\\ \text{ημ}2\varphi & -\text{συν}2\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

   Θέτουμε διαδοχικά όπου θ το 0, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$.

5. i) Αρκεί να αποδείξετε ότι οι εικόνες των σημείων $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_2, y_2)$ ταυτίζονται μόνο όταν το M_1 συμπίπτει με το M_2.

ii) $T^{-1}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

6. Η ορίζουσα του συστήματος είναι $D = \alpha\beta(\beta - \gamma)$ κ.τ.λ.

7. Η ορίζουσα του συστήματος είναι $D = (\text{συν}\alpha - \text{ημ}\alpha)(1 - \text{ημ}\alpha)(1 - \text{συν}\alpha)$.

8. Αν $\kappa = 1$, οι ευθείες συμπίπτουν, ενώ αν $\kappa \neq 1$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και η ε_3 τις τέμνει.

9. Αν $\lambda \neq 1$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0,0,0)$, ενώ αν $\lambda = 1$, έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,0,0)$, με $x \in \mathbb{R}$.

10. Το ομογενές σύστημα:
$$\begin{cases} (3-\lambda)x & -\alpha y & = & 0 \\ \alpha x & -(\lambda+1)y & = & 0 \end{cases}$$
έχει και μη μηδενικές λύσεις, οπότε $D = \lambda^2 - 2\lambda + \alpha^2 - 3 = 0$.

11. i) $x = \lambda + 2$, $y = \lambda$

ii) $\lambda = -1$ ή $\lambda = 2$.

2 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

§ 2.1 - 2.2 Α΄ Ομάδας

1. α) 6 β) $-\frac{3}{2}$.

2. α) $x=1$, $y=2$ β) -2 γ) $x=-15$, $y=27$.

4. α) $y'y$ β) $x'x$ γ) $y=x$.

5. α) $3+4i$ β) $-3-6i$ γ) 0 δ) $2+23i$ ε) $-3+18i$ στ) 25 ζ) $1+7i$.

6. α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ β) -1 γ) $2i$ δ) $-2+2\sqrt{3}i$ ε) $1+i$ στ) $\frac{4}{3}-\frac{7\sqrt{2}}{3}i$

7. α) αδύνατο β) $x=\frac{2}{5}, y=-\frac{1}{5}$

γ) $x=-\frac{1}{2}, y=0$

8. α) 0 β) $2i$

9. α) $-5-7i$ β) $-4+9i$ γ) $-4i$

δ) 11 ε) i στ) 0

10. α) ως προς άξονα $x'x$ β) ως προς κέντρο $O(0,0)$ γ) ως προς άξονα $y'y$.

11. $z_2 = \bar{z}_1$.

12. α) $y=3$ β) $x'x$ και $y'y$ γ) διχοτόμοι

δ) $x=1$.

13. α) 1,2 β) $1 \pm i\sqrt{2}$ γ) $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. $\beta=-12$, $\gamma=26$.

§ 2.1 - 2.2 Β΄ Ομάδας

1. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$.

2. 2

3. 0

4. -2, 0, 2

5. α) 0, 1, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ β) 0, ± 1, $\pm i$.

6. $z=x+yi$ κτλ.

7. $\beta-\alpha i=-i(\alpha+\beta i)$ κτλ.

8. α) $z=x+yi$ κτλ. β) αρκεί να δείξετε ότι $u=\bar{u}$, $v=-\bar{v}$

9. α) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ ή $y'y$ εκτός του $O(0,0)$

β) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ ή $x'x$ εκτός του $O(0,0)$

§ 2.3 Α΄ Ομάδας

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 5, 5, 5, 4, 1, 8, 5, $\frac{\sqrt{10}}{5}$.
2. 2, 1, 1, 1.
3. α) $z\in$ [illegible] β) $\frac{1}{2}$ γ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. α) $x^2+y^2=1$ β) $x^2+(y-1)^2=1$

   γ) $(x+1)^2+(y+2)^2=9$

   δ) Κυκλικό δακτύλιο

   ε) Εκτός κύκλου $x^2+y^2=2$.
5. α) Στη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα A(-1,0), B(0,2).

   β) Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο του AB και το B όπου A(0,1) και B(-1,0).
6. Ο μοναδιαίος κύκλος
7. $2i$, $6i$
8. $|w-1|=2$.
9. $|z|^2=z\bar{z}$ κτλ.

§ 2.3 Β΄ Ομάδας

1. Αν $z=x+yi$, τότε $\mathrm{Re}(z)=x$, $\mathrm{Im}(z)=y$

   κτλ.
2. $w=-\overline{w}$ κτλ.
3. $w=\overline{w}$ κτλ.
4. $w=-\overline{w}$ κτλ.
5. Αρκεί $|w|=1$
6. $|z|=1$
7. 4
8. $y=\frac{1}{4}x-\frac{15}{8}$, $\left(\frac{15}{34},-\frac{60}{34}\right)$
9. Αν $z_2=x_2+y_2 i$, τότε $\frac{x_2^2}{5^2}+\frac{y_2^2}{3^2}=1$.
10. α) $|z|^2=1\Leftrightarrow z\bar{z}=1$ β) $\frac{1}{z_1}=\bar{z}_1$, $\frac{1}{z_2}=\bar{z}_2$

    κτλ.

§ 2.4 Α΄ Ομάδας

1. α) $2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$

   β) $2\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

   γ) $2\left(\text{συν}\frac{4\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{4\pi}{3}\right)$

   δ) $2\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right)$

   ε) $4(\text{συν}0+i\text{ημ}0)$

   στ) $4(\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi)$.
2. α) $12\sqrt{2}(1+i)$

   β) $10i$

   γ) i
3. α) $\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i$ β) $6i$ γ) $-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$.
4. α) $4+4\sqrt{3}i$ β) 3^8 γ) 1.
5. i .
6. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
7. $2^{\nu+1}\text{συν}\frac{\nu\pi}{6}$.
8. Στροφή κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$.
9. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.
10. 2 και $\frac{2\pi}{3}$ ή 2 και $\frac{4\pi}{3}$.

§ 2.4 Β΄ Ομάδας

1. α) 1 και $\nu\theta$ β) -1
2. Να γράψετε τους $1+i$, $1-i$ σε τριγωνομετρική μορφή.
3. Να εργαστείτε με διανυσματικές ακτίνες.
4. α) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$, $x>0$

   β) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y>0$

   γ) $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, εκτός του $O(0,0)$.
5. α) $5i$ β) $-\frac{100}{29}+\frac{105}{29}i$.
6. Να εφαρμόσετε το θεώρημα του De Moivre.
7. α) $|w|=2$ β) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.
8. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
9. Πρέπει $\Delta\leq 0$.

§ 2.5 Α΄ Ομάδας

1. α) Κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου
   β) Κορυφές τετραγώνου
   γ) Κορυφές κανονικού εξαγώνου.
2. α) $-i=\text{συν}\frac{3\pi}{2}+i\text{ημ}\frac{3\pi}{2}$ κτλ.

   β) $z_\kappa=2\left[\text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}}{4}\right)+i\text{ημ}\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}}{4}\right)\right]$, $\kappa=0,1,2,3$

   γ) $z_\kappa=3\left[\text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}}{5}\right)+i\text{ημ}\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}}{5}\right)\right]$ $\kappa=0,1,2,3,4$
3. α) $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}=\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\text{ημ}\frac{\pi}{4}$ κτλ.

   β) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\text{συν}\frac{5\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{3}$ κτλ.

   γ) $-64=64(\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi)$ κτλ.
4. α) $z^3+3z^2+4z=8\Leftrightarrow(z-1)(z^2+4z+8)=0$.

   β) Να θέσετε $z^2=w$, $\pm i$, $\pm 2i$.
5. $2-i$, $-\frac{2}{3}$
6. 4
7. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την: $x^6=1$, $x\neq 1$.
8. Οι ρίζες είναι -3 και $\pm i\sqrt{3}$.

§ 2.5 Β΄ Ομάδας

1. α) Είναι $1-i=\sqrt{2}\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

   β) Η εξίσωση γράφεται $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3=1-i$.
2. Η εξίσωση γράφεται $(z+1)^2(z^2+z+1)(z^2-z+1)=0$ κτλ.
3. Έχουμε $z^7+1=0\Leftrightarrow z^7=\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi$ κτλ.
4. $\pm\iota$
5. 1, i, -1, $-i$
6. Να πάρετε τα μέτρα και των δύο μελών της εξίσωσης.
7. α) 2, 4, -4, β) $p=4$, $q=16$.
8. α) $\frac{1}{\text{συν}\theta}\pm 2i\text{εφ}\theta$ β) $x^2-\frac{y^2}{2^2}=1$
9. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $(x^4-1)(x^5-1)=0$ κτλ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. β) $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{\beta}\right)^2}=1$.

2. $x^2-y^2=1$.

3. α) $y=3x-7$ β) $y=3x-9$

   γ) $A\left(\dfrac{27}{10},-\dfrac{9}{10}\right)$

4. α) Τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $K\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

   β) Τα σημεία της παραβολής $y^2=4x$.

6. Να πάρετε τα μέτρα και των δύο μελών της εξίσωσης.

7. α) Οι τιμές του τριωνύμου είναι ομόσημες του α

   β) Είναι γινόμενο δύο συζυγών παραστάσεων.

8. Να εξισώσετε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του αθροίσματος

   $1+z_1+z_2+...+z_{\nu-1}=0$ με το μηδέν.