ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ
λύσεις των ασκήσεων

Σ. Ανδρεαδάκης   Β. Κατσαργύρης
Σ. Παπασταυρίδης   Γ. Πολύζος   Α. Σβέρκος

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Σ. Ανδρεαδάκης • Β. Κατσαργύρης
Σ. Παπασταυρίδης • Γ. Πολύζος • Α. Σβέρκος

λύσεις των ασκήσεων

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΤΗ

Το τεύχος που κρατάς έχει μια ιδιομορφία: σου δίνεται με τη σύσταση να μη το διαβάσεις˙ τουλάχιστο με την έννοια που διαβάζεις ένα άλλο βιβλίο για να κατανοήσεις το περιεχόμενό του.

Πράγματι, οι ασκήσεις που σου δίνει ο καθηγητής σου είναι για να εργαστείς μόνος. Γιατί το να λύσεις μια άσκηση σημαίνει πολλές φορές όχι μόνο ότι έχεις κατανοήσει την αντίστοιχη θεωρητική ύλη αλλά και ότι ξέρεις να τη χρησιμοποιήσεις για να δημιουργείς, να ανακαλύπτεις ή να επιβεβαιώνεις κάτι καινούριο. Και αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για σένα τον ίδιο. Δεν μπορεί παρά να έχεις και εσύ τη φιλοδοξία να λύνεις μόνος, χωρίς βοήθεια, τις ασκήσεις, για να νιώθεις τη χαρά αυτής της δημιουργίας, της ανακάλυψης.

Πρέπει να ξέρεις ότι, όταν δυσκολεύεσαι στη λύση μιας άσκησης, τις πιο πολλές φορές υπάρχει κάποιο κενό στη γνώση της αντίστοιχης θεωρίας. Πήγαινε λοιπόν πίσω στο διδακτικό βιβλίο κάθε φορά που χρειάζεται να εντοπίσεις και να συμπληρώσεις τέτοια κενά. Οπωσδήποτε, πριν καταπιαστείς με τη λύση των ασκήσεων, πρέπει να αισθάνεσαι κάτοχος της θεωρίας που διδάχτηκες.

Εκτός από την κατανόηση της θεωρίας μπορεί να βοηθηθείς στη λύση μιας άσκησης από τα παραδείγματα και τις εφαρμογές που περιέχει το διδακτικό σου βιβλίο. Αν παρ' όλ' αυτά δεν μπορείς να προχωρήσεις, στο τέλος του βιβλίου σου θα βρεις μια σύντομη υπόδειξη που ασφαλώς θα σε διευκολύνει.

Στις ελάχιστες περιπτώσεις που, έχοντας εξαντλήσει κάθε περιθώριο προσπάθειας, δε βρίσκεται η πορεία που οδηγεί στη λύση της άσκησης, τότε και μόνο τότε μπορείς να καταφύγεις σ' αυτό το τεύχος και μάλιστα για να διαβάσεις εκείνο το τμήμα της λύσης που σου είναι απαραίτητο για να συνεχίσεις μόνος.

Ουσιαστικά λοιπόν δεν το 'χεις ανάγκη αυτό το τεύχος. Σου παρέχεται όμως για τους εξής λόγους:

α) Για να μπορείς να συγκρίνεις τις λύσεις που εσύ βρήκες.

β) Για να σε προφυλάξει από ανεύθυνα «λυσάρια».

γ) Για να απαλλάξει τους γονείς σου από αντίστοιχη οικονομική επιβάρυνση.

δ) Για να έχεις εσύ και οι συμμαθητές σου την ίδια συλλογή ασκήσεων που είναι έτσι επιλεγμένες ώστε να εξασφαλίζουν την εμπέδωση της ύλης.

ε) Για να εργάζεσαι χωρίς το άγχος να εξασφαλίσεις οπωσδήποτε για κάθε μάθημα τις λύσεις των ασκήσεων.

Το τεύχος λοιπόν που κρατάς είναι φίλος. Να του συμπεριφέρεσαι όπως σ' ένα φίλο που έχει δει πριν από σένα την ταινία που πρόκειται να δεις: μην του επιτρέψεις να σου αποκαλύψει την «υπόθεση» πριν δεις και εσύ το έργο. Μετά μπορείτε να συζητήσετε. Η σύγκριση των συμπερασμάτων θα είναι ενδιαφέρουσα και προπαντός επωφελής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

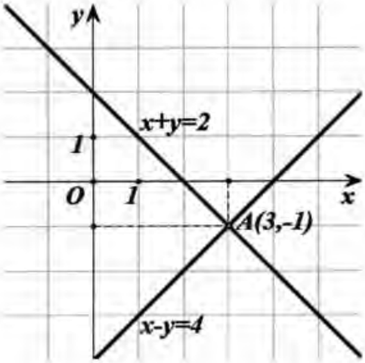
§ 1.1 Γραμμικά συστήματα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (3, –1).

ii)



2. i) $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 7y \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 7y = 0 & (1) \\ x + y = 45. & (2) \end{cases}$

Από τη (2) έχουμε $y = 45 - x$ και με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $8x - 7(45 - x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 315 + 7x = 0 \Leftrightarrow 15x = 315 \Leftrightarrow x = 21$.
Επομένως $y = 45 - 21 = 24$.
Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (21, 24).

ii) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 3y - 6 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -2 & (1) \\ 4x + 3y = 8. & (2) \end{cases}$

Με πρόσθεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $8x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$.

Με αφαίρεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $6y = 10 \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{3}$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}\right)$.

3. i) Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x-5}{2}+\frac{2y+1}{7}+2=0 \Leftrightarrow 7(x-5)+2(2y+1)+28=0$$

$$\Leftrightarrow 7x-35+4y+2+28=0 \Leftrightarrow 7x+4y=5.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x+6}{3}-\frac{y-6}{2}=8 \Leftrightarrow 2(x+6)-3(y-6)=48 \Leftrightarrow 2x+12-3y+18=48$$

$$\Leftrightarrow 2x-3y=48-30 \Leftrightarrow 2x-3y=18.$$

Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} 7x+4y=5 & (1) \\ 2x-3y=18. & (2) \end{cases}$$

Απαλείφουμε το y

$$\begin{array}{lll} 7x+4y=5 & (3) & 21x+12y=15 \\ 2x-3y=18 & (4) & \underline{8x-12y=72} \\ & & 29x=87, \text{ οπότε } x=\frac{87}{29}=3. \end{array}$$

Για $x=3$ η (1) γίνεται $7\cdot 3+4y=5 \Leftrightarrow 4y=-21+5 \Leftrightarrow 4y=-16$, οπότε $y=-4$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3,-4)$.

ii) Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{2x-1}{3}=4-\frac{y+2}{4} \Leftrightarrow 4(2x-1)=12\cdot 4-3(y+2)$$

$$\Leftrightarrow 8x-4=48-3y-6 \Leftrightarrow 8x+3y=46.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x+3}{2}-3=\frac{x-y}{3} \Leftrightarrow 3(x+3)-3\cdot 6=2(x-y)$$

$$\Leftrightarrow 3x+9-18=2x-2y \Leftrightarrow x+2y=9.$$

Έτσι το αρχικό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 8x+3y=46 & (1) \\ x+2y=9. & (2) \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου $x=9-2y$ και έχουμε

$$8(9-2y)+3y=46 \Leftrightarrow 72-16y+3y=46 \Leftrightarrow 13y=26 \Leftrightarrow y=2.$$

Η (2) για $y=2$ γίνεται $x+2\cdot 2=9 \Leftrightarrow x=5$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(5, 2)$.

4. i) $\begin{cases} x-3y=3 \\ \frac{x}{3}-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=3 \\ x-3y=-6. \end{cases}$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

ii) $\begin{cases} 2y = x + 2 \\ \dfrac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = -2. \end{cases}$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$\left(k, \dfrac{k+2}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

5. i) Έχουμε

$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\,(-5) - 3 \cdot 1 = -10 - 3 = -13 \neq 0.$

$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 7 - 4 \cdot 1 = -35 - 4 = -39.$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = 8 - 21 = -13.$

Επομένως $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-39}{-13} = 3$ και $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-13}{-13} = 1.$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (3, 1).

ii) Το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 3y = -1. \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11.$

$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22.$

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11.$

Επομένως $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{22}{11} = 2$ και $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-11}{11} = -1.$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (2, –1).

6. i) $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 30 = 44 \neq 0$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

ii) $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$. Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases}$$

και επομένως έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

iii) $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$. Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -9x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x + y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

και είναι αδύνατο.

7. i) $$D = \begin{vmatrix} \sqrt{3} - 1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3} + 1 \end{vmatrix} = \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right) - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Το σύστημα γράφεται διαδοχικά ισοδύναμα:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3} - 1\right)x + 2y = -2 \\ x + \left(\sqrt{3} + 1\right)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3} - 1\right)x + 2y = -2 \\ \left(\sqrt{3} - 1\right)x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)y = -\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3} - 1\right)x + 2y = -2 \\ \left(\sqrt{3} - 1\right)x + 2y = -2 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$$\left(\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(k + 1\right), k\right),\ k \in \mathbb{R}.$$

ii) $$D = \begin{vmatrix} \sqrt{3} + 1 & 4 \\ \dfrac{1}{2} & \sqrt{3} - 1 \end{vmatrix} = \left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right) - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 4y = 7 \\ x + 2\left(\sqrt{3} - 1\right)y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 4y = 7 \\ \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 2\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)y = 2\left(\sqrt{3} + 1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 4y = 7 \\ \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 4y = 2\left(\sqrt{3} + 1\right) \end{cases}$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

8. i) Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\omega = 3x - 2y - 11$ (4)

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

• $2x - 5y - 2(3x - 2y - 11) = 3 \Leftrightarrow 2x - 5y - 6x + 4y + 22 = 3$
$\Leftrightarrow -4x - y = -19 \Leftrightarrow 4x + y = 19$ (5)

• $5x + y - 2(3x - 2y - 11) = 33 \Leftrightarrow 5x + y - 6x + 4y + 22 = 33$
$\Leftrightarrow -x + 5y = 11 \Leftrightarrow x - 5y = -11$ (6)

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2 x 2 σύστημα

$$\begin{cases} 4x + y = 19 \\ x - 5y = -11 \end{cases}$$

από τη λύση του οποίου κατά τα γνωστά βρίσκουμε $x = 4$ και $y = 3$. Με αντικατάσταση των τιμών των x και y στην (4) βρίσκουμε $\omega = -5$.
Άρα η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(4, 3, -5)$.

ii) Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x = 3y - \omega + 2$ (4)

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

• $5(3y - \omega + 2) - y + 32 = 4 \Leftrightarrow 15y - 5\omega + 10 - y + 32 = 4$
$\Leftrightarrow 14y - 2\omega = -6 \Leftrightarrow 7y - \omega = -3$ (5)

• $3(3y - \omega + 11) - 2y + 2\omega = 2 \Leftrightarrow 9y - 3\omega + 6 - 2y + 2\omega = 2$
$\Leftrightarrow 7y - \omega = -4$ (6)

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2 x 2 σύστημα

$$\begin{cases} 7y - \omega = -3 \\ 7y - \omega = -4 \end{cases}$$ που είναι αδύνατο.

Άρα το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

iii) Απαλείφουμε τους παρονομαστές και το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6 \\ 3x + 2y + 2\omega = 10 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16. \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y = 4\omega - 2x + 6$ (4)

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

• $3x + 2(4\omega - 2x + 6) + 2\omega = 10 \Leftrightarrow 3x + 8\omega - 4x + 12 + 2\omega = 10$
$\Leftrightarrow -x + 10\omega = -2 \Leftrightarrow x - 10\omega = 2$ (5)

• $5x + 3(4\omega - 2x + 6) - 2\omega = 16 \Leftrightarrow 5x + 12\omega - 6x + 18 - 2\omega = 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x + 10\omega = -2 \Leftrightarrow x - 10\omega = 2$ (6)

Οι (5), (6) αποτελούν το σύστημα

$$\begin{cases} x - 10\omega = 2 \\ x - 10\omega = 2 \end{cases}$$

που έχει άπειρες λύσεις της μορφής με $x = 10k + 2$, $\omega = k$, $k \in \mathbb{R}$.
Από την (4) έχουμε $y = 4k - 2(10k + 2) + 6 = -16k + 2$.

Άρα το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(10k + 2, -16k + 2, k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έστω ότι η εξίσωση της ε_1 είναι $y = \alpha x + \beta$. Επειδή η ευθεία διέρχεται από τα σημεία (0, 2) και (4, 0) έχουμε

$$\begin{cases} 2 = \alpha \cdot 0 + \beta \\ 0 = \alpha \cdot 4 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ 4\alpha + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα ε_1: $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ε_2 είναι $y = x - 1$.

ii) Οι εξισώσεις των δύο ευθειών ορίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

του οποίου η λύση, όπως φαίνεται και από το σχήμα είναι το ζεύγος (2, 1).

2. Αν x είναι ο αριθμός των δίκλινων και y ο αριθμός των τρίκλινων δωματίων, τότε από τα δεδομένα έχουμε

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ 2x + 3y = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 16. \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν 10 δίκλινα και 16 τρίκλινα δωμάτια.

3. Αν τον αγώνα παρακολούθησαν x παιδιά και y ενήλικες τότε από τα δεδομένα έχουμε

$$\begin{cases} x + y = 2200 \\ 1{,}5x + 4y = 5050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1500 \\ y = 700. \end{cases}$$

Άρα τον αγώνα παρακολούθησαν 1500 παιδιά και 700 ενήλικες.

4. Αφού για $T = 20$ είναι $R = 0{,}4$, έχουμε

$$0{,}4 = \alpha \cdot 20 + \beta \Leftrightarrow 20\alpha + \beta = 0{,}4 \qquad (1)$$

Αφού για $T = 80$ είναι $R = 0{,}5$, έχουμε

$$0{,}5 = 80\alpha + \beta \Leftrightarrow 80\alpha + \beta = 0{,}5 \qquad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 20\alpha + \beta = 0{,}4 \\ 80\alpha + \beta = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{600} \\ \beta = \dfrac{11}{30}. \end{cases}$$

Άρα $R = \dfrac{1}{600} \cdot T + \dfrac{11}{30}$.

5. Αν απαιτούνται x $m\ell$ από το πρώτο διάλυμα και y $m\ell$ από το δεύτερο διάλυμα, τότε $x + y = 100$. (1)

Η ποσότητα του υδροχλωρικού οξέως σε κάθε διάλυμα είναι $\dfrac{50}{100}x$ στο πρώτο και $\frac{80}{100}y$ στο δεύτερο. Επομένως $\frac{50}{100}x+\frac{80}{100}y=\frac{68}{100}\cdot 100$. (2)

Οι εξισώσεις (1) και (2) ορίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{50}{100}x+\frac{80}{100}y=\frac{68}{100}\cdot 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=100 \\ 5x+8y=680. \end{cases}$$

Επομένως $5x+8(100-x)=680 \Leftrightarrow 5x+800-8x=680$
$\Leftrightarrow 5x-8x=680-800$
$\Leftrightarrow -3x=-120 \Leftrightarrow x=40$

οπότε $y=60$.

Άρα πρέπει να αναμείξει 40 $m\ell$ από το πρώτο με 60 $m\ell$ από το δεύτερο.

6. i) $2x+4y=3 \Leftrightarrow 4y=-2x+3 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{4}x+\frac{3}{4}$.

Άρα $\lambda_1=-\frac{1}{2}$

$x+2y=\alpha \Leftrightarrow 2y=-x+\alpha \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{\alpha}{2}$.

Άρα $\lambda_2=-\frac{1}{2}$

ii) Επειδή $\lambda_1=\lambda_2$, οι ευθείες ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.
Άρα δεν υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες τέμνονται.

iii) Οι ευθείες είναι παράλληλες όταν $\frac{3}{4}\neq\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 4\alpha\neq 6 \Leftrightarrow \alpha\neq\frac{3}{2}$.

7. i) $\begin{cases} \alpha x+y=\alpha^2 \\ x+\alpha y=1. \end{cases}$

Έχουμε

$D=\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-1=(\alpha+1)(\alpha-1)$.

$D_x=\begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)$.

$D_y=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\alpha-\alpha^2=\alpha(1-\alpha)$.

Αν $D\neq 0$ δηλαδή αν $\alpha\neq -1$ και $\alpha\neq 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, οπότε οι ευθείες τέμνονται και το σημείο τομής έχει συντεταγμένες

$x=\frac{D_x}{D}=\frac{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}$ και

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{-\alpha}{\alpha+1}.$$

Άρα αν $\alpha\neq\pm1$, οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1},\frac{-\alpha}{\alpha+1}\right)$.

• Αν $\alpha=1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases}x+y=1\\x+y=1\end{cases}$

που σημαίνει ότι οι ευθείες ταυτίζονται.

• Αν $\alpha=-1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases}-x+y=1\\x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=-1\\x-y=1\end{cases}$

και είναι αδύνατο που σημαίνει ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

ii) $\begin{cases}\alpha x-y=\alpha\\x+\alpha y=1.\end{cases}$

Έχουμε

$D=\begin{vmatrix}\alpha & -1\\1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^2+1\neq0$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. Άρα οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

8. i) $$D=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\4 & -(\lambda+1)\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda+1)-4\cdot(-2)=-(\lambda^2-1)+8$$
$$=-\lambda^2+1+8=-\lambda^2+9=-(\lambda^2-9)$$
$$=-(\lambda+3)(\lambda-3).$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & -2\\-2 & -(\lambda+1)\end{vmatrix}=-1\cdot(\lambda+1)-(-2)(-2)=-\lambda-1-4=-(\lambda+5).$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\4 & -2\end{vmatrix}=-2(\lambda-1)-4=-2\lambda+2-4=-2\lambda-2=-2(\lambda+1).$$

• Αν $D\neq0$, δηλαδή αν $\lambda\neq3$ και $\lambda\neq-3$, τότε το σύστημα έχει μια λύση την

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-(\lambda+5)}{-(\lambda+3)(\lambda-3)}=\frac{\lambda+5}{(\lambda+3)(\lambda-3)}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-2(\lambda+1)}{-(\lambda+3)(\lambda-3)}=\frac{2(\lambda+1)}{(\lambda+3)(\lambda-3)}.$$

• Αν $\lambda=3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases}2x-2y=1\\4x-4y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2y=1\\2x-2y=-1,\end{cases}$ που είναι αδύνατο.

• Αν $\lambda=-3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases}-4x-2y=1\\4x+2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=-1\\4x+2y=-2,\end{cases}$ που είναι αδύνατο.

ii) $D = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & \mu+2 \end{vmatrix} = (\mu-2)(\mu+2)-5 = \mu^2-4-5 = \mu^2-9 = (\mu+3)(\mu-3)$.

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \mu+2 \end{vmatrix} = 5(\mu+2)-25 = 5\mu+10-25 = 5\mu-15 = 5(\mu-3)$.

$D_y = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5(\mu-2)-5 = 5\mu-10-5 = 5\mu-15 = 5(\mu-3)$.

• Αν $D \neq 0$, δηλαδή $\mu \neq \pm 3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, την

$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \dfrac{5}{\mu+3}$

$y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \dfrac{5}{\mu+3}$.

• Αν $\mu = 3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} x+5y=5 \\ x+5y=5 \end{cases}$, που έχει άπειρες λύσεις τα ζεύγη $(5-5k,\ k)$, όπου k οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

• Αν $\mu = -3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} -5x+5y=5 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=5 \end{cases}$, που είναι αδύνατο.

9. Αν R_1, R_2 και R_3 οι ακτίνες των κύκλων με κέντρα O_1, O_2 και O_3 αντιστοίχως, τότε

$$\begin{cases} R_1+R_2=6 & (1) \\ R_2+R_3=7 & (2) \\ R_1+R_3=5 & (3) \end{cases}$$

Το σύστημα λύνεται με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Λόγω όμως της μορφής του μπορούμε να το λύσουμε και ως εξής:
Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε

$$2(R_1+R_2+R_3) = 18 \Leftrightarrow R_1+R_2+R_3 = 9 \qquad (4)$$

Αν τώρα από τα μέλη της (4) αφαιρέσουμε τα μέλη των (1), (2) και (3), βρίσκουμε ότι

$$R_1+R_2+R_3-R_1-R_2 = 9-6 \Leftrightarrow R_3 = 3.$$
$$R_1+R_2+R_3-R_2-R_3 = 9-7 \Leftrightarrow R_1 = 2.$$
$$R_1+R_2+R_3-R_1-R_3 = 9-5 \Leftrightarrow R_2 = 4.$$

Επομένως οι ακτίνες των κύκλων είναι 2cm, 4cm και 3cm.

10. Τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο προς κύκλο είναι ίσα.
Επομένως $AZ = AE = x$, $B\Delta = BZ = y$ και $\Gamma\Delta = \Gamma E = z$. Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = \gamma & (1) \\ y + z = \alpha & (2) \\ z + x = \beta & (3) \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων κατά μέλη έχουμε

$$2(x + y + z) = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow x + y + z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \qquad (4)$$

• Από (4) και (1) έχουμε $\gamma + z = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{\alpha + \beta - \gamma}{2}$.

• Από (4) και (2) έχουμε $x + \alpha = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.

• Από (4) και (3) έχουμε $y + \beta = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.

Παρατήρηση: Αν θέσουμε $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, τότε

$x = \dfrac{\beta + \gamma - \alpha}{2} = \dfrac{2\tau - \alpha - \alpha}{2} = \tau - \alpha$ και ομοίως $y = \tau - \beta$, $z = \tau - \gamma$.

11. Αν x, y, z οι ποσότητες σε lt από κάθε διάλυμα αντιστοίχως, τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 52 \\ \dfrac{50}{100}x + \dfrac{10}{100}y + \dfrac{30}{100}z = \dfrac{32}{100} \cdot 52 \\ x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 52 & (1) \\ 50x + 10y + 30z = 1664 & (2) \\ x = 2z & (3) \end{cases}$$

Από (1) και (3) έχουμε $y + 3z = 52$, οπότε $y = 52 - 3z$ και η (2) γίνεται

$$50 \cdot 2z + 10(52 - 3z) + 30z = 1664$$
$$\Leftrightarrow 100z + 520 - 30z + 30z = 1664$$
$$\Leftrightarrow 100z = 1144 \Leftrightarrow z = 11{,}44,$$

οπότε $z = 11{,}44$lt

Επομένως $x = 22{,}88$lt και $y = 17{,}68$lt.

12. • Στην 1^{η} περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου f(x) τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο 3, θα ισχύει $f(0) = 3$, οπότε θα έχουμε $\gamma = 3$, επομένως το τριώνυμο θα είναι της μορφής

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3.$$

Επειδή το τριώνυμο f(x) έχει κορυφή το σημείο $K(2, -1)$ θα ισχύει

$$\begin{cases} \dfrac{-\beta}{2\alpha} = 2 \\ f\left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4\alpha \\ f(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Επομένως είναι $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

• Στην $2^η$ περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου g(x) τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο –1, θα ισχύει g(–1) = 0, οπότε θα έχουμε

$$\alpha - \beta + \gamma = 0. \tag{2}$$

Επειδή επιπλέον η γραφική παράσταση του τριωνύμου g(x) έχει κορυφή το σημείο K(1, 4), θα ισχύει

$$\begin{cases} \dfrac{-\beta}{2\alpha} = 1 \\ g\left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ g(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha & (3) \\ \alpha + \beta + \gamma = 4. & (4) \end{cases}$$

Επομένως, λόγω της (3), οι (2) και (4) γράφονται

$$\begin{cases} 3\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -3\alpha \\ -\alpha - 3\alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Άρα, είναι $\alpha = -1$, $\beta = 2$ και $\gamma = 3$, οπότε έχουμε $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

2ος τρόπος:

Μία ρίζα του τριωνύμου g(x) είναι $\rho_1 = -1$. Αν ρ_2 είναι η άλλη ρίζα αυτού, τότε θα ισχύει $\rho_1 + \rho_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha}$. Επειδή, όμως η τετμημένη x_k της κορυφής της παραβολής δίνεται από τον τύπο με $x_k = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$ και επειδή $x_k = 1$, θα ισχύει

$$\frac{-\beta}{2\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{-1 + \rho_2}{2} = 1 \Leftrightarrow \rho_2 = 3.$$

Άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 3$, οπότε θα έχουμε

$$g(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) = \alpha(x + 1)(x - 3).$$

Επειδή, όμως η κορυφή K της παραβολής έχει συντεταγμένες (1, 4), θα ισχύει g(1) = 4, οπότε θα έχουμε

$$\alpha(1 + 1)(1 - 3) = 4 \Leftrightarrow \alpha = -1.$$

Επομένως είναι

$$g(x) = -1(x + 1)(x - 3) = -x^2 + 2x + 3.$$

• Στην $3^η$ περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου h(x) τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία 2 και 4 και τον άξονα y΄y στο σημείο 4, θα ισχύει

$$\begin{cases} h(2) = 0 \\ h(4) = 0 \\ h(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 16\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta = -4 \\ 16\alpha + 4\beta = -4 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -2 \\ 4\alpha + \beta = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha - 2 \\ 4\alpha - 2\alpha - 2 = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 0{,}5 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

Επομένως είναι $h(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$.

3ος τρόπος:
Το τριώνυμο h(x) έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 4$. Επομένως έχουμε

$$h(x) = \alpha(x-2)(x-4).$$

Επειδή, όμως η γραφική παράσταση του τριωνύμου διέρχεται από το σημείο Γ(0, 4), θα ισχύει h(0) = 4, οπότε θα έχουμε

$$\alpha(0-2)(0-4) = 4 \Leftrightarrow \alpha = 0{,}5.$$

Επομένως, είναι

$$h(x) = 0{,}5(x-2)(x-4) = 0{,}5x^2 - 3x + 4.$$

§ 1.2 Μη Γραμμικά συστήματα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $y = 1 - x$ (1) και, αν αντικαταστήσουμε στην πρώτη, παίρνουμε

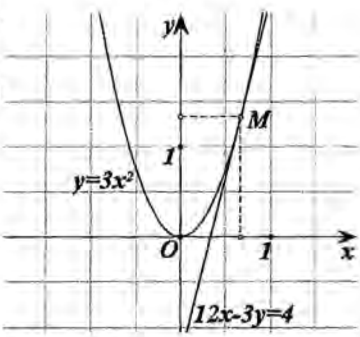
$$x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 + x - x^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0. \qquad (2)$$

Η (2) έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$, οπότε λόγω της (1) είναι $y_1 = 1 - x_1 = 1 + 1 = 2$ και $y_2 = 1 - x_2 = 1 - 2 = -1$.
Επομένως το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη (–1, 2) και (2, –1).

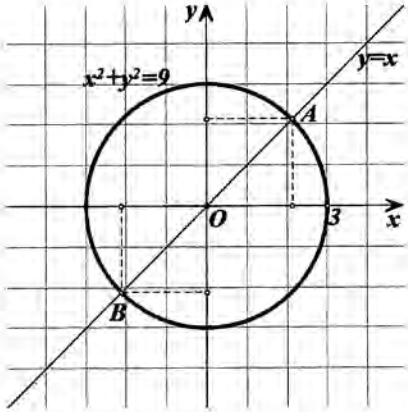
2. i) Η δεύτερη εξίσωση, λόγω της πρώτης, γράφεται

$$12x - 3(3x^2) = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0. \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα, την $x = \frac{2}{3}$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε $y = \frac{4}{3}$.



Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση, το ζεύγος $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Για να εξηγήσουμε γραφικά τη λύση χαράσουμε, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, την παραβολή $y = 3x^2$ και την ευθεία $12x - 3y = 4$. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές έχουν ένα μόνο κοινό σημείο Μ, το οποίο έχει συντεταγμένες $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.



ii) Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ y = x & (2) \end{cases}$$

Η (1), λόγω της (2), γίνεται

$x^2 + x^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 = 9$

και έχει ρίζες τις

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

και $x_2 = -\dfrac{3}{\sqrt{2}} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

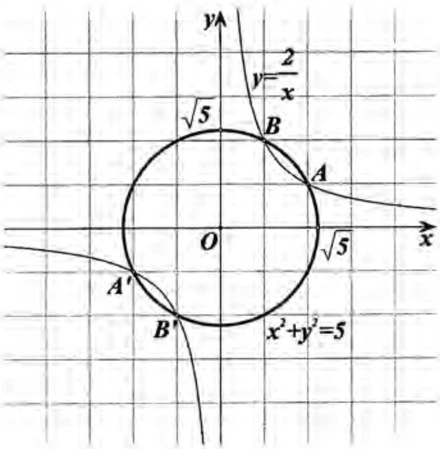
οπότε θα έχουμε

$$y_1 = x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad y_2 = x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Για να εξηγήσουμε γραφικά τις λύσεις χαράσουμε, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$ με κέντρο το σημείο O(0, 0) και ακτίνα 3 καθώς επίσης και την ευθεία y = x. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές τέμνονται σε δύο σημεία, τα $A\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$.



iii) Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει $x \neq 0$, $y \neq 0$ και $y = \dfrac{2}{x}$.

Η πρώτη εξίσωση γίνεται

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$$

$\Leftrightarrow x^4 + 4 = 5x^2$

$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$ (1)

Αν θέσουμε $x^2 = \omega$ (2), η (1) γίνεται $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$. (3)

Αυτή έχει ρίζες $\omega_1 = 1$ και

$\omega_2 = 4$, οπότε λόγω της (2) έχουμε $x^2 = 1$ ή $x^2 = 4$. Από αυτές παίρνουμε τέσσερις ρίζες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ και $x_3 = -2$, $x_4 = 2$, οπότε για το y παίρνουμε τις τιμές $y_1 = \frac{2}{x_1} = -2$, $y_2 = \frac{2}{x_2} = 2$ και $y_3 = \frac{2}{-2} = -1$, $y_4 = \frac{2}{2} = 1$.

Άρα, το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα ζεύγη (–1, –2), (1, 2), (–2, –1) και (2, 1). Για να εξηγήσουμε γραφικά τις λύσεις χαράσσουμε, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ με κέντρο το O(0, 0) και ακτίνα $\sqrt{5}$, καθώς επίσης και την υπερβολή $y = \frac{2}{x}$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές τέμνονται σε τέσσερα σημεία, τα (–1, –2), (1, 2), (–2, –1) και (2, 1).

3. Από την $v = v_0 + \alpha t$ έχουμε $v - v_0 = \alpha t$, οπότε $\alpha = \frac{v - v_0}{t}$. Αντικαθιστούμε στην πρώτη και έχουμε

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v - v_0}{t} \cdot t^2 = v_0 t + \frac{(v - v_0)t}{2} = \frac{2v_0 t + vt - v_0 t}{2}.$$

Άρα $S = \frac{v + v_0}{2} \cdot t$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

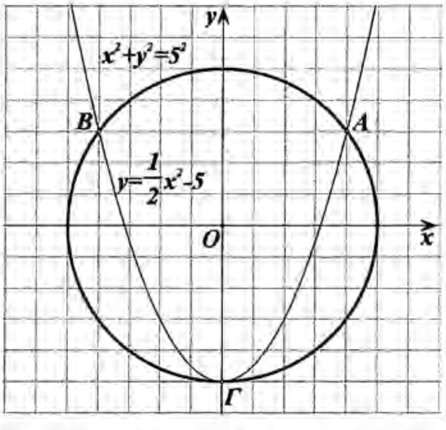
1. Η δεύτερη εξίσωση λόγω της πρώτης γίνεται

$2y + 10 + y^2 = 25$

ή, ισοδύναμα,

$y^2 + 2y - 15 = 0$, η οποία έχει ρίζες 3 και –5. Για $y = 3$ έχουμε $x^2 = 16$, οπότε $x = 4$ ή $x = -4$. Για $y = -5$ έχουμε $x^2 = 0$, οπότε $x = 0$.

Άρα το σύστημα έχει τρεις λύσεις τις (4, 3), (–4, 3), (0, –5). Η γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος είναι ότι η παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$



και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5^2$ έχουν τρία κοινά σημεία.

2. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y(2x - y - 5) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $2x - y - 5 = 0$, οπότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με τα συστήματα

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \ (1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \ (2)$$

Για να λύσουμε το (1) θέτουμε στη δεύτερη εξίσωση $y = 0$, οπότε έχουμε $x^2 - 4x + 3 = 0$. Οι ρίζες αυτής είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$, έτσι το σύστημα (1) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(1, 0)$ και $(3, 0)$. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (2) γράφεται $y = 2x - 5$, (3) και αν θέσουμε στη δεύτερη παίρνουμε $2x - 5 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$.

Οι ρίζες αυτές είναι $x_3 = 2$ και $x_4 = 4$, οπότε λόγω της (3) είναι $y_3 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$ και $y_4 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$. Έτσι το σύστημα (2) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(2, -1)$ και $(4, 3)$. Επομένως το αρχικό σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα ζεύγη $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(2, -1)$ και $(4, 3)$.

3. Αν x, y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε είναι

$$xy = 120 \qquad (1)$$

και

$$(x + 3)(y - 2) = 120 \qquad (2)$$

Η (2) γράφεται $xy + 3y - 2x - 6 = 120$ και λόγω της (1) γίνεται

$$120 + 3y - 2x - 6 = 120 \Leftrightarrow 3y - 2x = 6 \Leftrightarrow y = \frac{2x + 6}{3}, \qquad (3)$$

θέτουμε στην (1) η οποία έτσι γίνεται

$$x\left(\frac{2x + 6}{3}\right) = 120 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x = 360 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 12$ και $x_2 = -15$.

Επειδή οι διαστάσεις είναι πάντοτε θετικές θα έχουμε $x = 12$cm, οπότε, λόγω της (1), θα είναι $y = \frac{120}{x} = \frac{120}{12} = 10$cm.

4. Για να βρούμε τα σημεία, στα οποία η ευθεία $y = 2x + k$ τέμνει την παραβολή $y = -x^2$ λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = 2x + k \\ y = -x^2 \end{cases}$ (1)

Αν θέσουμε στην πρώτη εξίσωση $y = -x^2$, παίρνουμε $-x^2 = 2x + k$ ή ακόμη $x^2 + 2x + k = 0$. (2)

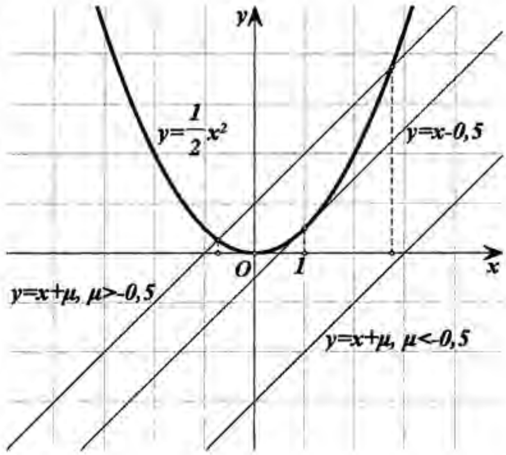
Είναι φανερό ότι οι δύο γραμμές θα τέμνονται σε δύο σημεία, μόνο αν το σύστημα (1) έχει δύο λύσεις, που σημαίνει ότι η εξίσωση (2) θα πρέπει να έχει δύο λύσεις. Αυτό συμβαίνει, μόνο αν είναι $\Delta = 4 - 4k > 0$, δηλαδή αν είναι $k < 1$.

5. Με αντικαταστάτη του $y = x + \mu$ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε την

$$2(x + \mu) = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2\mu = 0. \quad (1)$$

Η διακρίνουσα της (1) είναι $\Delta = 4 + 8\mu = 4(1 + 2\mu)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις



- $\Delta > 0$, δηλαδή $\mu > -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει δύο ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει δύο λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία τέμνονται.

- $\Delta = 0$, δηλαδή $\mu = -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει διπλή ρίζα, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μία λύση, οπότε η παραβολή και η ευθεία εφάπτονται.

- $\Delta < 0$, δηλαδή $\mu < -\frac{1}{2}$. Η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Γραφικά τα εξαγόμενα, εξηγούνται με τη βοήθεια του προηγούμενου σχήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 2.1 Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες Συνάρτησης

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. • Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
• Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
• Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

2. • Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -1$ και δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
• Η g δεν παρουσιάζει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.
• Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ και για $x = 1$ το $h(-1) = h(1) = -2$, ενώ δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

3. i) Αρκεί να δείξουμε τα $f(x) \geq f(3)$. Έχουμε
$f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0$, που ισχύει.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \leq g(1)$. Έχουμε

$$g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2+1} \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2, \text{ που ισχύει.}$$

4. i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4$, άρα η f_1 είναι άρτια.

ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1$, άρα η f_2 είναι άρτια.

iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_3(-x) = |-x + 1|$, οπότε δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, αφού
$f_3(-1) \neq \pm f_3(1)$.

iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(-x)$, άρα η f_4 περιττή.

v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0. Άρα, η f_5 δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

$$f_5(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}, \text{ άρα ούτε άρτια, ούτε περιττή.}$$

vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f_6(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f_6(x), \text{ άρα } f_6 \text{ είναι περιττή.}$$

5. i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$f_1(-x) = \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} = f_1(x).$$

Άρα η f_1 είναι άρτια.

ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $[2, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το O. Άρα δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f_3(-x) = |-x-1| - |-x+1| = |x+1| - |x-1| = -f_3(x).$$

Άρα η f_3 είναι περιττή.

iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι περιττή, διότι ισχύει

$$f_4(x) = \frac{\dfrac{x^2+1}{x}}{x^2+1} = \frac{1}{x}$$

Τέλος, αν εργαστούμε όπως στην i), θα αποδείξουμε ότι:

v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι $f_5(-x) = f_5(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και είναι άρτια, διότι $f_6(-x) = f_6(x)$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

6. i) Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το O(0, 0). Άρα η f είναι περιττή.

ii) Η C_g έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Άρα η g είναι άρτια.

iii) Η C_h δεν έχει ούτε άξονα συμμετρίας τον y΄y, ούτε κέντρο συμμετρίας το O(0, 0). Άρα η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

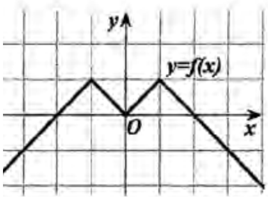
7. Ομοίως

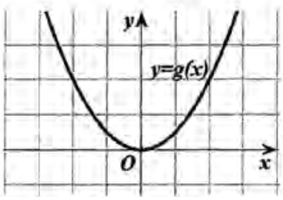
i) Η f είναι άρτια.

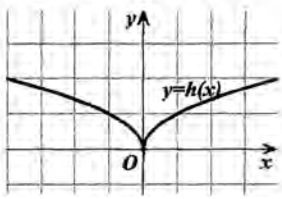
ii) Η g είναι περιττή.

iii) Η h δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

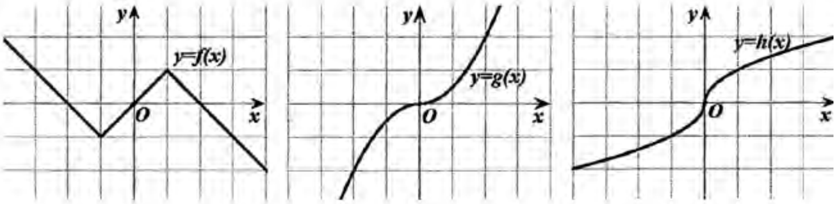
8. α) Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1, C_2 και C_3 ως προς τον άξονα y΄y.







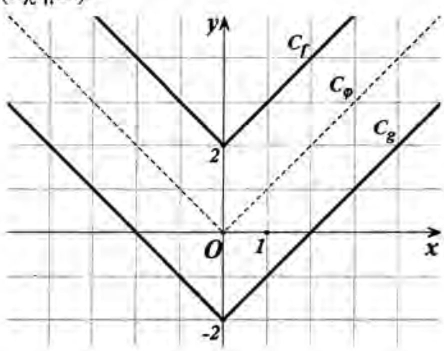
β) Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1, C_2 και C_3 ως προς την αρχή των αξόνων.



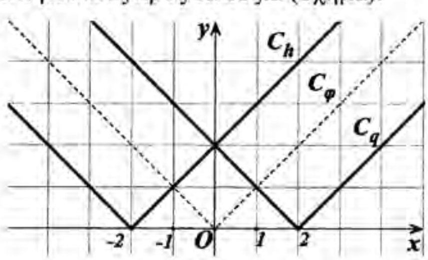
§ 2.2 Κατακόρυφη- Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

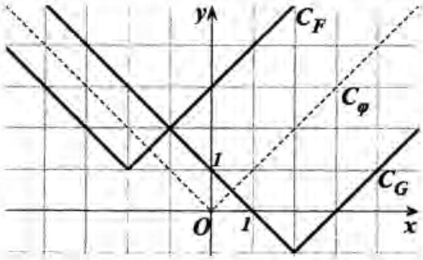
1. Όπως είδαμε στην §4.3, η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$, αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών $x\widehat{O}y$ και $x'\widehat{O}y$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| - 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω (σχήμα).



2. Η γραφική παράσταση της $h(x) = |x + 2|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά, ενώ η γραφική παράσταση της $q(x) = |x - 2|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (σχήμα).



3. Αρχικά χαράσσουμε την $y = |x + 2|$, που, όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$ κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = |x + 2| + 1$, που, όπως γνωρίζουμε, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = |x + 2|$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Επομένως, η γραφική παράσταση της $F(x) = |x + 2| + 1$. προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y = |x|$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδας προς τα πάνω (σχήμα).



Ομοίως, η γραφική παράσταση της $G(x) = |x - 2| - 1$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y = |x|$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω (σχήμα).

4. i) Έχουμε

$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x^2 - 2 \cdot x + 1^2) - 2 + 5 = 2(x - 1)^2 + 3.$

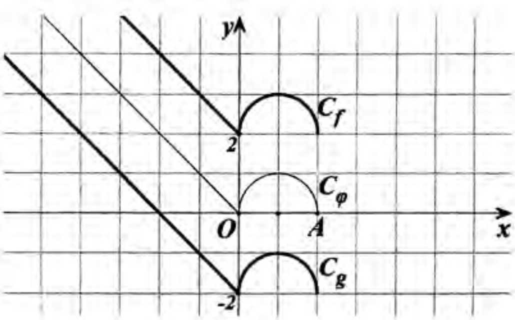
Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ii) Έχουμε

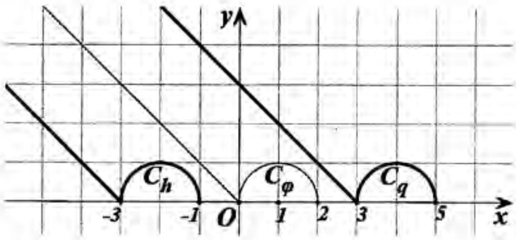
$f(x) = -2(x^2 - 4x) - 9 = -2(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 8 - 9 = -2(x - 2)^2 - 1.$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = -2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

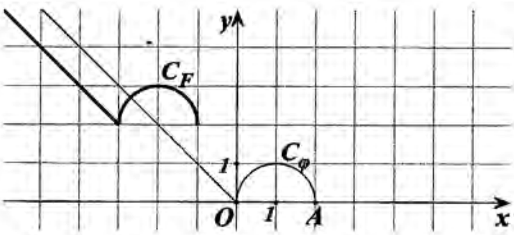
5. i)

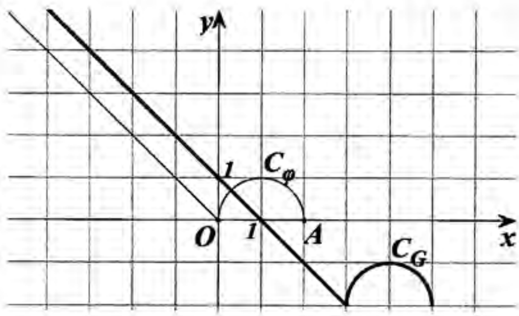


ii)



iii)





6. i) $f(x) = 2(x-2)^2 - 1 + 1 = 2(x-2)^2$.
ii) $f(x) = 2(x-3)^2 - 1 - 2 = 2(x-3)^2 - 3$.
iii) $f(x) = 2(x+2)^2 - 1 + 1 = 2(x+2)^2$.
iv) $f(x) = 2(x+3)^2 - 1 - 2 = 2(x+3)^2 - 3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

§ 3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta A B}$ έχουμε ημ $30° = \frac{x}{6}$, οπότε $x = 6$ ημ $30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Στο τρίγωνο τώρα $\overset{\triangle}{\Delta A \Gamma}$ έχουμε εφω $= \frac{x}{3} = \frac{3}{3} = 1$, οπότε $\omega = 45°$.

Επομένως, επειδή ημω $= \frac{x}{y}$, έχουμε

ημ $45° = \frac{3}{y}$, οπότε $y = \frac{3}{\text{ημ}\, 45^0} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

2. Επειδή $B + \Gamma = 90°$ θα είναι $A = 90°$. Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουμε ημ $30° = \frac{(AB)}{2}$, οπότε $(AB) = 2$ ημ $30° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

ημ $60° = \frac{(A\Gamma)}{2}$, οπότε $(A\Gamma) = 2$ ημ $60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

3. i) $S = \alpha \cdot \rho$

$6 = \omega \cdot 1$, άρα $\omega = 6\text{rad}$.

ii) $S = \alpha \cdot \rho$

$6 = \omega \cdot 2$, άρα $\omega = 3\text{rad}$.

iii) $S = \alpha \cdot \rho$

$6 = \omega \cdot 3$, άρα $\omega = 2\text{rad}$.

4. Από τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ έχουμε

i) Για $\mu = 30$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{30}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$. Άρα $30° = \frac{\pi}{6}$ rad

ii) Για $\mu = 120$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{120}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$. Άρα $120° = \frac{2\pi}{3}$ rad.

iii) Για $\mu = 1260$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1260}{180} \Leftrightarrow \alpha = 7\pi$. Άρα $1260° = 7\pi$ rad.

iv) Για $\mu = 1485$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1485}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{33\pi}{4}$. Άρα $-1485° = -\frac{33\pi}{4}$ rad.

5. Από τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ έχουμε

i) $\frac{\frac{\pi}{10}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 18$, άρα $\frac{\pi}{10}$ rad $= 18^0$.

ii) $\frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 150$, άρα $\frac{5\pi}{6}$ rad $= 150^0$.

iii) $\frac{\frac{91\pi}{3}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 5460$, άρα $\frac{91\pi}{3}$ rad $= 5460^0$.

iv) $\frac{100}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = \frac{18000}{\pi}$, άρα 100 rad $= \frac{18000^0}{\pi}$.

6. i) Είναι $1830° = 5 \cdot 360° + 30°$, οπότε

$\eta\mu\, 1830° = \eta\mu\, 30° = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\, 1830° = \sigma\upsilon\nu\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varepsilon\varphi\, 1830° = \varepsilon\varphi\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sigma\varphi\, 1830° = \sigma\varphi\, 30° = \sqrt{3}$.

ii) Είναι $2940° = 8 \cdot 360° + 60°$, οπότε

$\eta\mu\, 2940° = \eta\mu\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\, 2940° = \sigma\upsilon\nu\, 60° = \frac{1}{2}$

$\varepsilon\varphi\, 2940° = \varepsilon\varphi\, 60° = \sqrt{3}$, $\sigma\varphi\, 2940° = \sigma\varphi\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

iii) Είναι $1980° = 5 \cdot 360° + 180°$, οπότε
$\eta\mu\, 1980° = \eta\mu\, 180° = 0$, $\sigma\upsilon\nu\, 1980° = \sigma\upsilon\nu\, 180° = -1$.
$\varepsilon\varphi\, 1980° = \varepsilon\varphi\, 180° = 0$
ενώ δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη των 1980°.

iv) Είναι $3600° = 10 \cdot 360° + 0°$, οπότε
$\eta\mu\, 3600° = \eta\mu\, 0° = 0$, $\sigma\upsilon\nu\, 3600° = \sigma\upsilon\nu\, 0° = 1$.
$\varepsilon\varphi\, 3600° = \varepsilon\varphi\, 0° = 0$
ενώ δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη των 3600°.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta\Pi N}$ έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{h}{(\Pi\Delta)}, \text{ οπότε } (\Pi\Delta) = \frac{h}{\varepsilon\varphi\omega}. \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta\Lambda N}$ έχουμε

$$\varepsilon\varphi\, 70^\circ = \frac{h}{(\Delta\Lambda)}, \text{ οπότε } (\Delta\Lambda) = \frac{h}{\varepsilon\varphi\, 70^0}. \quad (2)$$

Επειδή $(\Pi\Lambda) = (\Pi\Delta) + (\Delta\Lambda)$, λόγω των (1) και (2), έχουμε

$$\frac{h}{\varepsilon\varphi\omega} + \frac{h}{\varepsilon\varphi\, 70^0} = 1000 \Leftrightarrow h \cdot \varepsilon\varphi\, 70^\circ + h \cdot \varepsilon\varphi\omega = 1000 \cdot \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\, 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow h(\varepsilon\varphi\, 70^\circ + \varepsilon\varphi\omega) = 1000 \cdot \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\, 70^\circ \Leftrightarrow h = \frac{1000 \cdot \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\, 70^0}{\varepsilon\varphi\, 70^0 + \varepsilon\varphi\omega}. \quad (3)$$

i) Αν $\omega = 30^\circ$, τότε, λόγω της (3), είναι

$$h = \frac{1000 \cdot \varepsilon\varphi\, 30^0 \cdot \varepsilon\varphi\, 70^0}{\varepsilon\varphi\, 70^0 + \varepsilon\varphi\, 30^0} \simeq 478$$

Αν $\omega = 45^\circ$, τότε έχουμε

$$h = \frac{1000 \cdot \varepsilon\varphi\, 45^0 \cdot \varepsilon\varphi\, 70^0}{\varepsilon\varphi\, 70^0 + \varepsilon\varphi\, 45^0} \simeq 733$$

Αν $\omega = 60^\circ$, τότε έχουμε

$$h = \frac{1000 \cdot \varepsilon\varphi\, 60^0 \cdot \varepsilon\varphi\, 70^0}{\varepsilon\varphi\, 70^0 + \varepsilon\varphi\, 60^0} \simeq 1062.$$

ii) Αν τώρα $h = 1000$, τότε λόγω της (3), είναι

$$1000 = \frac{1000 \cdot \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\, 70^0}{\varepsilon\varphi\, 70^0 + \varepsilon\varphi\omega} \Leftrightarrow 1 = \frac{\varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\, 70^0}{\varepsilon\varphi\, 70^0 + \varepsilon\varphi\, 45^0}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\, 70^\circ = \varepsilon\varphi\, 70^\circ + \varepsilon\varphi\omega$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega(\varepsilon\varphi\, 70^\circ - 1) = \varepsilon\varphi\, 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi\, 70^0}{\varepsilon\varphi\, 70^0 - 1} \simeq 1{,}5723.$$

Άρα $\omega \simeq 58^\circ$.

2. i) Επειδή $\widehat{\Gamma AB} = 45^\circ$ είναι $(A\Gamma) = (B\Gamma)$. Έχουμε όμως:

$$\eta\mu\, 45^0 = \frac{(A\Gamma)}{(AB)} = \frac{(A\Gamma)}{2}, \text{ οπότε } (A\Gamma) = 2\eta\mu 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

και επειδή $(A\Gamma) = (B\Gamma)$ θα είναι $(B\Gamma) = \sqrt{2}$.

ii) Στο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε

$$ημ\ 22{,}5^0 = \frac{(ΒΔ)}{(ΑΒ)} = \frac{(ΒΔ)}{2}.$$

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΑΕ είναι ίσα έχουμε (ΔΒ) = (ΔΕ). Έτσι (ΕΒ) = 2(ΒΔ) = 4 ημ 22,5°.

iii) Από την ισότητα των τριγώνων ΔΑΒ και ΔΑΕ προκύπτει (ΑΕ) = (ΑΒ) = 2. Άρα (ΕΓ) = (ΑΕ) – (ΑΓ) = $2-\sqrt{2}$.

iv) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΕΒ (σχήμα) έχουμε

$$(ΕΒ)^2 = (ΓΒ)^2 + (ΓΕ)^2 = (\sqrt{2}\,)^2 + (2-\sqrt{2}\,)^2.$$

Άρα ΕΒ = $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

v) Έχουμε $ημ\ 22{,}5^0 = \frac{(ΔΒ)}{2} = \frac{\frac{(ΕΒ)}{2}}{2} = \frac{(ΕΒ)}{4} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

vi) Μπορούμε να υπολογίσουμε το ημίτονο των γωνιών $\frac{22{,}5^0}{2}, \frac{22{,}5^0}{4}$ κ.τ.λ., αρκεί να διχοτομήσουμε τη γωνία $\widehat{ΒΑΔ}$ κ.τ.λ.

3. • Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$ημ\ 30^0 = \frac{6}{(ΑΓ)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{(ΑΓ)} \Leftrightarrow (ΑΓ) = 12.$$

• Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ έχουμε $\widehat{ΒΑΔ} = 30°$. Επομένως

$$εφ\ 30^0 = \frac{(ΒΔ)}{(ΑΒ)} \Leftrightarrow εφ\ 30^0 = \frac{(ΒΔ)}{6} \Leftrightarrow (ΒΔ) = 6\ εφ\ 30° = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Άρα ΒΔ = $2\sqrt{3}$.

• Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $ημ\ 60^0 = \frac{(ΒΓ)}{12} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(ΒΓ)}{12}$.

Άρα (ΒΓ) = $6\sqrt{3}$.

• Έχουμε (ΓΔ) = (ΒΓ) – (ΒΔ) = $6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Άρα (ΓΔ) = (ΔΑ) = $4\sqrt{3}$.

Επομένως περίμετρος = $12 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12 + 8\sqrt{3}$.

Εμβαδόν = $\frac{1}{2}(ΔΓ)\cdot(ΑΒ) = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 6 = 12\sqrt{3}$.

4. Όπως είναι γνωστό ο λεπτοδείκτης εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε χρόνο 1 ώρας ή 3600 δευτερολέπτων. Διαγράφει δηλαδή γωνία 2π rad σε 3600sec.

Επομένως σε 1sec διαγράφει γωνία $\frac{2\pi}{3600}$ rad.

Αν το μήκος του λεπτοδείκτη είναι ίσο με ρ, τότε σύμφωνα με τον τύπο S = αρ, το άκρο του λεπτοδείκτη σε 1sec θα διαγράψει τόξο μήκους $\frac{2\pi}{3600}\cdot\rho$.

Για να είναι το μήκος αυτό ίσο με 1mm αρκεί

$$\frac{2\pi}{3600}\cdot\rho = 1\text{mm} \Leftrightarrow \rho = \frac{3600}{2\pi}\text{mm} \simeq 573\text{mm}.$$

§ 3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν στην ισότητα $\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1$ αντικαταστήσουμε το ημx με $\frac{3}{5}$ βρίσκουμε

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2x = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\, x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \quad \left[\begin{array}{l}\text{αφού για } \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ \text{ισχύει συν } x < 0.\end{array}\right]$$

Επομένως $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{-3}{4}$ και $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-4}{3}$.

2. Αν στην ισότητα $\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1$ αντικαταστήσουμε το συνx με $\frac{-2}{3}$ βρίσκουμε

$$\eta\mu^2x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2x + \frac{4}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2x = \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\, x = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \left[\begin{array}{l}\text{αφού για } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \\ \text{ισχύει ημ } x < 0.\end{array}\right]$$

Επομένως $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. • $\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$

• Είναι $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,\sigma\upsilon\nu x$ (1)

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε

$$\frac{1}{3}\,\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 3 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x = 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left[\begin{array}{l}\text{αφού για } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \\ \text{ισχύει } \sigma\upsilon\nu x > 0.\end{array}\right]$$

• Από την (1) τώρα παίρνουμε $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{3\cdot 2} = -\frac{1}{2}$.

4. • $\varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sigma\varphi x} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

• Είναι $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,\eta\mu x$ (1)

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε

$$\eta\mu^2 x + \frac{4}{5}\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 5 \Leftrightarrow 9\eta\mu^2 x = 5$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \left[\begin{array}{l}\text{αφού για } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \text{ισχύει } \eta\mu x > 0.\end{array}\right]$$

• Από την (1) τώρα παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu x = \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}$.

5. • Είναι $\sigma\varphi x = -2 \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -2\,\eta\mu x$.

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε

$$\eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \left[\begin{array}{l}\text{αφού για } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \\ \text{ισχύει } \eta\mu x < 0.\end{array}\right]$$

• Από την (1) τώρα παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu x = -2\cdot\frac{-\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Επομένως η αριθμητική τιμή της παράστασης $\dfrac{2ημx\,συνx}{1+συνx}$ ισούται με

$$\frac{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}}{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{-\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{\cancel{5}}}=-\frac{4}{5+2\sqrt{5}}=\frac{-4\,(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})\,(5-2\sqrt{5})}=\frac{8\sqrt{5}-20}{5}.$$

6. Επειδή $ημ^2x+συν^2x=1$, αν υποθέσουμε ότι

i) $ημx=0$ και $συνx=0$, τότε θα ισχύει $0^2+0^2=1$, δηλαδή $0=1$, που είναι άτοπο.

ii) $ημx=1$ και $συνx=1$, τότε θα ισχύει $1^2+1^2=1$, δηλαδή $2=1$, που είναι άτοπο.

iii) $ημx=\dfrac{3}{5}$ και $συνx=\dfrac{4}{5}$ τότε $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=1$ που είναι αληθής.

Άρα υπάρχει τέτοια τιμή του x.

7. Αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση του M(x, y) από την αρχή O(0, 0) είναι ίση με 3. Πράγματι

$$(OM)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(3\,συνθ)^2+(3\,ημθ)^2}=\sqrt{9\,συν^2θ+9\,ημ^2θ}$$
$$=\sqrt{9\,(συν^2θ+ημ^2θ)}=\sqrt{9}=3.$$

8. Έχουμε

$$9x^2+4y^2=9\,(2\,συνθ)^2+4\,(3\,ημθ)^2=9\cdot 4\,συν^2θ+4\cdot 9\,ημ^2θ$$
$$=36\,συν^2θ+36\,ημ^2θ=36\,(συν^2θ+ημ^2θ)=36\cdot 1=36.$$

9. Έχουμε

$$x^2+y^2+z^2=r^2\,ημ^2θ\,συν^2φ+r^2\,ημ^2θ\,ημ^2φ+r^2\,συν^2θ$$
$$=r^2\,ημ^2θ\,(συν^2φ+ημ^2φ)+r^2\,συν^2θ=r^2\,ημ^2θ+r^2\,συν^2θ$$
$$=r^2\,(ημ^2θ+συν^2θ)=r^2.$$

10. i) Αν $1+συν\,α\neq 0$ και $ημ\,α\neq 0$, έχουμε

$$\frac{ημα}{1+συνα}=\frac{1-συνα}{ημα}\Leftrightarrow ημ^2α=(1+συνα)(1-συνα)$$
$$\Leftrightarrow ημ^2α=1-συν^2α \text{ που ισχύει.}$$

Αλλιώς αν $1+συνα\neq 0$ και $1-συνα\neq 0$, έχουμε

$$\frac{ημα}{1+συνα}=\frac{ημα\,(1-συνα)}{(1+συνα)\,(1-συνα)}=\frac{ημα\,(1-συνα)}{1-συν^2α}$$
$$=\frac{ημα\,(1-συνα)}{ημ^2α}=\frac{1-συνα}{ημα}.$$

ii) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = (\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2 - (\eta\mu^2\alpha)^2 = (\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha)(\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)$
$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = 2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1.$

11. Είναι

i) $$\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{\eta\mu^2\theta + (1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\eta\mu\theta\,(1+\sigma\upsilon\nu\theta)} =$$

$$\frac{\eta\mu^2\theta + 1 + 2\,\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\,(1+\sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{2 + 2\,\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta\,(1+\sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{2\,(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{\eta\mu\theta\,(1+\sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{2}{\eta\mu\theta}.$$

ii) $$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\,(1+\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x\,(1-\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)\,(1+\eta\mu x)} = \frac{2\,\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}$$

$$= \frac{2\,\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

12. i) $$\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\varepsilon\varphi\beta + \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}} = \frac{\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta + 1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta + 1}{\varepsilon\varphi\alpha}} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}.$$

ii) $$\varepsilon\varphi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \eta\mu^2\alpha = \frac{\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha\,(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \left(\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2\cdot\eta\mu^2\alpha$$

$$= \varepsilon\varphi^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha.$$

13. i) $$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} + \frac{\eta\mu x}{1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} + \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)\,(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x.$$

ii) $$(1-\sigma\upsilon\nu x)\left(1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = (1-\sigma\upsilon\nu x)\,\frac{\sigma\upsilon\nu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$= \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\eta\mu x = \varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x.$$

iii) $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x}=\dfrac{1}{\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\dfrac{1}{\dfrac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}}=\dfrac{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}{\underbrace{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2}_{1}}=\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x.$

iv) $\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\eta\mu x\right)\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x\right)=\dfrac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}$

$$=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Επειδή $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\alpha$ έχουμε διαδοχικά

$$(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2=\alpha^2$$
$$\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x+2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x=\alpha^2$$
$$1+2\ \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x=\alpha^2$$
$$\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\alpha^2-1}{2}. \qquad (1)$$

Επομένως

ii) $\dfrac{1}{\eta\mu x}+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{\alpha^2-1}{2}}=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-1}$. [λόγω της (1)]

iii) $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\dfrac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1}{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}$

$$=\dfrac{1}{\dfrac{\alpha^2-1}{2}}=\dfrac{2}{\alpha^2-1}.$$

iv) Σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$, έχουμε

$\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^3-3\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ (\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$

$=\alpha^3-3\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{2}\cdot\alpha\ \left[\text{αφού } \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\alpha \text{ και } \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\alpha^2-1}{2}\right]$

$=\alpha^3-\dfrac{3\alpha^3-3\alpha}{2}=\dfrac{3\alpha-\alpha^3}{2}=\dfrac{\alpha\,(3-\alpha^2)}{2}.$

2. i) Βλέπε εφαρμογή 2, §7.2.

ii) Σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\eta\mu^6x+\sigma\upsilon\nu^6x&=(\eta\mu^2x)^3+(\sigma\upsilon\nu^2x)^3\\&=\underbrace{(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)^3}_{1}-3\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x\,\underbrace{(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)}_{1}\\&=1-3\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x.\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}&2(\eta\mu^6x+\sigma\upsilon\nu^6x)-3(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x)\\&=2(1-3\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x)-3(1-2\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x)\\&=2-6\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x-3+6\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x=-1.\end{aligned}$$

3. Είναι

- $$\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}=\sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}}=\sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2x}}=\frac{1+\eta\mu x}{|\sigma\upsilon\nu x|}$$
$$=\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x},\text{ αφού } \sigma\upsilon\nu x>0,\text{ επειδή }\left[-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right].$$

- Ομοίως είναι $\sqrt{\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}=\dfrac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Επομένως
$$\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}-\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}=\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$
$$=\frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=2\varepsilon\varphi x.$$

4.
$$\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)}$$
$$=\frac{1+\sigma\upsilon\nu x+1-\sigma\upsilon\nu x+2\sqrt{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1-\sigma\upsilon\nu x)}}{(1+\sigma\upsilon\nu x)-(1-\sigma\upsilon\nu x)}$$
$$=\frac{2+2\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2x}}{2\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2+2\sqrt{\eta\mu^2x}}{2\sigma\upsilon\nu x}$$
$$=\frac{1+|\eta\mu x|}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\qquad\left[\text{αφού } 0\le x<\frac{\pi}{2}\text{ είναι } \eta\mu x\ge 0\right]$$
$$=\frac{(1+\eta\mu x)(1-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x\,(1-\eta\mu x)}=\frac{1-\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x\,(1-\eta\mu x)}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu x\,(1-\eta\mu x)}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}.$$

§ 3.3 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Αν διαιρέσουμε τον 1200 με τον 360 βρίσκουμε πηλίκο 3 και υπόλοιπο 120.
Επομένως $1200^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 120^\circ$
οπότε

$$ημ1200^\circ = ημ120^\circ = ημ(180^\circ - 60^\circ) = ημ60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$συν1200^\circ = συν120^\circ = συν(180^\circ - 60^\circ) = -συν60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$εφ1200^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \text{ και } σφ1200^\circ = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ii) Ομοίως έχουμε $2850^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 330^\circ$
οπότε

$$\begin{aligned} ημ(-2850^\circ) &= -ημ2850^\circ = -ημ330^\circ = -ημ(360^\circ - 30^\circ) \\ &= -ημ(-30^\circ) = ημ30^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} συν(-2850^\circ) &= συν2850^\circ = συν330^\circ = συν(360^\circ - 30^\circ) \\ &= συν(-30^\circ) = συν30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$εφ(-2850^\circ) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ και } σφ(-2850^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

2. i) Είναι $\frac{187\pi}{6} = \frac{187}{12} \cdot 2\pi$. Αν τώρα διαιρέσουμε το 187 με το 12 βρίσκουμε πηλίκο 15 και υπόλοιπο 7. Επομένως έχουμε

$$\frac{187\pi}{6} = \frac{187}{12} \cdot 2\pi = \left(15 + \frac{7}{12}\right)2\pi = 15 \cdot 2\pi + \frac{7\pi}{6}$$

οπότε

$$ημ\frac{187\pi}{6} = ημ\left(15 \cdot 2\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = ημ\frac{7\pi}{6} = ημ\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -ημ\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$συν\frac{187\pi}{6} = συν\frac{7\pi}{6} = συν\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -συν\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{187\pi}{6}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad \text{και}\quad \sigma\varphi\frac{187\pi}{6}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}.$$

ii) Είναι $\frac{21\pi}{4}=\frac{21}{8}\cdot 2\pi$. Αν τώρα διαιρέσουμε το 21 με το 8 βρίσκουμε πηλίκο 2 και υπόλοιπο 5. Επομένως έχουμε

$$\frac{21\pi}{4}=\frac{21}{8}\cdot 2\pi=\left(2+\frac{5}{8}\right)2\pi=2\cdot 2\pi+\frac{5\pi}{4}$$

οπότε

$$\eta\mu\frac{21\pi}{4}=\eta\mu\frac{5\pi}{4}=\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{21\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{21\pi}{4}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1\quad \text{και}\quad \sigma\varphi\frac{21\pi}{4}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1.$$

3. Επειδή $A+B+\Gamma=180°$ είναι

$$A=180°-(B+\Gamma)\quad \text{και}\quad \frac{A}{2}=90^0-\frac{B+\Gamma}{2}.$$

Έτσι έχουμε

i) $\eta\mu A=\eta\mu(180°-(B+\Gamma))=\eta\mu(B+\Gamma)$.

ii) $\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu(180°-(B+\Gamma))=-\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)$.
$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=0$.

iii) $\eta\mu\frac{A}{2}=\eta\mu\left(90^0-\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$ και

iv) $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(90^0-\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$.

4. Επειδή $\sigma\upsilon\nu(-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\sigma\upsilon\nu(180°+\alpha)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\eta\mu(-\alpha)=-\eta\mu\alpha$ και $\eta\mu(90°+\alpha)=\eta\mu(90°-(-\alpha))=\sigma\upsilon\nu(-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$, έχουμε

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^0+\alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\cdot\eta\mu(90^0+\alpha)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot(-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{(-\eta\mu\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\sigma\varphi\alpha.$$

5. Είναι

$εφ(π - x) = -εφx$, $συν(2π + x) = συνx$

$$συν\left(\frac{9π}{2} + x\right) = συν\left(2 \cdot 2π + \frac{π}{2} + x\right) = συν\left(\frac{π}{2} + x\right) = συν\left(\frac{π}{2} - (-x)\right)$$

$$= ημ(-x) = -ημx.$$

$ημ(13π + x) = ημ(6 \cdot 2π + π + x) = ημ(π + x) = -ημx$, $συν(-x) = συνx$ και

$$σφ\left(\frac{21π}{2} - x\right) = σφ\left(5 \cdot 2π + \frac{π}{2} - x\right) = σφ\left(\frac{π}{2} - x\right) = εφx.$$

Επομένως

$$\frac{εφ(π - x) \cdot συν(2π + x) \cdot συν\left(\frac{9π}{2} + x\right)}{ημ(13π + x) \cdot συν(-x) \cdot σφ\left(\frac{21π}{2} - x\right)} = \frac{(-εφx) \cdot \cancel{συνx} \cdot (-\cancel{ημx})}{(-\cancel{ημx}) \cdot \cancel{συνx} \cdot εφx} = -1.$$

6. Επειδή $ημ(π - x) = ημx$, $συν(π - x) = -συνx$

$συν(2π - x) = συν(-x) = συνx$ και $ημ\left(\frac{π}{2} - x\right) = συνx$, έχουμε

$$ημ^2(π - x) + συν(π - x)\, συν(2π - x) + 2ημ^2\left(\frac{π}{2} - x\right)$$

$$= ημ^2x - συνx \cdot συνx + 2συν^2x = ημ^2x + συν^2x = 1.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Επειδή

$$ημ495° = ημ(360° + 135°) = ημ135° = ημ(180° - 45°) = ημ45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$συν120° = συν(180° - 60°) = -συν60° = -\frac{1}{2}$$

$$συν\,495° = συν(360° + 135°) = συν\,135° = συν(180° - 45°) = -συν45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$συν(-120°) = συν120° = -\frac{1}{2}$ (όπως προηγουμένως)

$εφ(-120°) = -εφ120° = -εφ(180° - 60°) = εφ60° = \sqrt{3}$ και

$εφ495° = εφ(360° + 135°) = εφ135° = εφ(180° - 45°) = -εφ45° = -1.$

η τιμή της παράστασης ισούται με

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3} + (-1)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{3} - 1} = 0.$$

2. Έχουμε

$ημ(5π + ω) = ημ(4π + π + ω) = ημ(π + ω) = -ημω$

$συν(7π - ω) = συν(6π + π - ω) = συν(π - ω) = -συνω$

$$\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega$$

$$\sigma\varphi(5\pi+\omega)=\sigma\varphi(4\pi+\pi+\omega)=\sigma\varphi(\pi+\omega)=\sigma\varphi\omega$$

$$\eta\mu(7\pi-\omega)=\eta\mu(6\pi+\pi-\omega)=\eta\mu(\pi-\omega)=\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\varphi\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{2}+\omega\right)=-\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=-\varepsilon\varphi\omega$$

Επομένως η παράσταση γίνεται

$$\frac{(-\eta\mu\omega)\,(-\sigma\upsilon\nu\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\cancel{\eta\mu\omega}}{\sigma\varphi\omega\cdot\cancel{\eta\mu\omega}\cdot\eta\mu\omega\,(-\varepsilon\varphi\omega)}=-\frac{\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu\omega}=-\sigma\upsilon\nu^2\omega=\eta\mu^2\omega-1.$$

3. Σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, έχουμε

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$

$$=\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right]^2-2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$

$$=5^2-2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=25-2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sigma\varphi\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right]$$

$$=25-2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=25-2=23.$$

4. Είναι

$$0<\frac{\varepsilon\varphi(\pi+x)}{\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi(\pi+x)}<1\Leftrightarrow 0<\frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x}<1$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x+\dfrac{1}{\sigma\varphi x}}<1$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{\varepsilon\varphi x}{\dfrac{\varepsilon\varphi^2 x+1}{\varepsilon\varphi x}}<1$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi^2 x+1}<1$$

$$\Leftrightarrow 0<\varepsilon\varphi^2 x<\varepsilon\varphi^2 x+1.$$

που ισχύει, γιατί αποκλείεται να είναι $\varepsilon\varphi x=0$, αφού, λόγω υποθέσεως, ορίζεται η $\sigma\varphi x$.

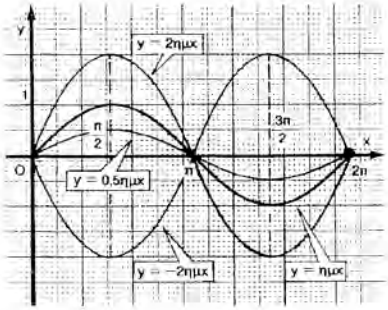
§ 3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Με τη βοήθεια του πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	−1	0
0,5 ημx	0	0.5	0	− 0,5	0
2ημx	0	2	0	− 2	0
−2ημx	0	−2	0	2	0

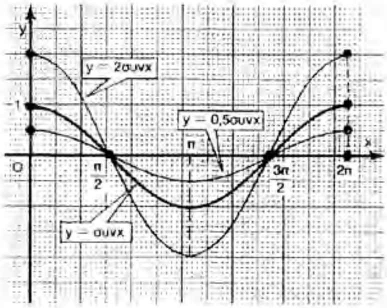
σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



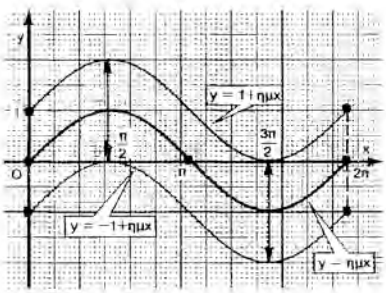
ii) Με τη βοήθεια του πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx	1	0	−1	0	1
0,5 συνx	0,5	0	− 0, 5	0	0,5
2συνx	2	2	−2	0	2
− 2συνx	− 2	0	2	0	− 2

σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



2. Η γραφική παράσταση της $g(x) = 1 + ημx$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = ημx$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ της $f(x) = - 1 + ημx$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

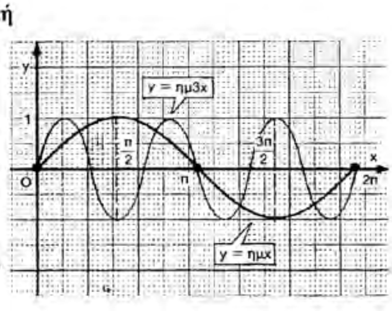


3. Η συνάρτηση $f(x)=$ ημ 3x είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{3}$.

Με τη βοήθεια του πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
ημ 3x	0	1	0	− 1	0

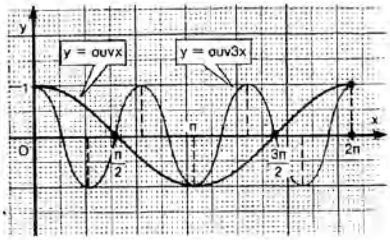
σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της g, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



4. Ομοίως η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu\, 3x$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{3}$.
Με τη βοήθεια του πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
συν 3x	1	0	−1	0	1

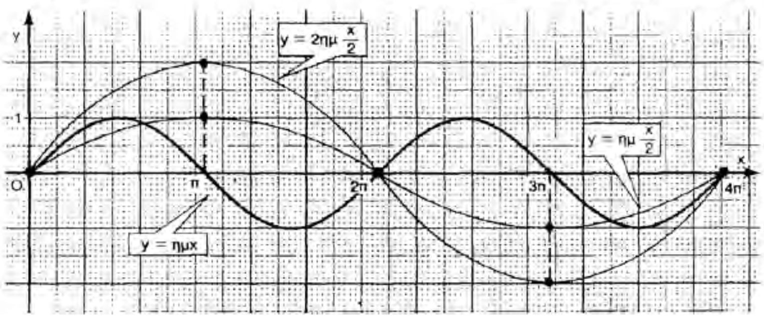
σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



5. Επειδή η μέγιστη τιμή της $\varphi(x) = \eta\mu \frac{x}{2}$ είναι 1, και η ελάχιστη τιμή της −1 η μέγιστη τιμή της $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$ είναι 2 και η ελάχιστη −2.
Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{1} = 4\pi$.

Με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:

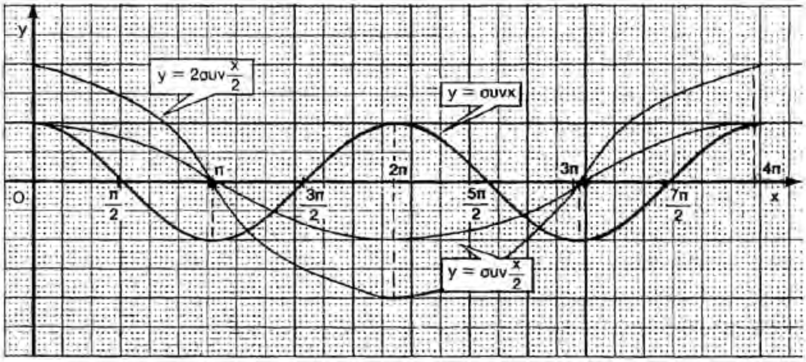
x	0	π	2π	3π
$2\eta\mu\frac{x}{2}$	0	2	0	2



6. Ομοίως, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ είναι 2, και η ελάχιστη τιμή της −2.
Αν εργαστούμε όπως στο παράδειγμα 2 της §... βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$, άρα και η $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$, είναι περιοδική με περίοδο: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

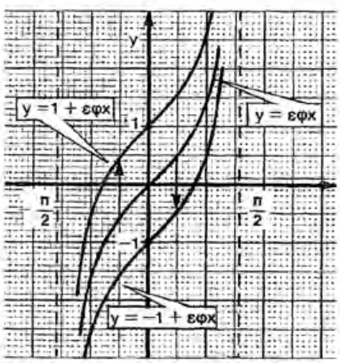
Με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα: σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

x	0	π	2π	3π	4π
$2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$	2	0	−2	0	2

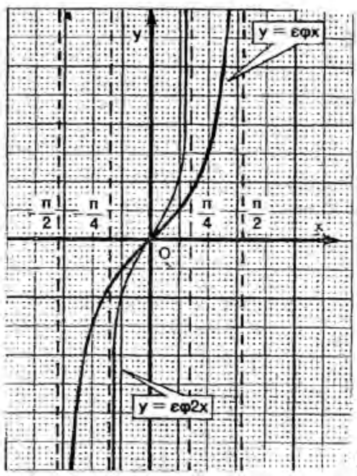


7. Η γραφική παράσταση της $g(x) = 1 + εφx$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = εφx$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ της $h(x) = -1 + εφx$ κατά μια μονάδα προς τα κάτω.

(8)



(9)



8. Κάθε τιμή της συνάρτησης $f(x) = εφ\,2x$ επαναλαμβάνεται, όταν το $2x$ αυξηθεί κατά π, που σημαίνει ότι η τιμή αυτή επαναλαμβάνεται, όταν το x αυξηθεί κατά $\frac{π}{2}$. Επομένως η συνάρτηση $f(x) = εφ\,2x$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{π}{2}$.

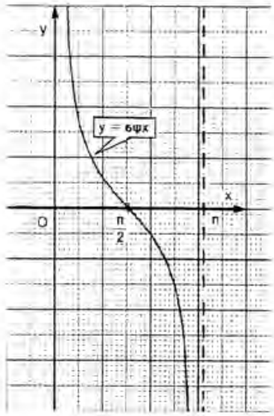
Έχοντας υπόψη το στοιχείο αυτό και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = εφ\,2x$.

x	$-\frac{π}{4}$	$-\frac{π}{6}$	$-\frac{π}{8}$	$-\frac{π}{12}$	0	$\frac{π}{12}$	$\frac{π}{8}$	$\frac{π}{6}$	$\frac{π}{4}$
εφ 2x.	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

9. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = σφx$ είναι περιοδική με περίοδο π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ το (0,π). Αν εργαστούμε, όπως και για τη $f(x) = εφx$, συμπεραίνουμε ότι η $f(x) = σφx$,

— είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,π)
— έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 0$ και $x = π$.

Η γραφική της παράσταση στο (0,π) φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι φανερό ότι η πρώτη είναι η $y = ημx$. Επομένως οι άλλες είναι της μορφής:

$$y = α \; ημ\, ω \, x.$$

— Η περίοδος της δεύτερης ισούται με 4π. Έτσι $\frac{2π}{ω} = 4π$, οπότε $ω = \frac{1}{2}$.

Το πλάτος α της δεύτερης ισούται με 1. Άρα η εξίσωσή της είναι η $y = ημ\frac{x}{2}$.

— Η περίοδος της τρίτης ισούται με $\frac{2π}{3}$. Έτσι $\frac{2π}{ω} = \frac{2π}{3}$, οπότε $ω = 3$.

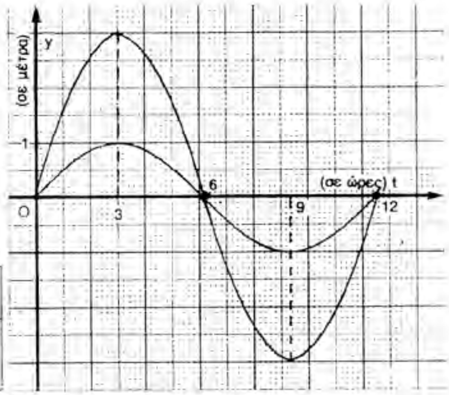
Το πλάτος α της τρίτης ισούται με 1. Άρα η εξίσωσή της είναι η $y = ημ\,3x$.

ii) Αν εργαστούμε όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι:

— Η εξίσωση της πρώτης είναι η $y = ημx$
— Η εξίσωση της δεύτερης είναι η $y = 3\,ημx$
— Η εξίσωση της τρίτης είναι η $y = 0{,}5\,ημx$ και
— Η εξίσωση της τέταρτης είναι η $y = -2{,}5\,ημx$.

2. i) Η υψηλότερη πλημμυρίδα ισούται με 3m και παρατηρείται όταν: $ημ\dfrac{πt}{6} = 1$, ενώ η χαμηλότερη άμπωτη ισούται με – 3m και παρατηρείται όταν $ημ\dfrac{πt}{6} = -1$. Άρα η ζητούμενη υψομετρική διαφορά ισούται με 6m.

ii) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = -χημ\,ω\,t$. Άρα είναι η περιοδική με περίοδο $\dfrac{2π}{ω} = \dfrac{2π}{\frac{π}{6}} = 12$ ώρες.

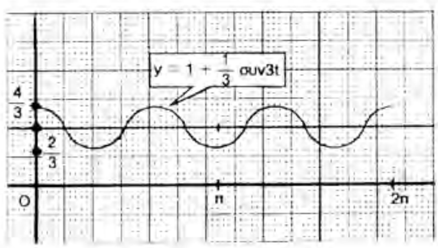


Με τη βοήθεια του πίνακα:

t	0	3	6	9	12
$3ημ\dfrac{πt}{6}$	0	3	0	– 3	0

σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση που δίνεται στο παραπάνω σχήμα.

3. i) Όπως και προηγουμένως το μέγιστο ύψος ισούται με
$\left(1 + \dfrac{1}{3}\right)m = \dfrac{4}{3}\,m$,
ενώ το ελάχιστο ύψος ισούται με $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)m = \dfrac{2}{3}\,m$.
Επομένως η ζητούμενη διαφορά ισούται με
$\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}\right)m = \dfrac{2}{3}\,m$.



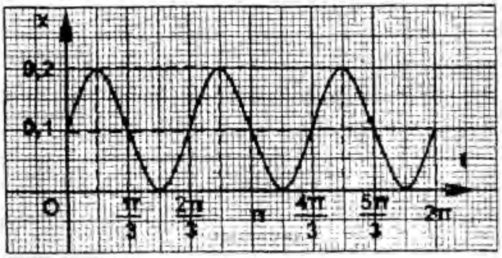
ii) Αν εργαστούμε όπως στο παράδειγμα 2 της §... βρίσκουμε ότι περίοδος της συνάρτησης ισούται με $\dfrac{2π}{3}$.

iii) Έχοντας υπόψη τα παραπάνω και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

t	0	$\frac{π}{6}$	$\frac{π}{3}$	$\frac{π}{2}$	$\frac{2π}{3}$
$1+\frac{1}{3}$ συν3t	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$

4. i) Το πλάτος της κίνησης του πιστονιού ισούται με 0,1m.

ii) Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi/3$ sec.
Η γραφική της παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η επίλυση της εξίσωσης $x(t)=0,15$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ μας δίνει τις λύσεις $\pi/18$, $5\pi/18$, $13\pi/18$, $17\pi/18$, $25\pi/18$ και $29\pi/18$.

§ 3.5 Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i)
$$\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \quad ή \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}, \ k \in Z$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \quad ή \\ x = (2k+1)\pi \end{cases}, \ k \in Z \Leftrightarrow x = \lambda\pi, \ \lambda \in Z$$

ii)
$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \quad ή \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{4} \end{cases}, \ k \in Z$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \quad ή \\ x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}, \ k \in Z$$

iii)
$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Longleftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, \ k \in Z$$
$$\Longleftrightarrow x = \lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \ \lambda \in Z.$$

iv) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$

2. i) $\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \acute{\eta} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}, k \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}, k \in Z.$$

ii) $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \acute{\eta} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}, k \in Z \Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in Z$$

iii) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\, x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\, k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$, $k \in Z$

iv) $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \pi$, $k \in Z$

$\Leftrightarrow x = 2\rho\pi + \pi$, $\rho \in Z$.

3. i) $\varepsilon\varphi x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in Z$

ii) $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in Z$

iii) $\sigma\varphi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$

iv) $\sigma\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in Z$.

4. i) $\varepsilon\varphi x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = k\pi - \dfrac{\pi}{6}, k \in Z$

ii) $\sigma\varphi x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = -\sigma\varphi\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = k\pi - \dfrac{\pi}{3}, k \in Z.$

5. i) $(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x-\sqrt{3}\ )=0 \iff 1-\eta\mu x=0$ ή $2\eta\mu x-\sqrt{3}=0$

$\iff \eta\mu x=1$ ή $\eta\mu x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \eta\mu x=\eta\mu\dfrac{\pi}{2}$ ή $\eta\mu x=\eta\mu\dfrac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in Z \quad \text{ή} \quad \left\{\begin{array}{c} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right., k \in Z$$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ή $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}$ ή $x = 2k\pi + \dfrac{2\pi}{3} \quad k \in Z$

ii) $\left(2\eta\mu x + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sigma\upsilon\nu x\right) = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x + \sqrt{2} = 0$ ή $1 - \sigma\upsilon\nu x = 0$

$\Leftrightarrow \eta\mu x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x = 1 \quad \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ή $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\, 0$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi, k \in Z.$

6. i) $\left(\sqrt{3} + \varepsilon\varphi x\right)\left(1 - \varepsilon\varphi x\right) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$ ή $\varepsilon\varphi x = 1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ ή $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x = k\pi - \dfrac{\pi}{3}$ ή $x = k\pi + \dfrac{\pi}{4}, k \in Z$

ii) $\left(2\sigma\upsilon\nu x + 1\right)\left(\varepsilon\varphi^2 x - 3\right)\sigma\varphi x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{1}{2}$ ή $\varepsilon\varphi^2 x = 3$ ή $\sigma\varphi x = 0$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \ \text{ή} \ \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \ \text{ή} \ \varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} \ \text{ή} \ \sigma\varphi x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} \ \text{ή} \ \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \ \text{ή} \ \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \ \text{ή} \ \sigma\varphi x = \sigma\varphi \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \ \text{ή} \ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \ \text{ή} \ x = k\pi - \frac{\pi}{3} \ \text{ή} \ x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \ k \in Z.$$

όμως οι λύσεις $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ απορρίπτονται γιατί δε ορίζεται ή εφχ για $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

7. i) Επειδή $0{,}951 = \eta\mu\, 72° = \eta\mu \frac{2\pi}{5}$, έχουμε:

$$\eta\mu x = 0{,}951 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{2\pi}{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{5} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{2\pi}{5} \end{cases}, k \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{5} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{5} \end{cases}, k \in Z$$

ii) Επειδή $0{,}809 = \sigma\upsilon\nu\, 36° = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5}$, έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x = -0{,}809 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\, x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{5}$$

$$\Longleftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{4\pi}{5}, \ k \in Z.$$

iii) Επειδή $28{,}636 = \varepsilon\varphi\, 88° = \varepsilon\varphi \frac{22\pi}{45}$, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi x = 28{,}636 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{22\pi}{45}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi + \frac{22\pi}{45}, \ k \in Z.$$

8. **i)** $2ημ\,3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow ημ\,3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow ημ\,3x = ημ\,\frac{π}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2kπ + \frac{π}{3} \\ ή \\ 3x = 2kπ + π - \frac{π}{3} \end{cases},\ k \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6kπ + π}{9} \\ ή \\ x = \frac{6kπ + 2π}{9} \end{cases},\ k \in Z.$$

ii) $συν\,\frac{x}{5} + 1 = 0 \Leftrightarrow συν\frac{x}{5} = -1 \Leftrightarrow συν\,\frac{x}{5} = συν\,π$

$\Leftrightarrow \frac{x}{5} = 2kπ \pm π,\ k \in Z \Leftrightarrow \frac{x}{5} = 2kπ + π,\ k \in Z$

$\Leftrightarrow x = 10\,kπ + 5π,\ k \in Z.$

iii) $3\,εφ\,\frac{2x}{7} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow εφ\,\frac{2x}{7} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφ\,\frac{2x}{7} = εφ\,\frac{π}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{7} = kπ + \frac{π}{6},\ k \in Z$

$\Leftrightarrow 12x = 42kπ + 7π,\ k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \frac{42kπ + 7π}{12},\ k \in Z$

9. **i)** $ημ\left(x + \frac{π}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow ημ\left(x + \frac{π}{3}\right) = ημ\left(-\frac{π}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x + \frac{π}{3} = 2kπ - \frac{π}{2},\ k \in Z$

$\Leftrightarrow x = 2kπ - \frac{π}{2} - \frac{π}{3},\ k \in Z$

$\Leftrightarrow x = 2kπ - \frac{5π}{6},\ k \in Z$

ii) $2\,συν\left(3x - \frac{π}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow συν\left(3x - \frac{π}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συν\left(3x - \frac{π}{4}\right) = συν\,\frac{π}{3}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - \dfrac{\pi}{4} = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 3x - \dfrac{\pi}{4} = 2k\pi - \dfrac{\pi}{3} \end{cases}, k \in Z$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 36x - 3\pi = 24k\pi + 4\pi \\ \text{ή} \\ 36x - 3\pi = 24k\pi - 4\pi \end{cases}, k \in Z$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24\kappa\pi + 7\pi}{36} \\ \text{ή} \\ x = \dfrac{24\kappa\pi - \pi}{36} \end{cases}, k \in Z$$

iii) $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4} - 5x\right) = \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - 5x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad , k \in Z$$

$$\Leftrightarrow 3\pi - 60x = 12k\pi + 4\pi \quad , k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12k\pi - \pi}{60} \quad , k \in Z$$

10. i) Αν θέσουμε ημ ω= t, η εξίσωση γράφεται:

$$2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow t = -1 \text{ ή } t = \frac{1}{2}$$

Επομένως:

- Για $t = -1$ έχουμε:

$$\eta\mu\omega = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \omega = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$$

- Για $t = \dfrac{1}{2}$ έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ \omega = 2k\pi - \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} k \in Z$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$\omega = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ή $\omega = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $\omega = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$, $k \in Z$

ii) Αν θέσουμε συν $x = t$, η εξίσωση γράφεται:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow t = -2 \text{ ή } t = \frac{1}{2}$$

Επομένως:

• Για $t = -2$ έχουμε:
συν$x = 2$ αδύνατο, αφού $-1 \le$ συν$x \le 1$

• Για $t = \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$\text{συν}x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3},\ k \in Z$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$

iii) Αν θέσουμε εφ $t = \omega$, η εξίσωση γράφεται:

$$3\omega^2 = 3 + 2\sqrt{3}\omega \Leftrightarrow 3\omega^2 - 2\sqrt{3}\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{3} \text{ ή } \omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Επομένως:

• Για $\omega = \sqrt{3}$, έχουμε:

$$\text{εφ}t = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{εφ}t = \text{εφ}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = k\pi + \frac{\pi}{3},\quad k \in Z$$

• Για $\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, έχουμε:

$$\text{εφ}t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \text{εφ}t = -\text{εφ}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \text{εφ}t = \text{εφ}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = k\pi - \frac{\pi}{6},\quad k \in Z.$$

11. i) Είναι:

$$ημ^2x + 5\,συν^2x = 4 \quad \Leftrightarrow 1 - συν^2x + 5συν^2x = 4$$

$$\Leftrightarrow 4συν^2x = 3 \quad \Leftrightarrow συν^2x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow συνx = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ή \quad συνx = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Αλλά:

- $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow συνx = συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$
- $συνx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow συνx = -συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow συνx = συν\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow συνx = συν\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\lambda\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \lambda \in Z$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}, & k \in Z \\ \quad ή & \\ x = 2\lambda\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}, & \lambda \in Z. \end{cases}$$

ii) Η εφx και η σφ 2x έχουν νόημα εφόσον:

$συν\,x \neq 0$ και $ημ\,2x \neq 0$ (1)

Με αυτούς τους περιορισμούς, έχουμε:

$$εφx \cdot σφ\,2x = 1 \Leftrightarrow σφ\,2x = \frac{1}{εφx} \Leftrightarrow σφ\,2x = σφx$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi + x \quad , k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \quad , k \in Z$$

Από τις λύσεις αυτές καμμία δεν ικανοποιεί τον περιορισμό $ημ\,2x \neq 0$. Άρα η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

12. i) Η συνάρτηση $f(x) = 3ημ\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ παρουσιάζει μέγιστο όταν $ημ\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

και ελάχιστο όταν $ημ\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Αλλά

- $ημ\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow ημ\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = ημ\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi,\ k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \pi \quad , \text{αφού} \quad 0 \leq x < 2\pi$$

• $ημ\left(x - \frac{π}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow ημ\left(x - \frac{π}{2}\right) = ημ\left(-\frac{π}{2}\right) \Leftrightarrow x - \frac{π}{2} = 2kπ - \frac{π}{2}, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = 2kπ \quad k \in Z$

$\Leftrightarrow x = 0$, αφού $0 \leq x < 2π$

Επομένως η f παρουσιάζει στο $[0, 2π)$ μέγιστο για $x = π$, το $f(π) = 3$ και ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = -3$.

ii) Η συνάρτηση $f(x) = 7\ συν\left(x - \frac{π}{2}\right)$ παρουσιάζει μέγιστο όταν

$συν\left(x - \frac{π}{2}\right) = 1$ και ελάχιστο όταν $συν\left(x - \frac{π}{2}\right) = -1$.

Αλλά

• $συν\left(x - \frac{π}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow συν\left(x - \frac{π}{2}\right) = συν\,0 \Leftrightarrow x - \frac{π}{2} = 2kπ, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = 2kπ + \frac{π}{2}, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \frac{π}{2}$, αφού $0 \leq x \leq 2π$

• $συν\left(x - \frac{π}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow συν\left(x - \frac{π}{2}\right) = συν\,π \Leftrightarrow x - \frac{π}{2} = 2kπ + π, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = 2kπ + \frac{3π}{2}, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \frac{3π}{2}$, αφού $0 \leq x \leq 2π$

Επομένως η g παρουσιάζει στο $[0, 2π]$ μέγιστο για $x = \frac{π}{2}$, το $g\left(\frac{π}{2}\right) = 7$ και ελάχιστο για $x = \frac{3π}{2}$, το $g\left(\frac{3π}{2}\right) = -7$.

13. i) Επειδή $S = 100$ αρκεί να βρούμε το $t \in \{1, 2, ..., 12\}$ για το οποίο ισχύει:

$100 = 75 + 50\ ημ\frac{πt}{6}$

Έχουμε:

$100 = 75 + 50\ ημ\frac{πt}{6} \Leftrightarrow 25 = 50\ ημ\frac{πt}{6} \Leftrightarrow ημ\frac{πt}{6} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow ημ\frac{πt}{6} = ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{πt}{6} = 2kπ + \frac{π}{6} \\ \text{ή} \\ \frac{πt}{6} = 2kπ + π - \frac{π}{6} \end{cases}, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 12k + 1 \\ \text{ή} \\ t = 12k + 5 \end{cases}, \quad k \in Z \Leftrightarrow t = 1 \text{ ή } t = 5, \text{ αφού } 1 \le t \le 12$$

Άρα οι ζητούμενοι μήνες είναι ο Ιανουάριος και ο Μάιος.

ii) Το S παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του όταν το $ημ\frac{πt}{6}$ πάρει τη μεγαλύτερη τιμή του δηλαδή όταν $ημ\frac{πt}{6} = 1$.

Επειδή:

$$ημ\frac{πt}{6} = 1 \Leftrightarrow ημ\frac{πt}{6} = ημ\frac{π}{2} \Leftrightarrow \frac{πt}{6} = 2kπ + \frac{π}{2}, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow t = 12k + 3, k \in Z \quad \Leftrightarrow t = 3, \text{ αφού } 1 \le t \le 12$$

Άρα τον μήνα Μάρτιο έχουμε το μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι:

$$ημx + συν\left(\frac{π}{4} - x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow ημx = -συν\left(\frac{π}{4} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow ημx = συν\left[π - \left(\frac{π}{4} - x\right)\right] \Leftrightarrow ημx = συν\left(\frac{3π}{4} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow ημx = ημ\left[\frac{π}{2} - \left(\frac{3π}{4} + x\right)\right] \Leftrightarrow ημx = ημ\left(-\frac{π}{4} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2kπ + \left(-\frac{π}{4} - x\right), k \in Z \\ \text{ή} \\ x = 2kπ + π - \left(-\frac{π}{4} - x\right), k \in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2kπ - \frac{π}{4}, k \in Z \\ \text{ή} \\ 0x = 2kπ + \frac{5π}{4}, k \in Z \quad \text{(αδύνατη)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = kπ - \frac{π}{8}, \; k \in Z$$

ii) Η $εφ2x$ και $σφ\left(\frac{π}{3} + 3x\right)$ έχουν νόημα εφόσον $συν2x \neq 0$ και $ημ\left(\frac{π}{3} + 3x\right) \neq 0$.

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\, 2x - \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\, 2x = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\, 2x = \varepsilon\varphi\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)\right] \quad \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\, 2x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6} - 3x \quad ,k \in Z \quad \Leftrightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad ,k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{30} \quad ,k \in Z$$ που ικανοποιούν τους περιορισμούς.

2. i) Η εφx έχει νόημα εφόσον συν $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\varepsilon\varphi x\, \eta\mu x + 1 = \eta\mu x + \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x\, \eta\mu x - \varepsilon\varphi x) - (\eta\mu x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x\, (\eta\mu x - 1) - (\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu x - 1)\,(\varepsilon\varphi x - 1) = 0$$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1$ ή $\eta\mu x = 1$ (αδύνατη, γιατί συν $x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in Z.$$

Οι λύσεις αυτές είναι δεκτές, αφού προφανώς ικανοποιούν τον περιορισμό συν $x \neq 0$.

ii) Η εξίσωση ορίζεται, εφόσον συν $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\varphi x = 4 \quad \Leftrightarrow 1 + \varepsilon\varphi^2 x - 2\varepsilon\varphi x = 4 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x - 2\varepsilon\varphi x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \text{ ή } \varepsilon\varphi x = 3.$$

Αλλά:

- $\varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad , k \in Z$
- $\varepsilon\varphi x = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\, 72^\circ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x = \lambda\pi + \frac{2\pi}{5} \quad , k \in Z$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in Z \quad \text{ή} \quad x = \lambda\pi + \frac{2\pi}{5} \quad ,\lambda \in Z,$$

αφού προφανώς ικανοποιούν τον περιορισμό συν $x \neq 0$.

3. Είναι:

$$\varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad ,k \in Z$$

Άρα έχουμε:

$$x \in (3\pi, 4\pi) \Leftrightarrow 3\pi < x < 4\pi \Leftrightarrow 3\pi < k\pi + \frac{\pi}{4} < 4\pi \quad , k \in Z$$
$$\Leftrightarrow 12\pi < 4k\pi + \pi < 16\pi \quad , k \in Z$$
$$\Leftrightarrow 11\pi < 4\,k\pi < 15\pi \quad , k \in Z$$
$$\Leftrightarrow \frac{11}{4} < k < \frac{15}{4} \quad , k \in Z$$
$$\Leftrightarrow k = 3$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης είναι η $x = 3\pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{13\pi}{4}$.

4. Έχουμε:

$$1 + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \iff \begin{cases} 1 + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \\ \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1 + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \\ (1 + \sigma\upsilon\nu x)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1 + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \\ 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1 + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \\ 2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1 + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \\ \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \eta\mu x = 1 \\ \sigma\upsilon\nu x = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \eta\mu x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x = -1 \end{cases}$$
$$\iff x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = \pi$$

5. Για $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ και $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) \neq 0$ έχουμε

$$\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right] \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$
$$\Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} - x,\ k \in Z \Leftrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6},\ k \in Z$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{6k\pi + \pi}{12},\ k \in Z \qquad (1)$$

Επομένως έχουμε:

$$0 \leq x < 2\pi \quad \Leftrightarrow 0 \leq \frac{6k\pi + \pi}{12} < 2\pi, \qquad , k \in Z$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 6k\pi + \pi < 24\pi, \qquad , k \in Z$$

$$\Leftrightarrow -\pi \leq 6k\pi < 23\pi, \qquad , k \in Z$$

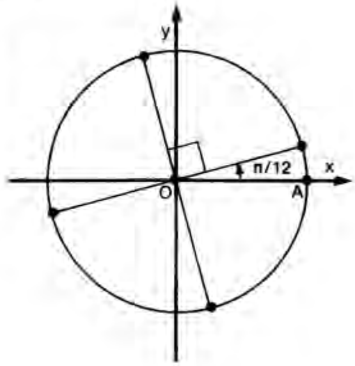
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k < \frac{23}{6}, \qquad , k \in Z$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \text{ ή } k = 1 \text{ ή } k = 2 \text{ ή } k = 3$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης στο $[0, 2\pi)$ είναι οι αριθμοί

$\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$ και $\frac{19\pi}{12}$.

(βλέπε διπλανό σχήμα).



§ 3.6 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\eta\mu\frac{\pi}{12}\ \eta\mu\frac{\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

ii) $\sigma\upsilon\nu 170°\ \sigma\upsilon\nu 50°+\eta\mu 170°\ \eta\mu 50°=\sigma\upsilon\nu(170°-50°)=\sigma\upsilon\nu 120°$

$$=-\sigma\upsilon\nu 60°=-\mathbf{\frac{1}{2}}$$

iii) $\eta\mu 110°\eta\mu 70°-\sigma\upsilon\nu 110°\sigma\upsilon\nu 70°=-\left[\sigma\upsilon\nu 110°\cdot\sigma\upsilon\nu 70°-\eta\mu 110°\cdot\eta\mu 70°\right]$

$$=-\sigma\upsilon\nu(110°+70°)=-\sigma\upsilon\nu 180°=\mathbf{1}$$

iv) $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{12}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}+\eta\mu\frac{7\pi}{12}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{12}=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=\mathbf{0}$

2. i) $\sigma\upsilon\nu 3x\cdot\sigma\upsilon\nu(-2x)-\eta\mu 3x\eta\mu(-2x)=\sigma\upsilon\nu(3x+(-2x))=\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x}$

ii) $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\left(\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-x\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

3. i) $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=\left(\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\eta\mu x\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)+\left(\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\eta\mu x\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=2\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x}$$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=\left(\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\eta\mu x\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\eta\mu x\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$=4\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\eta\mu x\eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$=4\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$$

4. **i)** $\eta\mu\dfrac{17\pi}{18}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{9}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{17\pi}{18}\cdot\eta\mu\dfrac{4\pi}{9}=\eta\mu\left(\dfrac{17\pi}{18}-\dfrac{4\pi}{9}\right)=\eta\mu\dfrac{\pi}{2}=\mathbf{1}$

ii) $\eta\mu 70^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 20^\circ+\sigma\upsilon\nu 70^\circ\cdot\eta\mu 20^\circ=\eta\mu(70^\circ+20^\circ)=\eta\mu 90^\circ=\mathbf{1}$

iii) $\dfrac{\varepsilon\varphi\dfrac{7\pi}{12}-\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}}{1-\varepsilon\varphi\dfrac{7\pi}{12}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}}=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{\mathbf{3}}$

iv) $\dfrac{\varepsilon\varphi 165^\circ+\varepsilon\varphi 15^\circ}{1-\varepsilon\varphi 165^\circ\cdot\varepsilon\varphi 15^\circ}=\varepsilon\varphi(165^\circ+15^\circ)=\varepsilon\varphi 180^\circ=\mathbf{0}$

5. **i)** $\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x\cdot\eta\mu x=\eta\mu(2x+x)=\boldsymbol{\eta\mu 3x}$

ii) $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\eta\mu x=\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\eta\mu\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

iii) $\dfrac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi 2x}{1+\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi 2x}=\varepsilon\varphi(x-2x)=\varepsilon\varphi(-x)=-\boldsymbol{\varepsilon\varphi x}$

iv) $\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)+\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}{1-\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}=\varepsilon\varphi\left(\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)+\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\right)$

$$=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\boldsymbol{\sigma\varphi x}$$

6. **i)** $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=$

$$=\left(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu x\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)+\left(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu x\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=2\eta\mu x\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\eta\mu x}$$

ii) $(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)\cdot(\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\beta)=\eta\mu\alpha\eta\mu\beta+\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$

$$=(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)+(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)$$

$$=\eta\mu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$$

7. • $\eta\mu 105^\circ=\eta\mu(60^\circ+45^\circ)=\eta\mu 60^\circ\sigma\upsilon\nu 45^\circ+\sigma\upsilon\nu 60^\circ\eta\mu 45^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}})}{\mathbf{4}}$$

$\sigma\upsilon\nu 105^\circ=\sigma\upsilon\nu(60^\circ+45^\circ)=\sigma\upsilon\nu 60^\circ\sigma\upsilon\nu 45^\circ-\eta\mu 60^\circ\eta\mu 45^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{3}})}{\mathbf{4}}$$

οπότε $\varepsilon\varphi 105^\circ=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$ και $\sigma\varphi 105^\circ=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=-\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}$

• ημ195°=ημ(150° +45°) =ημ150°συν45° +συν150°ημ45°

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}\,(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{3}})}{\mathbf{4}}$$

συν195° =συν(150° +45°) =συν150°συν45° −ημ150°ημ45°

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{\mathbf{2}}\,(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}})}{\mathbf{4}}$$

οπότε $\text{εφ}\,195° = \frac{1-\sqrt{3}}{-(1+\sqrt{3})} = \mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{3}}$ και $\text{σφ}195° = \frac{-(1+\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} = \mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}$

8. **i)** $\text{εφα} + \text{εφβ} = \frac{\text{ημα}}{\text{συνα}} + \frac{\text{ημβ}}{\text{συνβ}} = \frac{\text{ημασυνβ}+\text{συναημβ}}{\text{συνασυνβ}} = \frac{\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{συνασυνβ}}$

ii) $\text{σφα}+\text{σφβ} = \frac{\text{συνα}}{\text{ημα}} + \frac{\text{συνβ}}{\text{ημβ}} = \frac{\text{ημασυνβ}+\text{συναημβ}}{\text{ημαημβ}} = \frac{\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{ημαημβ}}$

9. Επειδή $\text{ημα} = \frac{5}{13}$ και $\text{συνβ} = \frac{3}{5}$, από τη σχέση $\text{ημ}^2x + \text{συν}^2x = 1$ βρίσκουμε

ότι: $\text{συνα} = \frac{12}{13}$ και $\text{ημβ} = \frac{4}{5}$

Έτσι έχουμε:

i) $\text{ημ}(\alpha+\beta) = \text{ημασυνβ}+\text{συναημβ} = \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5} + \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{63}{65}$

ii) $\text{συν}(\alpha+\beta) = \text{συνασυνβ}-\text{ημαημβ} = \frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5} - \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{16}{65}$

10. **i)** Σύμφωνα με τους τύπους (2) και (3) αρκεί να υπολογίσουμε το συνα και το ημβ.

Έχουμε λοιπόν:

• $\text{συν}^2\alpha = 1 - \text{ημ}^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, οπότε **συνα** $= \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$, αφού $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

• $\text{ημ}^2\beta = 1 - \text{συν}^2\beta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, οπότε **ημβ**$= \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{13}}$, αφού $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

Επομένως:

$\text{ημ}(\alpha+\beta) = \text{ημασυνβ}+\text{συναημβ} = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} = \frac{\mathbf{33}}{\mathbf{65}}$

$\text{συν}\,(\alpha+\beta) = \text{συνασυνβ}-\text{ημαημβ} = \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} = -\frac{\mathbf{56}}{\mathbf{65}}$

οπότε $\mathbf{εφ}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = -\frac{\mathbf{33}}{\mathbf{56}}$ και $\mathbf{σφ}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = -\frac{\mathbf{56}}{\mathbf{33}}$

ii) Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο

11. **i)** $ημx = συν\left(x+\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow ημx = συνxσυν\frac{π}{6} - ημxημ\frac{π}{6}$

$$\Leftrightarrow ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}συνx - \frac{1}{2}ημx \Leftrightarrow 2ημx = \sqrt{3}συνx - ημx$$

$$\Leftrightarrow 3ημx = \sqrt{3}συνx \Leftrightarrow εφx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{π}{6}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = kπ + \frac{π}{6},\ k \in Z}$$

ii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in R$, με $συνx \neq 0$ και $συν\left(x+\frac{π}{4}\right) \neq 0$.

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$εφx + εφ\left(\frac{π}{4}+x\right) = -2 \Leftrightarrow εφx + \frac{1+εφx}{1-εφx} = -2$$

$$\Leftrightarrow εφx - εφ^2x + 1 + εφx = -2 + 2εφx$$

$$\Leftrightarrow εφ^2x = 3 \Leftrightarrow εφx = \pm\sqrt{3}$$

Έτσι έχουμε:

- $εφx = \sqrt{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{π}{3} \Leftrightarrow \mathbf{x = kπ + \frac{π}{3},\ k \in Z}$
- $εφx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\left(-\frac{π}{3}\right) \Leftrightarrow \mathbf{x = kπ - \frac{π}{3},\ k \in Z}$

Όλες οι λύσεις είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν του περιορισμούς.

iii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in R$ με $συν(x-α) \neq 0$.

Με τον περιορισμό αυτό και την προϋπόθεση ότι ορίζεται η εφx, δηλαδή $συνx \neq 0$ έχουμε:

$$εφ(x-α) = -2 \Leftrightarrow \frac{εφx - εφα}{1+εφxεφα} = -2 \Leftrightarrow \frac{εφx+3}{1-3εφx} = -2$$

$$\Leftrightarrow εφx + 3 = -2 + 6εφx \Leftrightarrow 5εφx = 5$$

$$\Leftrightarrow εφx = 1 \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{π}{4} \Leftrightarrow \mathbf{x = kπ + \frac{π}{4},\ k \in Z}$$

Ολες οι λύσεις, είναι δεκτές αφού είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Δεν υπάρχουν άλλες λύσεις της εξίσωσης, αφού οι τιμές $x = kπ + \frac{π}{2},\ k \in Z$ που μηδενίζουν το συνx δεν την επαληθεύουν.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι: $\dfrac{ημ(α-β)}{συνασυνβ}=\dfrac{ημασυνβ-συναημβ}{συνασυνβ}=\dfrac{ημασυνβ}{συνασυνβ}-\dfrac{συναημβ}{συνασυνβ}=$

$=εφα-εφβ$

Άρα: $\boldsymbol{\dfrac{ημ(α-β)}{συνασυνβ}=εφα-εφβ}$

Ομοίως: $\boldsymbol{\dfrac{ημ(β-γ)}{συνβσυνγ}=εφβ-εφγ}$ και $\boldsymbol{\dfrac{ημ(γ-α)}{συνγσυνα}=εφγ-εφα}$

Αν τώρα τις παραπάνω ισότητες τις προσθέσουμε κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{ημ(α-β)}{συνασυνβ}+\frac{ημ(β-γ)}{συνβσυνγ}+\frac{ημ(γ-α)}{συνγσυνα}=εφα-εφβ+εφβ-εφγ+εφγ-εφα=0$$

2. 1ος τρόπος Έχουμε:

$συν(α+β)=0 \Leftrightarrow συνασυνβ-ημαημβ=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{συνασυνβ=ημαημβ}$ (1)

Επομένως:

$ημ(α+2β)=\big(ημ(α+β)+β\big)=ημ(α+β)συνβ+συν(α+β)ημβ$

$=ημ(α+β)\cdot συνβ,$ (αφού $συν(α+β)=0$)

$=(ημασυνβ+συναημβ)συνβ=ημασυνβσυνβ+συνασυνβημβ$

$\overset{(1)}{=}(ημασυνβσυνβ+ημαημβημβ)=ημα(συν^2β+ημ^2β)=ημα$

2ος τρόπος: Έχουμε:

$συν(α+β)=0 \Leftrightarrow α+β=kπ+\dfrac{π}{2},\ k\in Z \Leftrightarrow \boldsymbol{β=kπ+\dfrac{π}{2}-α,\ k\in Z}$

Επομένως:

$ημ(α+2β)=ημ(α+2κπ+π-2α)=ημ(π-α)=ημα$

3. $ημ(x-α)=-2ημ(x+α) \Leftrightarrow ημxσυνα-συνxημα=-2ημxσυνα-2συνxημα$

$\Leftrightarrow 3ημxσυνα=-συνx\,ημα$

$\Leftrightarrow 3ημx=-συνx\cdot εφα$

$\Leftrightarrow 3ημx=3συνx,$ αφού $εφα=-3$

$\Leftrightarrow εφx=\boldsymbol{1}$

$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x=\dfrac{π}{4}}$ ή $\boldsymbol{x=\dfrac{5π}{4}}$

4. Επειδή $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ θα είναι $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$, οπότε:

$$\varepsilon\varphi\beta=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\,\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}$$

Επομένως:

$$(1+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot(1+\varepsilon\varphi\beta)=(1+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot\left(1+\frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}\right)=(1+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot\frac{2}{1+\varepsilon\varphi\alpha}=2$$

5. **i) Αν με φ συμβολίσουμε τη γωνία $\hat{AB\Delta}$, έχουμε:**

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{(A\Delta)}{(AB)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(A\Gamma)}{(AB)}=\frac{1}{3}\varepsilon\varphi B, \text{ δηλαδή } \boldsymbol{\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\varepsilon\varphi B}{3}} \quad (1)$$

Επομένως:

$$\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(B-\varphi)=\frac{\varepsilon\varphi B-\varepsilon\varphi\varphi}{1+\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\varphi}\overset{(1)}{=}\frac{\varepsilon\varphi B-\frac{\varepsilon\varphi B}{3}}{1+\varepsilon\varphi B\cdot\frac{\varepsilon\varphi B}{3}}=\frac{2\varepsilon\varphi B}{3+\varepsilon\varphi^2 B}$$

ii) Αν $B=60^\circ$ τότε από την παραπάνω ισότητα βρίσκουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{2\cdot\varepsilon\varphi 60^\circ}{3+\varepsilon\varphi^2 60^\circ}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3+3}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ οπότε } \omega=30^\circ$$

Άρα η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β.

6. Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\eta\mu A+\eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}=\varepsilon\varphi B\Leftrightarrow\frac{\eta\mu(B+\Gamma)+\eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}=\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu B\eta\mu\Gamma}=\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu B\eta\mu\Gamma$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu B\eta\mu\Gamma=0$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=0$$

$$\Leftrightarrow B+\Gamma=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{2}$$

7. **i)** Επειδή $A+B+\Gamma=\pi$ έχουμε διαδοχικά:

$$A+B=\pi-\Gamma$$

$$\sigma\varphi(A+B)=\sigma\varphi(\pi-\Gamma)$$

$$\frac{\sigma\varphi A\sigma\varphi B-1}{\sigma\varphi B+\sigma\varphi A}=-\sigma\varphi\Gamma$$

$$\sigma\varphi A\sigma\varphi B-1=-\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma-\sigma\varphi A\sigma\varphi\Gamma$$

$$\sigma\varphi A\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A=1$$

ii) Επειδή $Α + (Β + Γ) = π$ είναι $συνΑ = -συν(Β + Γ)$, οπότε:

$$\frac{συνΑ}{ημΒημΓ} = \frac{-συν(Β+Γ)}{ημΒημΓ} = \frac{ημΒημΓ - συνΒσυνΓ}{ημΒημΓ} = \mathbf{1 - σφΒσφΓ}$$

Ομοίως $\dfrac{συνΒ}{ημΓημΑ} = \mathbf{1 - σφΓσφΑ}$ και $\dfrac{συνΓ}{ημΑημΒ} = \mathbf{1 - σφΑσφΒ}$

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη, λόγω της (i), βρίσκουμε το ζητούμενο

8. Η εξίσωση είναι ορισμένη για κάθε $x \in [0,\ π]$ με $συν\left(\dfrac{π}{4} - x\right) \neq 0$

και $συν\left(\dfrac{π}{4} + x\right) \neq 0$.

Με τους περιορισμούς αυτούς και με την προϋπόθεση ότι ορίζεται η $εφx$, η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{εφ\frac{π}{4} + εφx}{1 - εφ\frac{π}{4}\cdot εφx} - \frac{εφ\frac{π}{4} - εφx}{1 + εφ\frac{π}{4}\cdot εφx} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + εφx}{1 - εφx} - \frac{1 - εφx}{1 + εφx} = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (1 + εφx)^2 - (1 - εφx)^2 = 2\sqrt{3}(1 - εφ^2x)$$

$$\Leftrightarrow εφ^2x + 2εφx + 1 - εφ^2x + 2εφx - 1 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}εφ^2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}εφ^2x + 4εφx - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}εφ^2x + 2εφx - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow εφx = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } εφx = -\sqrt{3} \qquad [αφού\ Δ = 16]$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x = \frac{π}{6}} \text{ ή } \mathbf{x = \frac{2π}{3}} \qquad [αφού\ 0 \le x \le π]$$

που είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Σχόλιο: Αν δεν ορίζεται η $εφx$, δηλ. αν $x = \dfrac{π}{2}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

9. Αρκεί να δείξουμε ότι $x + y = \dfrac{π}{4} - z$. Επειδή $εφx < 1$ και $εφy < 1$

και $εφz < 1$ θα είναι $0 < x, y, z < \dfrac{π}{4}$, οπότε

$$0 < x + y < \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad 0 < \frac{\pi}{4} - z < \frac{\pi}{4}$$

Επομένως η $x + y = \frac{\pi}{4} - z$ γράφεται διαδοχικά:

$$x + y = \frac{\pi}{4} - z \Leftrightarrow εφ(x + y) = εφ\left(\frac{\pi}{4} - z\right) \Leftrightarrow \frac{εφx + εφy}{1 - εφxεφy} = \frac{1 - εφz}{1 + εφz}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{1 - \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{7}{9}, \text{ που ισχύει.}$$

§ 3.7 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί της Γωνίας 2α

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** $2ημ\frac{3\pi}{4}συν\frac{3\pi}{4} = ημ\left(2\cdot\frac{3\pi}{4}\right) = ημ\frac{3\pi}{2} = \mathbf{-1}$

ii) $1 - 2ημ^2\frac{\pi}{12} = συν\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = συν\frac{\pi}{6} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

iii) $2συν^2 135° - 1 = συν(2\cdot 135°) = συν270° = \mathbf{0}$

iv) $\frac{2εφ75°}{1 - εφ^2 75°} = εφ(2\cdot 75°) = εφ150° = -εφ30° = \mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

2. **i)** $2ημ2α\cdot συν2α = ημ(2\cdot 2α) = \mathbf{ημ4α}$

ii) $2συν^2\left(\frac{\pi}{4} - α\right) - 1 = συν\left(2\left(\frac{\pi}{4} - α\right)\right) = συν\left(\frac{\pi}{2} - 2α\right) = \mathbf{ημ2α}$

iii) $\frac{2εφ3α}{1 - εφ^2 3α} = εφ(2\cdot 3α) = \mathbf{εφ6α}$

3. **i)** $ημ^2α + συν2α = ημ^2α + (1 - 2ημ^2α) = 1 - ημ^2α = συν^2α$

ii) $\frac{ημ2α}{1 - ημ^2α} = \frac{2ημασυνα}{συν^2α} = 2\frac{ημα}{συνα} = 2εφα$

iii) $σφα - εφα = \frac{συνα}{ημα} - \frac{ημα}{συνα} = \frac{συν^2α - ημ^2α}{ημασυνα} = \frac{συν2α}{\frac{1}{2}ημ2α} = 2σφ2α$

iv) $εφα + σφα = \frac{ημα}{συνα} + \frac{συνα}{ημα} = \frac{ημ^2α + συν^2α}{ημασυνα} = \frac{1}{\frac{1}{2}ημ2α} = \frac{2}{ημ2α}$

4. **i)** Σύμφωνα με τους τύπους (1) και (2) αρκεί να υπολογίσουμε το ημα. Έχουμε λοιπόν:

$ημ^2α = 1 - συν^2α = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$. Άρα **ημα** $= -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$, αφού $π < α < \frac{3π}{2}$

Επομένως:

$$ημ2α = 2ημασυνα = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{25}}$$

$συν2α = 2συν^2α - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{25}}$, οπότε

$εφ2α = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{7}}$ και $σφ2α = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{24}}$

ii) Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο

5. Επειδή $εφ(α + 2β) = \frac{εφα + εφ2β}{1 - εφαεφ2β}$, αρκεί να υπολογίσουμε την εφ2β

Έχουμε λοιπόν:

$$εφ2β = \frac{2εφβ}{1 - εφ^2β} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4}$$

οπότε:

$$εφ(α + 2β) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{16}} = \frac{1}{\frac{13}{16}} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{13}}$$

6. **i)** $ημ^3ασυνα + συν^3αημα = ημασυνα(ημ^2α + συν^2α) = ημασυνα = \frac{1}{2}ημ2α$

ii) $ημ2αεφα + 2συν^2α = 2ημασυνα\frac{ημα}{συνα} + 2συν^2α = 2(ημ^2α + συν^2α) = 2$

iii) $\frac{ημ2α}{1 + συν2α} = \frac{2ημασυνα}{1 + 2συν^2α - 1} = \frac{2ημασυνα}{2συν^2α} = \frac{ημα}{συνα} = εφα$

iv) $\frac{1 - συν2α + ημ2α}{1 + συν2α + ημ2α} = \frac{1 - (1 - 2ημ^2α) + 2ημασυνα}{1 + (2συν^2α - 1) + 2ημασυνα}$

$$= \frac{2ημ^2α + 2ημασυνα}{2συν^2α + 2ημασυνα} = \frac{2ημα(ημα + συνα)}{2συνα(συνα + ημα)} = εφα$$

7. **i)** $συν2x - ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2ημ^2x - ημx - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2ημ^2x + ημx = 0 \Leftrightarrow ημx(2ημx + 1) = 0$

$\Leftrightarrow ημx = 0$ ή $ημx = -\frac{1}{2}$

Έτσι έχουμε:

- $ημx = 0 \Leftrightarrow ημx = ημ0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi}$ ή $\mathbf{x = 2k\pi + \pi,\ k \in Z}$
- $ημx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx = -ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow ημx = ημ\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}} \quad ή \quad \mathbf{x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6},\ k \in Z}$$

ii) $ημ2x - 2συνx + ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow 2ημxσυνx - 2συνx + ημx - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2συνx(ημx - 1) + (ημx - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (ημx - 1)(2συνx + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow ημx = 1 \quad ή \quad συνx = -\frac{1}{2}$$

Έτσι έχουμε:

- $ημx = 1 \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z}$
- $συνx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = -συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow συνx = συν\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ k \in Z}$$

8. Στο παράδειγμα 1 της σελίδας 19 βρήκαμε ότι:

$$ημ\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ συν\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ εφ\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \text{ και } σφ\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$$

Σύμφωνα με τους τύπους (4) και (5) έχουμε:

$$ημ^2\frac{\pi}{16} = \frac{1 - συν\frac{\pi}{8}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}, \text{ οπότε}$$

$$\mathbf{ημ\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}$$

$$συν^2\frac{\pi}{16} = \frac{1 + συν\frac{\pi}{8}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}, \text{ οπότε}$$

$$\mathbf{συν\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}$$

οπότε $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{16}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ και $\boldsymbol{\sigma\varphi\frac{\pi}{16}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

9. Σύμφωνα με τους τύπους (4) και (5) έχουμε:

i) $\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}=\frac{1-\frac{5}{13}}{2}=\frac{8}{26}=\frac{4}{13}$, οπότε

$$\boldsymbol{\eta\mu\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4}{13}}},\ \text{αφού}\ 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}=\frac{1+\frac{5}{13}}{2}=\frac{18}{26}=\frac{9}{13},\ \text{οπότε}$$

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{9}{13}}},\ \text{αφού}\ 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$$

Επομένως $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}}$ και $\boldsymbol{\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}}$

ii) $\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, οπότε

$$\boldsymbol{\eta\mu\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{5}}},\ \text{αφού}\ \frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}=\frac{1+\frac{3}{5}}{2}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},\ \text{οπότε}$$

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{4}{5}}},\ \text{αφού}\ \frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$$

Επομένως $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}}$ και $\boldsymbol{\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}=-2}$

10. **i)** $\sigma\upsilon\nu 2x+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x-1+1+\sigma\upsilon\nu x=0$

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x(2\sigma\upsilon\nu x+1)=0$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0$ ή $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$

Έτσι έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}},\ \boldsymbol{k\in Z}$

- $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ k \in Z}$$

ii) $\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - (1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = 1$

$$\Leftrightarrow \mathbf{\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3},\ k \in Z}$$

iii) $2 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 4\eta\mu^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 2(1 - \sigma\upsilon\nu x)$

$$\Leftrightarrow 2 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 2 - 2\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \ \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = 2 \ \text{(αδύνατη)}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},\ k \in Z}$$

iv) $\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 1 + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -1 \ \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = 2$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi + \pi,\ k \in Z}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$. Άρα έχουμε:

$(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha - 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 1 - 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 1 - \eta\mu 2\alpha$,

δηλαδή: $\quad (\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)^2 = 1 - \eta\mu 2\alpha$

επειδή $\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$ έχουμε:

$$0 \leqslant \eta\mu\alpha \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \sigma\upsilon\nu\alpha \leqslant 1$$

Επομένως $\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha > 0$, οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha = \sqrt{1 - \eta\mu 2\alpha}.$$

2. $$\frac{\eta\mu^2\alpha + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{2\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{2\eta\mu\alpha}{(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)}$$

$$= \frac{4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}} = 2 \cdot \frac{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}} = 2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$$

3. 1ος τρόπος:

Επειδή $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ είναι $\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}=\eta\mu\frac{\pi}{8}$. Άρα:

$$\eta\mu^2\frac{\pi}{8}-\sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8}=\eta\mu^2\frac{\pi}{8}-\eta\mu^4\frac{\pi}{8}=\eta\mu^2\frac{\pi}{8}\cdot\left(1-\eta\mu^2\frac{\pi}{8}\right)=\eta\mu^2\frac{\pi}{8}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}$$

$$=\left(\eta\mu\frac{\pi}{8}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

2ος τρόπος

Με τους τύπους (4) και (5).

4. i) $$\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha}=\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}}=\frac{\dfrac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\dfrac{\varepsilon\varphi^2\alpha+1}{\varepsilon\varphi\alpha}}$$

$$=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{1}{2}\varepsilon\varphi2\alpha$$

ii) $$\frac{3-4\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu4\alpha}{3+4\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu4\alpha}=\frac{3-4(1-2\eta\mu^2\alpha)+(1-2\eta\mu^2 2\alpha)}{3+4(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)+(1-2\eta\mu^2 2\alpha)}$$

$$=\frac{8\eta\mu^2\alpha-2\eta\mu^2 2\alpha}{8\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2\eta\mu^2 2\alpha}=\frac{8\eta\mu^2\alpha-2(2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)^2}{8\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2(2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)^2}$$

$$=\frac{8\eta\mu^2\alpha(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)}{8\sigma\upsilon\nu^2\alpha(1-\eta\mu^2\alpha)}=\frac{\eta\mu^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\varepsilon\varphi^4\alpha$$

5. $$\varepsilon\varphi(45^\circ-\alpha)=\frac{\varepsilon\varphi45^\circ-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi45^\circ\cdot\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{1-\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}$$

$$=\frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$=\frac{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\,2\alpha}}{\boldsymbol{1+\eta\mu2\alpha}}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha\cdot(1-\eta\mu2\alpha)}{(1+\eta\mu2\alpha)(1-\eta\mu2\alpha)}=\frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha\cdot(1-\eta\mu2\alpha)}{1-\eta\mu^2 2\alpha}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha(1-\eta\mu2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}=\frac{1-\eta\mu2\alpha}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}-\frac{\eta\mu2\alpha}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\,2\alpha}}-\boldsymbol{\varepsilon\varphi2\alpha}.$$

Από τον τύπο $εφ(45° - α) = \dfrac{συν2α}{1+ημ2α}$ για $α = 30°$ παίρνουμε:

$$εφ15° = \frac{συν60°}{1+ημ60°} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$$

6. **i)** Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $συν2x \neq 0$.

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$εφ2x = 2συνx \Leftrightarrow \frac{ημ2x}{συν2x} = 2συνx \Leftrightarrow \frac{2ημxσυνx}{1-2ημ^2x} = 2συνx$$

$$\Leftrightarrow ημxσυνx = συνx - 2ημ^2x\,συνx$$

$$\Leftrightarrow συνx(2ημ^2x + ημx - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow συνx = 0 \;\; ή \;\; 2ημ^2x + ημx - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow συνx = 0 \;\; ή \;\; ημx = \frac{-1 \pm 3}{4} = \Big\langle \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Έτσι έχουμε:

- $συνx = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}}, \quad \mathbf{k \in Z}$
- $ημx = -1 \Leftrightarrow ημx = ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}, \quad \mathbf{k \in Z}$
- $ημx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}}$ ή $\mathbf{x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}}, \quad \mathbf{k \in Z}$

Όλες οι ρίζες που βρήκαμε είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $συνx \neq 0$ και $συν2x \neq 0$

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$εφx \cdot εφ2x = -3 \Leftrightarrow εφx \cdot \frac{2εφx}{1-εφ^2x} = -3 \Leftrightarrow 2εφ^2x = -3 + 3εφ^2x$$

$$\Leftrightarrow εφ^2x = 3 \Leftrightarrow εφx = \sqrt{3} \;\; ή \;\; εφx = -\sqrt{3}$$

Έτσι έχουμε:

- $εφx = \sqrt{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \mathbf{x = k\pi + \frac{\pi}{3}}, \; \mathbf{k \in Z}$
- $εφx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \mathbf{x = k\pi - \frac{\pi}{3}}, \quad \mathbf{k \in Z}$

Όλες οι ρίζες που βρήκαμε είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

7. $συν4α = 2συν^2 2α - 1 = 2(συν2α)^2 - 1 = 2(2συν^2α - 1)^2 - 1$

$$= 2(4συν^4α - 4συν^2α + 1) - 1 = 8συν^4α - 8συν^2α + 1$$

8. **i)** Είναι: $συν^4\frac{π}{8} = \left(συν^2\frac{π}{8}\right)^2 = \left(\frac{1+συν\frac{π}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+4\sqrt{2}}{16} = \mathbf{\frac{3+2\sqrt{2}}{8}}$$

και $συν^4\frac{3π}{8} = \left(συν^2\frac{3π}{8}\right)^2 = \left(\frac{1+συν\frac{3π}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6-4\sqrt{2}}{16} = \mathbf{\frac{3-2\sqrt{2}}{8}}$$

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$συν^4\frac{π}{8} + συν^4\frac{3π}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

ii) εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως.

iii) $8ημ^2α \cdot συν^2α = 2 \cdot (2ημασυνα)^2 = 2(ημ2α)^2 = 2ημ^2 2α = 1 - συν4α$

9. Σύμφωνα με τον τύπο (6) έχουμε:

$$εφ^2\frac{x}{2} = \frac{1-συνx}{1+συνx} = \frac{1-\frac{α}{β+γ}}{1+\frac{α}{β+γ}} = \frac{\frac{β+γ-α}{β+γ}}{\frac{α+β+γ}{β+γ}} = \mathbf{\frac{β+γ-α}{α+β+γ}}$$

Ομοίως έχουμε:

$$\mathbf{εφ^2\frac{y}{2} = \frac{α+γ-β}{α+β+γ}} \quad \text{και} \quad \mathbf{εφ^2\frac{z}{2} = \frac{α+β-γ}{α+β+γ}}$$

Επομένως:

$$εφ^2\frac{x}{2} + εφ^2\frac{y}{2} + εφ^2\frac{z}{2} = \frac{β+γ-α}{α+β+γ} + \frac{α+γ-β}{α+β+γ} + \frac{α+β-γ}{α+β+γ} = \frac{α+β+γ}{α+β+γ} = 1$$

§ 3.8 Μετασχηματισμοί Τριγωνομετρικών Παραστάσεων

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\sigma\upsilon\nu 75°\sigma\upsilon\nu 15° = \frac{1}{2}\cdot 2\sigma\upsilon\nu 75°\cdot\sigma\upsilon\nu 15°$

$$= \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(75°-15°)+\sigma\upsilon\nu(75°+15°)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 60°+\sigma\upsilon\nu 90°) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+0\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

ii) $\eta\mu 105°\sigma\upsilon\nu 15° = \frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu 105°\cdot\sigma\upsilon\nu 15° = \frac{1}{2}\left[\eta\mu 120°+\eta\mu 90°\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) = \mathbf{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$$

iii) $\eta\mu\frac{13\pi}{12}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{13\pi}{12}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\eta\mu\frac{7\pi}{6}+\eta\mu\pi\right]$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}+0\right) = -\mathbf{\frac{1}{4}}$$

iv) $\eta\mu\frac{11\pi}{12}\cdot\eta\mu\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{11\pi}{12}\cdot\eta\mu\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

2. i) $2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu(x+2x)+\eta\mu(x-2x) = \mathbf{\eta\mu 3x - \eta\mu x}$

ii) $2\eta\mu 4x\cdot\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu(4x-2x)-\sigma\upsilon\nu(4x+2x) = \mathbf{\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu 6x}$

iii) $2\sigma\upsilon\nu 3x\cdot\sigma\upsilon\nu 5x = \sigma\upsilon\nu(3x-5x)+\sigma\upsilon\nu(3x+5x) = \mathbf{\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 8x}$

iv) $\sigma\upsilon\nu 6x\cdot\eta\mu 2x = \frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu 6x = \frac{1}{2}\left[\eta\mu(2x+6x)+\eta\mu(2x-6x)\right]$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}(\eta\mu 8x - \eta\mu 4x)}$$

v) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x-\frac{\pi}{4}-x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}+x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(-2x)-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right] = \mathbf{\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x}$$

3. **i)** $ημ3x \cdot συνx = ημ6x \cdot συν2x \Leftrightarrow 2ημ3x \cdot συνx = 2ημ6x \cdot συν2x$

$\Leftrightarrow ημ4x + ημ2x = ημ8x + ημ4x \Leftrightarrow ημ8x = ημ2x$

$\Leftrightarrow 8x = 2kπ + 2x \quad ή \quad 8x = 2kπ + π - 2x, \quad k \in Z$

$\Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{kπ}{3}} \quad ή \quad \mathbf{x = \frac{2kπ + π}{10}}, \quad \mathbf{k \in Z}$

ii) $συν3x \cdot συν2x = ημ2x \cdot ημx \Leftrightarrow 2συν3x \cdot συν2x = 2ημ2x \cdot ημx$

$\Leftrightarrow συν5x + συνx = συνx - συν3x \Leftrightarrow συν5x = συν(π - 3x)$

$\Leftrightarrow 5x = 2kπ + π - 3x \quad ή \quad 5x = 2kπ - π + 3x, \quad k \in Z$

$\Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{2kπ + π}{8}} \quad ή \quad \mathbf{x = \frac{2kπ - π}{2}}, \quad \mathbf{k \in Z}$

4. **i)** $ημ75° + ημ15° = 2ημ\frac{75° + 15°}{2} \cdot συν\frac{75° - 15°}{2} = 2ημ45° \cdot συν30° = \mathbf{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

ii) $ημ\frac{11π}{12} - ημ\frac{5π}{12} = 2ημ\frac{\frac{11π}{12} - \frac{5π}{12}}{2} \cdot συν\frac{\frac{11π}{12} + \frac{5π}{12}}{2}$

$= 2ημ\frac{π}{4} \cdot συν\frac{2π}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

iii) $συν40° + συν80° + συν160° = 2συν\frac{40° + 80°}{2} \cdot συν\frac{40° - 80°}{2} + συν160$

$= 2συν60° \cdot συν20° + συν160°$

$= συν20° + συν160°$

$= 2συν\frac{20° + 160°}{2} \cdot συν\frac{20° - 160°}{2}$

$= 2συν90° \cdot συν70° = \mathbf{0}$

5. **i)** $ημ4x + ημ2x = 2ημ\frac{4x + 2x}{2} \cdot συν\frac{4x - 2x}{2} = \mathbf{2ημ3xσυνx}$

ii) $συν5x - συν3x = -2ημ\frac{5x - 3x}{2} \cdot ημ\frac{5x + 3x}{2} = \mathbf{-2ημ4x \cdot ημx}$

iii) $συν3x + συνx = 2συν\frac{3x + x}{2} \cdot συν\frac{3x - x}{2} = \mathbf{2συν2x \cdot συνx}$

iv) $1 + ημx = ημ\frac{π}{2} + ημx = 2ημ\left(\frac{π}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot συν\left(\frac{π}{4} - \frac{x}{2}\right) = \mathbf{2ημ^2\left(\frac{π}{4} + \frac{x}{2}\right)}$

v) $1 + συνx = συν0 + συνx = 2συν\frac{x}{2} \cdot συν\frac{x}{2} = \mathbf{2συν^2\frac{x}{2}}$

6. Επειδή $B - Γ = 90°$, έχουμε:

i) $ημ2B + ημ2Γ = 2ημ(B + Γ) \cdot συν(B - Γ) = 2ημ90° \cdot συν(B - Γ)$

$= 2συν(B - Γ)$

ii) $\eta\mu B - \eta\mu\Gamma = 2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2} = 2\cdot\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \sqrt{2}\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}$

7. **i)** $\frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha}{\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha} = \frac{2\eta\mu 4\alpha\cdot\eta\mu\alpha}{2\eta\mu 4\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

ii)
$$\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha} = \frac{(\eta\mu\alpha + \eta\mu 5\alpha) + \eta\mu 3\alpha}{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha) + \sigma\upsilon\nu 3\alpha}$$
$$= \frac{2\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha}$$
$$= \frac{\eta\mu 3\alpha(2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 1)}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha(2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 1)} = \frac{\eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$$

iii)
$$\frac{\eta\mu\alpha\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha\eta\mu 6\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 6\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha\eta\mu 2\alpha + 2\eta\mu 3\alpha\eta\mu 6\alpha}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 6\alpha}$$
$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 9\alpha}{\eta\mu 3\alpha - \eta\mu\alpha + \eta\mu 9\alpha - \eta\mu 3\alpha}$$
$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 9\alpha}{\eta\mu 9\alpha - \eta\mu\alpha} = \frac{2\eta\mu 5\alpha\eta\mu 4\alpha}{2\eta\mu 4\alpha\sigma\upsilon\nu 5\alpha} = \varepsilon\varphi 5\alpha$$

8. **i)**
$$\eta\mu 3x - \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu 2x$$
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x(2\eta\mu x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = 0 \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu x = \frac{1}{2}$$

Έτσι έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu 2x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},\ k \in Z$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}}, \quad \mathbf{k \in Z}$$
- $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}}$ ή $\mathbf{x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}},\ \mathbf{k \in Z}$

ii)
$$\sigma\upsilon\nu 5x - \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 3x \Leftrightarrow -2\eta\mu 3x\eta\mu 2x = \eta\mu 3x$$
$$\Leftrightarrow \eta\mu 3x(1 + 2\eta\mu 2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \eta\mu 3x = 0 \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu 2x = -\frac{1}{2}$$

Έτσι έχουμε:

- $\eta\mu 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{k\pi}{3}}, \quad \mathbf{k \in Z}$

- $ημ2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow ημ2x = -ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow ημ2x = ημ\left(-\frac{π}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x = 2kπ - \frac{π}{6} \text{ ή } 2x = 2kπ + π + \frac{π}{6},\ k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = kπ - \frac{π}{12}} \text{ ή } \mathbf{x = kπ + \frac{7π}{12}},\quad \mathbf{k \in Z}$$

iii) $ημ3x + ημ6x + ημ9x = 0 \Leftrightarrow (ημ3x + ημ9x) + ημ6x = 0$

$$\Leftrightarrow 2ημ6xσυν3x + ημ6x = 0$$

$$\Leftrightarrow ημ6x(2συν3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow ημ6x = 0 \quad \text{ή} \quad συν3x = -\frac{1}{2}$$

Έτσι έχουμε:

- $ημ6x = 0 \Leftrightarrow 6x = kπ \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{kπ}{6}},\quad \mathbf{k \in Z}$
- $συν3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow συν3x = -συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow συν3x = συν\left(π - \frac{π}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow συν3x = συν\frac{2π}{3} \Leftrightarrow 3x = 2kπ \pm \frac{2π}{3},\quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{6kπ \pm 2π}{9}},\quad \mathbf{k \in Z}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** $2ημ50° - \frac{1}{2συν20°} = \frac{2 \cdot 2ημ50° \cdot συν20° - 1}{2συν20°} = \frac{2(ημ70° + ημ30°) - 1}{2συν20°}$

$$= \frac{2ημ70° + 2ημ30° - 1}{2συν20°} = \frac{2ημ70° + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{2συν20°}$$

$$= \frac{2ημ70°}{2συν20°} = 1,\quad \text{γιατί } ημ70° = συν20°.$$

ii) $2ημ52°ημ68° - 2ημ47°συν77° - 2συν65°συν81° =$

$= (συν16° - συν120°) - (ημ124° - ημ30°) - (συν146° + συν16°)$

$= (συν16° + συν60°) - (ημ56° - ημ30°) - (-συν34° + συν16°)$

$= συν16° + \frac{1}{2} - ημ56° + \frac{1}{2} + συν34° - συν16° = 1$, γιατί $ημ56° = συν34°$.

2. Είναι $4\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 \Leftrightarrow 2\big(\eta\mu(B+\Gamma)+\eta\mu(B-\Gamma)\big)=1$

$$\Leftrightarrow 2\big[\eta\mu 90^\circ + \eta\mu(B-\Gamma)\big]=1$$

$$\Leftrightarrow 2+2\eta\mu(B-\Gamma)=1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(B-\Gamma)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu(\Gamma-B)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma - B = 30^\circ, \quad \text{επειδή} \quad 0<B,\Gamma<90^\circ$$

Έτσι έχουμε:

$$B+\Gamma=90^\circ \qquad \text{και} \qquad \Gamma - B = 30^\circ$$

οπότε με αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι $B=30^\circ$.

3. **i)** Έχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta \leqslant \eta\mu^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta \leqslant 2\eta\mu^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\leqslant 1-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\leqslant 1, \text{ που ισχύει.}$$

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

4. **i)** $\dfrac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{2}\leqslant \eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2} \leqslant \eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\left[1-\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\right] \geqslant 0.$$

που ισχύει γιατί $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1$ και $\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqslant 0$, αφού $0\leqslant\dfrac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\pi$.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

5. **i)** $\eta\mu A+\eta\mu(B-\Gamma)=2\eta\mu\dfrac{A+B-\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B+\Gamma}{2}$

$$=2\eta\mu\frac{\pi-2\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi-2B}{2} \qquad [\text{Αφού } A+B+\Gamma=\pi]$$

$$=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\Gamma\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$$

$$=2\sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot\eta\mu B$$

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} + 1 - 2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} =$

$$= 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} + 1 - 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} \qquad \left(\text{επειδή } \frac{A+B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right) + 1$$

$$= 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2} + 1 = 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} + 1.$$

6. $2\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} - 1 = \sqrt{2}\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\right) - 1$

$$= 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\right) - 1$$

$$= \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} + \sigma\upsilon\nu 45^\circ\right) - 1$$

$$= \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$$

7. Έχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu A = \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = 2\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} \qquad (1)$$

Επειδή $\frac{A}{2} + \frac{B+\Gamma}{2} = 90^\circ$, θα ισχύει $\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2} = \eta\mu\frac{A}{2}$. Επομένως

$$(1) \Leftrightarrow \eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} \qquad \left(\text{επειδή } \eta\mu\frac{A}{2} \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{B-\Gamma}{2} \;\; \text{ή} \;\; \frac{A}{2} = \frac{\Gamma-B}{2} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{επειδή}\\ -90^\circ < \frac{A}{2}, \frac{B-\Gamma}{2} < 90^\circ\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow A + \Gamma = B \;\; \text{ή} \;\; A + B = \Gamma$$

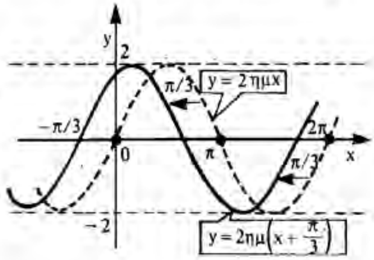
$$\Leftrightarrow B = 90^\circ \;\; \text{ή} \;\; \Gamma = 90^\circ$$

§ 3.9 Η Συνάρτηση f(x)=αημx+βσυνx

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

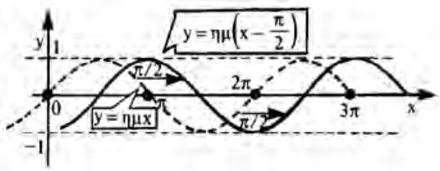
1. **i)** Η συνάρτηση $f(x) = 2ημ\left(x + \frac{π}{3}\right)$ είναι της μορφής $f(x) = ρημ(x + φ)$

Επομένως:
— Είναι περιοδική με περίοδο **2π**
— Έχει μέγιστη τιμή ίση με **2**
και ελάχιστη τιμή ίση με **−2**
Η γραφική της παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα:



ii) Η συνάρτηση $f(x) = ημ\left(x - \frac{π}{2}\right)$ είναι της μορφής $f(x) = ρημ(x + φ)$

Επομένως:
— Είναι περιοδική με περίοδο **2π**
— Έχει μέγιστη τιμή ίση με **1**
και ελάχιστη τιμή ίση με **−1**
Η γραφική της παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα:



2. i) Επειδή $α = \sqrt{3}$ και $β = -1$, έχουμε:

- $ρ = \sqrt{α^2 + β^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$, δηλαδή $\mathbf{ρ = 2}$

- $\begin{cases} συνφ = \dfrac{α}{ρ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = συν\dfrac{π}{6} \\[2ex] ημφ = \dfrac{β}{ρ} = \dfrac{-1}{2} = -ημ\dfrac{π}{6} \end{cases}$ οπότε ένα $\mathbf{φ = 2π - \frac{π}{6} = \frac{11π}{6}}$

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$\mathbf{f(x) = 2ημ\left(x + \frac{11π}{6}\right)}$$

ii) Επειδή $\alpha=-1$ και $\beta=1$, έχουμε:

- $\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, δηλαδή $\boldsymbol{\varrho=\sqrt{2}}$

- $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha}{\varrho}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4} \\ \eta\mu\varphi=\dfrac{\beta}{\varrho}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\eta\mu\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ οπότε ένα $\boldsymbol{\varphi=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}}$

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$\mathbf{f(x)=\sqrt{2}\eta\mu\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)}$$

iii) Επειδή $\alpha=-1$ και $\beta=-\sqrt{3}$, έχουμε:

- $\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{1+3}=2$, δηλαδή $\boldsymbol{\varrho=2}$

- $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha}{\varrho}=\dfrac{-1}{2}=-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \\ \eta\mu\varphi=\dfrac{\beta}{\varrho}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-\eta\mu\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ οπότε ένα $\boldsymbol{\varphi=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}}$

Επομένως: $f(x)=2\eta\mu\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$

iv) Επειδή $\alpha=1$ και $\beta=-1$, έχουμε:

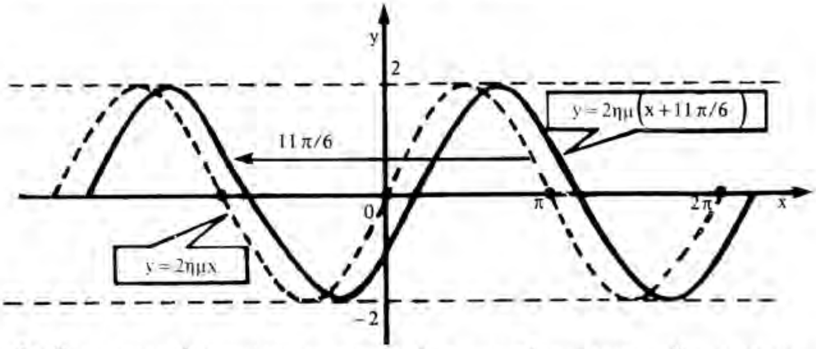
- $\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, δηλαδή $\boldsymbol{\varrho=\sqrt{2}}$

- $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\alpha}{\varrho}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4} \\ \eta\mu\varphi=\dfrac{\beta}{\varrho}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\eta\mu\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ οπότε ένα $\boldsymbol{\varphi=-\dfrac{\pi}{4}}$

Επομένως:

$$\mathbf{f(x)=\sqrt{2}\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

3. **i)** Επειδή $f(x) = 2\eta\mu\left(x + \frac{11\pi}{6}\right)$ (Άσκηση 2i) η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $\mathbf{2\pi}$, έχει μέγιστη τιμή ίση με **2** και ελάχιστη τιμή ίση με **−2**. Η γραφική της παράσταση είναι η επόμενη:

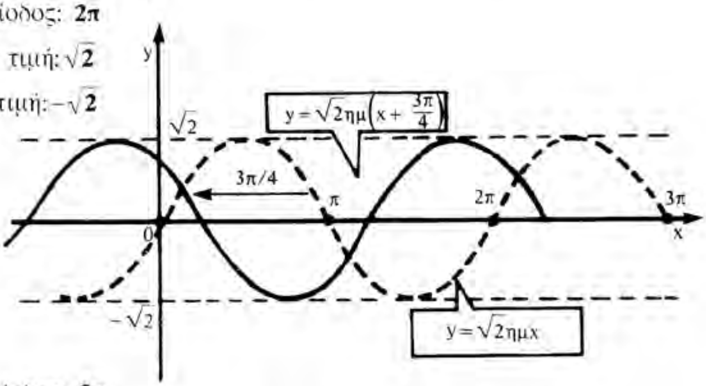


Ανάλογα προκύπτουν και οι γραφικές παραστάσεις των υπόλοιπων συναρτήσεων:

ii) Περίοδος: $\mathbf{2\pi}$

Μέγ. τιμή: $\sqrt{\mathbf{2}}$

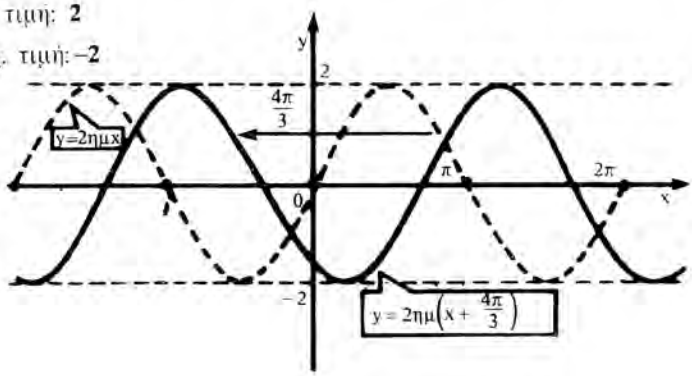
Ελ. τιμή: $-\sqrt{\mathbf{2}}$



iii) Περίοδος: $\mathbf{2\pi}$

Μέγ. τιμή: **2**

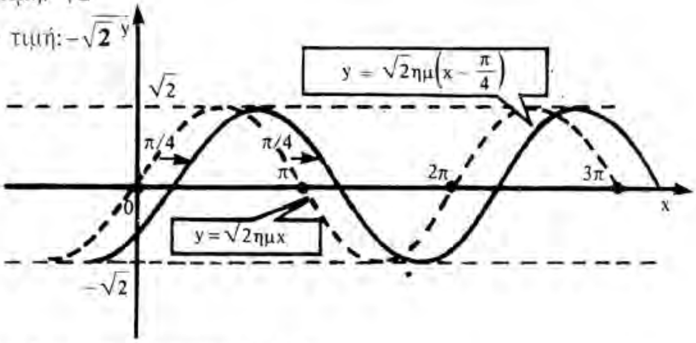
Ελαχ. τιμή: **−2**



iv) Περίοδος: $\mathbf{2\pi}$

Μέγ. τιμή: $\sqrt{\mathbf{2}}$

Ελαχ. τιμή: $-\sqrt{\mathbf{2}}$



4. **i)** Όπως είδαμε στην άσκηση 2 i) είναι:

$$\sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu\left(x + \frac{11\pi}{6}\right)$$

Επομένως έχουμε:

$$\sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(x + \frac{11\pi}{6}\right) = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{11\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{11\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{11\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi - \frac{4\pi}{3}}, \quad \mathbf{k \in Z}$$

ii) Όπως είδαμε στην άσκηση 2 ii) είναι:

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Επομένως έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{3\pi}{4} = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \quad\quad \text{ή} \quad\quad\quad\quad k \in Z \\ x + \dfrac{3\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{x = 2k\pi, \quad k \in Z}$$

iii) Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$\sqrt{2}\eta\mu x + \sqrt{6}\sigma\upsilon\nu x = 2\sqrt{2}\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Επομένως:

$$\sqrt{2}\eta\mu x + \sqrt{6}\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu x + \sqrt{6}\sigma\upsilon\nu x = -2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -2$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ ή } x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4},\ k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi - \frac{7\pi}{12}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{x = 2k\pi + \frac{11\pi}{12},\ k \in Z}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Επειδή $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{(MA)}{4}$ και $\eta\mu\omega = \frac{(MB)}{4}$ έχουμε:

$$(MA) = 4\sigma\upsilon\nu\omega \text{ και } (MB) = 4\eta\mu\omega$$

οπότε:

$$(MA) + (MB) = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 4\eta\mu\omega + 4\sigma\upsilon\nu\omega = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \mathbf{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

Επειδή όπως είδαμε στο πρώτο παράδειγμα, είναι:

$$\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{2}\eta\mu\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right),$$

έχουμε:

$$\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \omega+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega=\frac{\pi}{12}} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\omega=\frac{5\pi}{12}}$$

2. Είναι $(OA)=(AB)\text{συν}\theta=2\text{συν}\theta$ και $(OB)=(AB)\text{ημ}\theta=2\text{ημ}\theta$

Επομένως:

i) $(OA)+(OB)=2\text{ημ}\theta+2\text{συν}\theta$

ii) Φέρνουμε την παράσταση $2\text{ημ}\theta+2\text{συν}\theta$ στη μορφή $\varrho\text{ημ}(\theta+\varphi)$.

Έχουμε $\alpha=2$, $\beta=2$ οπότε:

- $\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$. δηλαδή $\boldsymbol{\varrho=2\sqrt{2}}$ και

- $\begin{cases} \text{συν}\varphi=\dfrac{\alpha}{\varrho}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\text{συν}\dfrac{\pi}{4} \\ \\ \text{ημ}\varphi=\dfrac{\beta}{\varrho}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\text{ημ}\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$, δηλαδή ένα $\boldsymbol{\varphi=\frac{\pi}{4}}$

Επομένως:

$(OA)+(OB)=2\text{ημ}\theta+2\text{συν}\theta=2\sqrt{2}\text{ημ}(\theta+\frac{\pi}{4})$

απ' όπου προκύπτει ότι το άθροισμα $(OA)+(OB)$ γίνεται μέγιστο όταν

το $\text{ημ}\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ γίνει ίσο με 1 δηλαδή όταν $\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$ $\left(\text{αφού } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

Η μέγιστη τιμή του $(OA)+(OB)$ ισούται με $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$.

3. **i)** Είναι $f(x)=g(x)+3$, όπου $g(x)=5\text{ημ}x+12\text{συν}x$.

Επειδή για τη συνάρτηση g ισχύει $\varrho=\sqrt{5^2+12^2}=13$, η μέγιστη τιμή της g είναι ίση με 13, ενώ η ελάχιστη με -13. Επομένως η **μέγιστη** τιμή της f είναι ίση με $13+3=\mathbf{16}$, ενώ η **ελάχιστη** με $-13+3=\mathbf{-10}$.

ii) Είναι: $f(x)=4\text{ημ}x\text{συν}x+4\text{συν}^2x=2\text{ημ}2x+2(1+\text{συν}2x)$

$=2\text{ημ}2x+2\text{συν}2x+2=$

$=g(x)+2$, όπου $g(x)=2\text{ημ}2x+2\text{συν}2x$

Επειδή για τη συνάρτηση g ισχύει $\varrho=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, η μέγιστη τιμή της g είναι ίση με $2\sqrt{2}$, ενώ η ελάχιστη με $-2\sqrt{2}$. Επομένως η **μέγιστη** τιμή της f είναι ίση με $\mathbf{2\sqrt{2}+2}$, ενώ η **ελάχιστη** με $\mathbf{-2\sqrt{2}+2}$.

4. Εχουμε:

$$2\eta\mu x(\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \sqrt{3}(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x) - 2\eta\mu^2 x = \sqrt{2}-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\eta\mu 2x - (1-\sigma\upsilon\nu 2x) = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \qquad \left[\text{γιατί } \rho=2 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \eta\mu\varphi = \frac{1}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6} = 2k\pi+\frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad 2x+\frac{\pi}{6} = 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}, \quad k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = k\pi+\frac{\pi}{24}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{x = k\pi+\frac{7\pi}{24}}, \quad \mathbf{k\in Z}$$

5. **i)** Επειδή $\eta\mu\theta = \dfrac{(AB)}{h}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{(A\Gamma)}{h}$, έχουμε:

$$(AB)+(B\Gamma)+(\Gamma A) = 40 \Leftrightarrow h\sigma\upsilon\nu\theta + h\eta\mu\theta + h = 40$$

$$\Leftrightarrow h(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta+1) = 40$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{40}{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta+1}$$

ii) Επειδή η παράσταση ημθ +συνθ παίρνει τη μορφή

$$\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{2}\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

έχουμε:

$$h = \frac{40}{\sqrt{2}\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1}$$

Επομένως το h παίρνει τη μικρότερη τιμή του όταν το $\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ παίρνει μεγαλύτερη τιμή του, δηλαδή όταν $\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Αυτό συμβαίνει όταν $\theta+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή όταν $\theta = \frac{\pi}{4}$. Η **μικρότερη** τιμή του h είναι ίση με $\frac{40}{\sqrt{2}+1} = \mathbf{40(\sqrt{2}-1)}$.

6. **i)** Επειδή $\widehat{MOK} = 2\theta$, στο ορθογώνιο τρίγωνο KOM έχουμε:

$$\eta\mu 2\theta = \frac{(MK)}{(OM)} = (MK) \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu 2\theta = \frac{(OK)}{(OM)} = (OK)$$

Επομένως έχουμε:

$$P = (OM) + (MK) + (OK) = 1 + ημ2θ + συν2θ$$

ii) Επειδή η παράσταση $ημ2θ + συν2θ$ παίρνει τη μορφή

$$ημ2θ + συν2θ = \sqrt{2}ημ\left(2θ + \frac{π}{4}\right)$$

έχουμε:

$$P = 1 + \sqrt{2}ημ\left(2θ + \frac{π}{4}\right)$$

Επομένως το P παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του όταν το $ημ\left(2θ + \frac{π}{4}\right)$ πάρει τη μεγαλύτερη τιμή του, δηλαδή όταν $ημ\left(2θ + \frac{π}{4}\right) = 1$. Αυτό συμβαίνει όταν $2θ + \frac{π}{4} = \frac{π}{2}$, δηλαδή όταν $\boldsymbol{θ = \frac{π}{8}}$. Η **μεγαλύτερη** τιμή του P είναι ίση με $\mathbf{1 + \sqrt{2}}$.

§ 3.10 Επίλυση Τριγώνου

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Επειδή $Α + Β + Γ = 180°$ έχουμε:

$$B = 180° - A - Γ = 180° - 63° - 56° = 61°$$

Έτσι, από το νόμο των ημιτόνων, έχουμε:

$$\frac{300}{ημ61°} = \frac{(AB)}{ημ56°} \Leftrightarrow (AB) = \frac{300 \cdot ημ56°}{ημ61°} \simeq 284$$

Άρα **ΑΒ ≃ 284 m**.

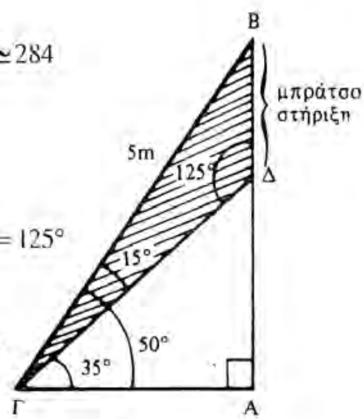
2. Στο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε:

$$B\widehat{Γ}Δ = 50° - 35° = 15° \quad και \quad B\widehat{Δ}Γ = 90° + 35° = 125°$$

Έτσι, από το νόμο των ημιτόνων, έχουμε:

$$\frac{5}{ημ125°} = \frac{(BΔ)}{ημ15°} \Leftrightarrow (BΔ) = \frac{5 \cdot ημ15°}{ημ125°} \simeq 1,58$$

Άρα **ΒΔ ≃ 1,58m**.



3. Η γωνία y είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ. Άρα ισχύει:

$y = x + \widehat{B\Gamma\Delta}$, οπότε $\widehat{B\Gamma\Delta} = y - x$

Έτσι:

i) Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΒΓΔ, έχουμε:

$$\frac{(\Gamma\Delta)}{\eta\mu x} = \frac{(B\Delta)}{\eta\mu B\hat{\Gamma}\Delta} \Leftrightarrow \frac{(\Gamma\Delta)}{\eta\mu x} = \frac{d}{\eta\mu(y-x)} \Leftrightarrow (\Gamma\Delta) = \frac{d\eta\mu x}{\eta\mu(y-x)} \quad (1)$$

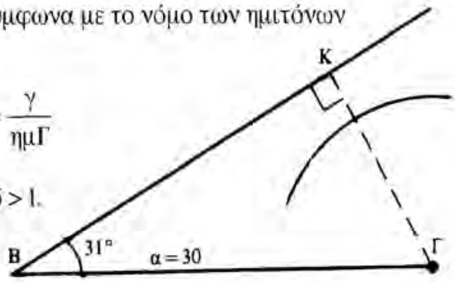
ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$, έχουμε:

$$\eta\mu y = \frac{(A\Gamma)}{(\Gamma\Delta)} \Leftrightarrow (A\Gamma) = \eta\mu y \cdot (\Gamma\Delta) \Leftrightarrow (A\Gamma) = \frac{d\eta\mu x\eta\mu y}{\eta\mu(y-x)} \quad (\lambda\acute{o}\gamma\omega\ (1))$$

4. Αν υπήρχε τέτοιο τρίγωνο, σύμφωνα με το νόμο των ημιτόνων θα ίσχυε:

$$\frac{30}{\eta\mu A} = \frac{10}{\eta\mu 31^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

οπότε $\eta\mu A = \dfrac{30\cdot\eta\mu 31^\circ}{10} \simeq 1{,}5 > 1.$



Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $\eta\mu A \geqslant 1$.

5. Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$4{,}25^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow 18{,}06 = 4 + 9 - 12\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\Leftrightarrow 12\sigma\upsilon\nu\theta = -5{,}06 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{5{,}06}{12}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -0{,}42 \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta = 115^\circ}$$

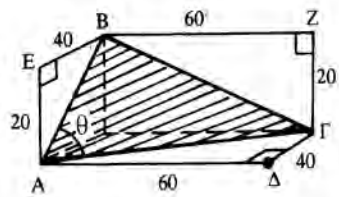
6. Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$(AB)^2 = 42^2 + 55^2 - 2\cdot 42\cdot 55\sigma\upsilon\nu 62^\circ = 1764 + 3025 - 4620\cdot 0{,}4695$$
$$= 1764 + 3025 - 2169 = 2620$$

Άρα το μήκος του έλους ισούται με **51,2 m**

7. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$(AB)^2 = (AE)^2 + (EB)^2 = 20^2 + 40^2 = 2000$$
$$(A\Gamma)^2 = (A\Delta)^2 + (\Gamma\Delta)^2 = 60^2 + 40^2 = 5200$$
$$(B\Gamma)^2 = (BZ)^2 + (\Gamma Z)^2 = 60^2 + 20^2 = 4000$$



Έτσι από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

$$(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 - 2(ΑΒ)\cdot(ΑΓ)συνθ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4000 = 2000 + 5200 - 2\cdot 10\sqrt{20}\cdot 10\sqrt{52}συνθ$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{20}\cdot\sqrt{52}συνθ = 32$$

$$\Leftrightarrow συνθ = \frac{16}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{52}} \Leftrightarrow συνθ = \frac{16}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow συνθ = \frac{4}{\sqrt{65}} \Leftrightarrow συνθ \simeq 0,4961 \Leftrightarrow \boldsymbol{θ \simeq 60,25°}$$

8. Από το νόμο των συνημιτόνων (βλ. σχόλιο) προκύπτει ότι:

$$\frac{συνΑ}{α} + \frac{συνΒ}{β} + \frac{συνΓ}{γ} = \frac{β^2+γ^2-α^2}{2αβγ} + \frac{γ^2+α^2-β^2}{2αβγ} + \frac{α^2+β^2-γ^2}{2αβγ}$$

$$= \frac{α^2+β^2+γ^2}{2αβγ}$$

9. Από το νόμο των συνημιτόνων (βλ. σχόλιο) προκύπτει ότι:

$$βσυνΓ + γσυνΒ = β\cdot\frac{α^2+β^2-γ^2}{2αβ} + γ\cdot\frac{γ^2+α^2-β^2}{2γα} = \frac{2α^2}{2α} = α$$

10. Από το νόμο των συνημιτόνων (βλ. σχόλιο) έχουμε διαδοχικά:

$$βσυνΓ = γσυνΒ \Leftrightarrow β\cdot\frac{α^2+β^2-γ^2}{2αβ} = γ\cdot\frac{γ^2+α^2-β^2}{2γα}$$

$$\Leftrightarrow α^2+β^2-γ^2 = γ^2+α^2-β^2$$

$$\Leftrightarrow 2β^2 = 2γ^2 \Leftrightarrow β = γ,$$

που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

11. Από το νόμο των συνημιτόνων (βλ. σχόλιο) έχουμε:

$$α = 2βσυνΓ \Leftrightarrow α = 2β\cdot\frac{α^2+β^2-γ^2}{2αβ} \Leftrightarrow α^2 = α^2+β^2-γ^2 \Leftrightarrow β^2 = γ^2 \Leftrightarrow β = γ,$$

που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Επειδή $\frac{α}{ημΑ} = \frac{β}{ημΒ} = \frac{γ}{ημΓ} = 2R$ είναι:

i) $συνΑ = \frac{β}{2α} \Leftrightarrow συνΑ = \frac{2RημΒ}{2\cdot 2RημΑ} \Leftrightarrow 2ημΑσυνΑ = ημΒ$

$\Leftrightarrow ημ2Α = ημΒ,$ που ισχύει αφού Β = 2Α.

ii) $\beta^2-\alpha^2=\alpha\gamma \Leftrightarrow (2R\eta\mu B)^2-(2R\eta\mu A)^2=2R\eta\mu A\cdot 2R\eta\mu\Gamma$

$\Leftrightarrow 4R^2\eta\mu^2 B-4R^2\eta\mu^2 A=4R^2\eta\mu A\eta\mu\Gamma$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2 B-\eta\mu^2 A=\eta\mu A\eta\mu\Gamma$

(βλ. εφαρμογή 2 σελ. 13)

$\Leftrightarrow \eta\mu(B+A)\cdot\eta\mu(B-A)=\eta\mu A\eta\mu\Gamma$

$\Leftrightarrow \eta\mu(B-A)=\eta\mu A$ $\quad$ [αφού $\eta\mu(B+A)=\eta\mu\Gamma$]

Η τελευταία όμως ισότητα ισχύει, αφού $B=2A$.

2ος τρόπος Από το νόμο των συνημιτόνων, αν ληφθεί υπόψη το προηγούμενο συμπέρασμα ότι $\sigma\upsilon\nu A=\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

2. Στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι:

$$B\hat{\Delta}\Gamma=135^\circ \quad \kappa\alpha\iota \quad \Gamma\hat{B}\Delta=45^\circ-x$$

Έτσι από το νόμο των ημιτόνων έχουμε $\dfrac{(\Gamma\Delta)}{\eta\mu(45^\circ-x)}=\dfrac{\alpha}{\eta\mu 135^\circ}$, οπότε:

$$(\Gamma\Delta)=\alpha\cdot\frac{\eta\mu(45^\circ-x)}{\eta\mu 135^\circ}=\alpha\cdot\frac{\eta\mu 45^\circ\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 45^\circ\eta\mu x}{\eta\mu 45^\circ}$$

$$=\alpha\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\alpha(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x).$$

3. **i)** Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε διαδοχικά:

$\beta=\alpha\eta\mu B \Leftrightarrow 2R\eta\mu B=2R\eta\mu A\cdot\eta\mu B \Leftrightarrow \eta\mu A=1 \Leftrightarrow A=90^\circ$

ii) Από τον ίδιο νόμο έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha\eta\mu A=\beta\eta\mu B+\gamma\eta\mu\Gamma \Leftrightarrow \alpha\cdot\frac{\alpha}{2R}=\beta\cdot\frac{\beta}{2R}+\gamma\cdot\frac{\gamma}{2R} \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow A=90^\circ$$

4. Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha\sigma\upsilon\nu A=\beta\sigma\upsilon\nu B$$
$$2R\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A=2R\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B$$
$$\eta\mu 2A=\eta\mu 2B$$
$$2A=2B \quad \acute{\eta} \quad 2A=180^\circ-2B$$
$$A=B \quad \acute{\eta} \quad A+B=90^\circ$$
$$A=B \quad \acute{\eta} \quad \Gamma=90^\circ$$

που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ή ορθογώνιο.

5. Από το νόμο των ημιτόνων προκύπτει ότι:

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2R\eta\mu A-2R\eta\mu B}{2R\eta\mu A+2R\eta\mu B}=\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{2\eta\mu\frac{A-B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}}{2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\eta\mu\frac{A-B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}\qquad\left(\text{γιατί }\frac{A+B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^\circ\right)$$

$$=\frac{\eta\mu\frac{A-B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

6. Από το νόμο των συνημιτόνων για το τρίγωνο ΟΒΓ έχουμε:

$$(B\Gamma)^2=(OB)^2+(O\Gamma)^2-2(OB)\cdot(O\Gamma)\sigma\upsilon\nu B\widehat{O}\Gamma \qquad (1)$$

Επειδή $B\widehat{O}\Gamma=180^\circ-\theta$ και $(O\Gamma)=(OA)\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\theta$, η σχέση (1) γράφεται:

$$(B\Gamma)^2=1^2+\sigma\upsilon\nu^2\theta-2\cdot1\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)=1+\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$=1+3\sigma\upsilon\nu^2\theta=1+3\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\theta}{2}=\frac{5+3\sigma\upsilon\nu2\theta}{2}.$$

7. **i)** Από το νόμο των συνημιτόνων για τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ έχουμε:

$$x^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\omega \text{ και } y^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)$$
$$=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\omega$$

οπότε $x^2+y^2=2\alpha^2+2\beta^2$.

ii) $(AB\Gamma\Delta)=4(OAB)=4\cdot\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\omega=2\alpha\beta\eta\mu\omega$

8. **i)** Αν στον τύπο $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ θέσουμε $\beta=2R\eta\mu B$, και $\gamma=2R\eta\mu\Gamma$ βρίσκουμε ότι:

$$E=\frac{1}{2}\cdot2R\eta\mu B\cdot2R\eta\mu\Gamma\cdot\eta\mu A=2R^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma.$$

ii) Επειδή $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}$, έχουμε $\beta=\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}$. Επομένως:

$$E=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}\cdot\alpha\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}\eta\mu\Gamma=\frac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu A}$$

9. Έχουμε διαδοχικά:

$$(AB\Gamma)=(AB\Delta)+(A\Delta\Gamma)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu(x+y)=\frac{1}{2}\gamma\delta\eta\mu x+\frac{1}{2}\beta\delta\eta\mu y$$

$$\Leftrightarrow\frac{\eta\mu(x+y)}{\delta}=\frac{\eta\mu x}{\beta}+\frac{\eta\mu y}{\gamma}$$

Αν $A = 90°$ και $A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$ τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{\eta\mu 90°}{\delta}=\frac{\eta\mu 45°}{\beta}+\frac{\eta\mu 45°}{\gamma}\Leftrightarrow\frac{1}{\delta}=\frac{\sqrt{2}}{2\beta}+\frac{\sqrt{2}}{2\gamma}\Leftrightarrow\frac{1}{\delta}=\frac{\sqrt{2}(\beta+\gamma)}{2\beta\gamma}\Leftrightarrow\delta=\frac{2\beta\gamma}{\sqrt{2}(\beta+\gamma)}$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{\delta=\frac{\sqrt{2}\cdot\beta\gamma}{\beta+\gamma}}$$

10. Έχουμε διαδοχικά:

$$(OAB)=(OA\Gamma)+(BO\Gamma)\Leftrightarrow\frac{1}{2}R_1R_2\eta\mu 120°=\frac{1}{2}R_1R\eta\mu 60°+\frac{1}{2}R_2R\eta\mu 60°$$

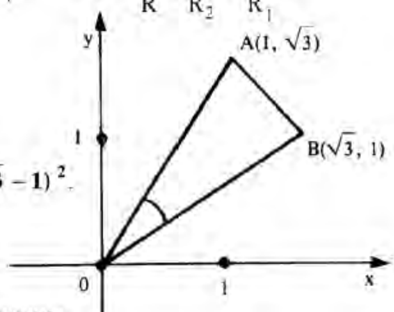
$$\Leftrightarrow R_1R_2=R_1R+R_2R\Leftrightarrow\frac{1}{R}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}$$

11. Όπως είναι γνωστό έχουμε:

$(OA)^2=1^2+(\sqrt{3})^2=\mathbf{4}$

$(OB)^2=(\sqrt{3})^2+1^2=\mathbf{4}$

$(AB)^2=(\sqrt{3}-1)^2+(1-\sqrt{3})^2=\mathbf{2(\sqrt{3}-1)^2}$.



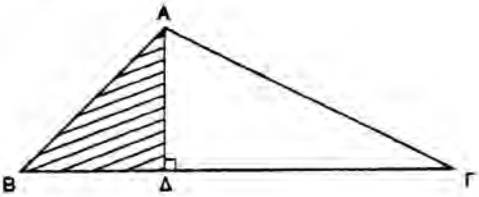
Έτσι από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2-2(OA)(OB)\sigma\upsilon\nu A\hat{O}B\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3}-1)^2=4+4-2\cdot 2\cdot 2\sigma\upsilon\nu A\hat{O}B$$

$$\Leftrightarrow 8-4\sqrt{3}=8-8\sigma\upsilon\nu A\hat{O}B\ \Leftrightarrow\ \sigma\upsilon\nu A\hat{O}B=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \mathbf{A\hat{O}B=30°}.$$

Γενικές Ασκήσεις



1. i) Επειδή:

$$εφΒ = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} \text{ και } εφΓ = \frac{ΑΔ}{ΓΔ}$$

Έχουμε:

$$ΒΔ = \frac{ΑΔ}{εφΒ} \text{ και } ΓΔ = \frac{ΑΔ}{εφΓ}$$

Άρα:

$$ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = \frac{ΑΔ}{εφΒ} + \frac{ΑΔ}{εφΓ} = \frac{ΑΔ\, εφΓ + ΑΔ\, εφΒ}{εφΒ \cdot εφΓ} = ΑΔ \cdot \frac{εφΒ + εφΓ}{εφΒ \cdot εφΓ}$$

οπότε: $$ΒΓ = ΑΔ \cdot \frac{εφΒ + εφΓ}{εφΒ \cdot εφΓ} \quad (1)$$

Αλλά $ΒΓ = 2 \cdot ΑΔ$. Επομένως η σχέση (1) γράφεται:

$$2 \cdot ΑΔ = ΑΔ \cdot \frac{εφΒ + εφΓ}{εφΒ \cdot εφΓ} \Leftrightarrow 2 = \frac{εφΒ + εφΓ}{εφΒ \cdot εφΓ} \Leftrightarrow εφΒ + εφΓ = 2εφΒ\, εφΓ$$

ii) Επειδή $εφΒ = \frac{1}{σφΒ}$ και $εφΓ = \frac{1}{σφΓ}$ η (i) γράφεται:

$$\frac{1}{σφΒ} + \frac{1}{σφΓ} = 2\, \frac{1}{σφΒ} \cdot \frac{1}{σφΓ} \Leftrightarrow σφΓ + σφΒ = 2.$$

2. Επειδή: $$ημ^2Β = \frac{εφ^2Β}{1 + εφ^2Β} \text{ και } ημ^2Γ = \frac{εφ^2Γ}{1 + εφ^2Γ}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{εφΒ}{εφΓ} = \frac{ημ^2Β}{ημ^2Γ} \Leftrightarrow \frac{εφΒ}{εφΓ} = \frac{\dfrac{εφ^2Β}{1 + εφ^2Β}}{\dfrac{εφ^2Γ}{1 + εφ^2Γ}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{εφΒ}{εφΓ} = \frac{εφ^2Β\,(1 + εφ^2Γ)}{εφ^2Γ\,(1 + εφ^2Β)} \Leftrightarrow 1 = \frac{εφΒ\,(1 + εφ^2Γ)}{εφΓ\,(1 + εφ^2Β)}$$

$$\Leftrightarrow εφΒ\,(1 + εφ^2Γ) = εφΓ\,(1 + εφ^2Β) \Leftrightarrow εφΒ + εφΒ\, εφ^2Γ = εφΓ + εφ^2Β\, εφΓ$$

$$\Leftrightarrow (εφΒ - εφΓ) + (εφΒ\, εφ^2Γ - εφ^2Β\, εφΓ) = 0$$

$$\Leftrightarrow (εφΒ - εφΓ) - εφΒ\, εφΓ\,(εφΒ - εφΓ) = 0$$

$$\Leftrightarrow (εφΒ - εφΓ)\,(1 - εφΒ\, εφΓ) = 0$$

$$\Leftrightarrow εφΒ = εφΓ \quad \text{ή} \quad εφΒ\, εφΓ = 1$$

$\Leftrightarrow B = \Gamma$ [γιατί $0^\circ < B, \Gamma < 180^\circ$] ή εφB = σφΓ = εφ $(90^\circ - \Gamma)$
$\Leftrightarrow B = \Gamma$ ή $B = 90^\circ - \Gamma$ [γιατί $0^\circ < B, \Gamma < 180^\circ$]
$\Leftrightarrow B = \Gamma$ ή $A = 90^\circ$.

Δηλαδή το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

3. Αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση του Μ (x, y) από το k (1, 3) ισούται με 2, δηλαδή ότι:

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = 2$ ή $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

Πράγματι, επειδή $x = 1 + 2$συνt, $y = 3 + 2$ημt, έχουμε:

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (2\text{συν}t)^2 + (2\text{ημ}t)^2 = 4\text{συν}^2t + 4\text{ημ}^2t$

$= 4(\text{συν}^2t + \text{ημ}^2t) = 4 \cdot 1 = 4.$

4. i) Η εξίσωση ορίζεται, εφόσον συν $x \neq 0$ και ημ$x \neq -1$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{1+\text{ημ}x}{\text{συν}x} + \frac{\text{συν}x}{1+\text{ημ}x} = 4 \Leftrightarrow (1+\text{ημ}x)^2 + \text{συν}^2x = 4\text{συν}x\,(1+\text{ημ}x)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\text{ημ}x + \underbrace{\text{ημ}^2x + \text{συν}^2x}_{1} = 4\text{συν}x + 4\text{ημ}x\,\text{συν}x$$

$\Leftrightarrow 2 + 2\text{ημ}x - 4\text{συν}x - 4\text{ημ}x\,\text{συν}x = 0$
$\Leftrightarrow 1 + \text{ημ}x - 2\,\text{συν}x - 2\text{ημ}x\,\text{συν}x = 0$
$\Leftrightarrow (1+\text{ημ}x) - 2\text{συν}x\,(1+\text{ημ}x) = 0 \quad \Leftrightarrow (1+\text{ημ}x)(1-2\text{συν}x) = 0$
$\Leftrightarrow 1 - 2\,\text{συν}x = 0$ [γιατί, λόγω περιορισμού, ισχύει ημ$x \neq -1$]
$\Leftrightarrow \text{συν}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \; k \in Z.$

Οι λύσεις αυτές είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ii) Η εξίσωση ορίζεται εφόσον ημ $x \neq 0$ και ημ $x \neq 1$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{\text{συν}x\ \text{σφ}x}{1-\text{ημ}x} = 3 \Leftrightarrow \text{συν}x\ \text{σφ}x = 3 - 3\text{ημ}x$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}x \cdot \frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x} = 3 - 3\text{ημ}x \Leftrightarrow \text{συν}^2x = 3\text{ημ}x - 3\text{ημ}^2x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \text{ημ}^2x = 3\text{ημ}x - 3\text{ημ}^2x \Leftrightarrow 2\text{ημ}^2x - 3\text{ημ}x + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow \text{ημ}x = \frac{3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow \text{ημ}x = \frac{1}{2}$ [αφού, λόγω περιορισμού, είναι ημ$x \neq 1$]

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\,\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \quad k \in Z$$

Οι λύσεις αυτές είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

5. i) Επειδή $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ισχύει εφ $x > 0$. Επομένως έχουμε:

$$\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x \geq 2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x + \frac{1}{\varepsilon\varphi x} \geq 2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x + 1 \geq 2\ \varepsilon\varphi x$$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x - 2\ \varepsilon\varphi x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \quad (\varepsilon\varphi x - 1)^2 \geq 0$, που ισχύει:

ii) Επειδή $0 \leq \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\ \alpha > 0,\ \sigma\upsilon\nu\ \beta > 0 \ \text{και}\ \varepsilon\varphi\ \alpha < \varepsilon\varphi\ \beta \qquad (1)$$

Επομένως έχουμε:

- $\varepsilon\varphi\alpha < \dfrac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta} \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} < \dfrac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta}$

  $\Leftrightarrow \eta\mu\alpha\ (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta) < \sigma\upsilon\nu\alpha\ (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)$

  $\Leftrightarrow \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta < \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta \Leftrightarrow \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta < \sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta$

  $\Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta} < \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha < \varepsilon\varphi\beta$, που ισχύει

- $\dfrac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta} < \varepsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta} < \dfrac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha < \varepsilon\varphi\beta$ που ισχύει.

6. Έχουμε:

$$2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1 \qquad \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sigma\upsilon\nu\ \frac{\pi}{3} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} - 2x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \dfrac{\pi}{3} - 2x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{3} \end{cases},\ k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -k\pi \\ \text{ή} \\ 2x = -2k\pi + \dfrac{2\pi}{3} \end{cases},\ k \in Z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -k\pi \\ \text{ή} \\ x = -k\pi + \dfrac{\pi}{3} \end{cases},\ k \in Z$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $x = k\pi, k \in Z$, τότε έχουμε:

$x \in (4\pi, 5\pi) \quad \Leftrightarrow 4\pi < x < 5\pi \Leftrightarrow 4\pi < -k\pi < 5\pi$

$\Leftrightarrow 4 < -k < 5 \Leftrightarrow -5 < k < -4$, αδύνατο αφού $k \in Z$

Άρα δεν υπάρχουν λύσεις της μορφής $x = -k\pi, k \in Z$ στο διάστημα $(4\pi, 5\pi)$.

- Αν $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$, τότε έχουμε:

$x \in (4\pi, 5\pi) \quad \Leftrightarrow 4\pi < -k\pi + \frac{\pi}{3} < 5\pi \quad \Leftrightarrow 12\pi < -3k\pi + \pi < 15\pi$

$\Leftrightarrow 11\pi < -3k\pi < 14\pi \quad \Leftrightarrow 11 < -3k < 14$

$\Leftrightarrow -\frac{14}{3} < k < -\frac{11}{3} \quad \Leftrightarrow k = -4$

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση της μορφής $x = -k\pi + \frac{2\pi}{3}$ στο διάστημα $(4\pi, 5\pi)$, την $x = -(-4)\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$.
Αυτή είναι και η μοναδική λύση της εξίσωσης στο διάστημα $(4\pi, 5\pi)$.

7. Στο κατακόρυφο επίπεδο του τροχού ορίζουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα, του οποίου οι άξονες έχουν μονάδες με μήκος 1m.

i) Αν M είναι η θέση του βαγονιού A, t sec μετά την έναρξη της περιστροφής του τροχού και y_M η τεταγμένη του, τότε προφανώς το ζητούμενο ύψος ισούται με:

$$\mathbf{h = 10 + y_M} \qquad (1)$$

Επειδή ο περιστρεφόμενος τροχός εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 8 sec, η ακτίνα ΟΑ σε 8 sec διαγράφει γωνία 2π rad. Επομένως σε 1 sec διαγράφει

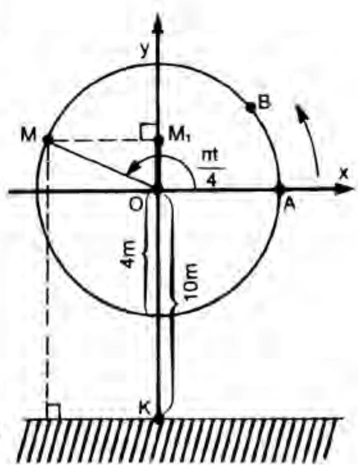
γωνία $\frac{2\pi}{8}$ rad $= \frac{\pi}{4}$ rad, οπότε σε t sec θα διαγράψει γωνία $\frac{\pi t}{4}$ rad.

Επειδή $\varrho = (OM) = 4$m, σύμφωνα με τον τύπο $y_M = \varrho$ ημ ω, θα ισχύει:

$$\mathbf{y_M = 4ημ\frac{\pi t}{4}}$$

οπότε, λόγω της (1), έχουμε:

$$\mathbf{h = 10 + 4\ ημ\ \frac{\pi t}{4}} \qquad (2)$$



Επομένως σε χρόνο:

— 1 sec από την έναρξη περιστροφής το ύψος του βαγονιού Α θα είναι:

$$h = \left(10 + 4\ ημ\ \frac{πh}{4}\right)m = \left(10 + 2\sqrt{2}\right)m$$

— 2 sec από την έναρξη περιστροφής το ύψος του βαγονιού Α θα είναι:

$$h = \left(10 + 4\ ημ\ \frac{2π}{4}\right)m = (10 + 4)\ m = 14m$$

— 5 sec από την έναρξη περιστροφής το ύψος του βαγονιού Α θα είναι:

$$h = \left(10 + 4\ ημ\ \frac{5π}{4}\right)m = \left(10 + 4\ ημ\ \left(π + \frac{π}{4}\right)\right)m$$

$$= \left(10 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)m = \left(10 - 2\sqrt{2}\right)m$$

ii) Για να φτάσει το βαγόνι Α στη θέση Β χρειάζεται 1 sec. Επομένως το ύψος του βαγονιού Β τη χρονική στιγμή t ισούται με το ύψος του Α τη χρονική στιγμή t + 1, δηλαδή με:

$$10 + 4\ ημ\ \frac{π(t + 1)}{4} = 10 + 4\ ημ\ \left(\frac{πt}{4} + \frac{π}{4}\right).$$

8. **i)** $σφx - εφx = \dfrac{συνx}{ημx} - \dfrac{ημx}{συνx} = \dfrac{συν^2x - ημ^2x}{ημxσυνx} = \dfrac{συν2x}{\frac{1}{2}ημ2x} = 2σφ2x$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$σφx - εφx - 2εφ2x - 4εφ4x - 8σφ8x = 0$$

Πράγματι, λόγω της (i), έχουμε:

$$\underbrace{σφx - εφx} - 2εφ2x - 4εφ4x - 8σφ8x = 2σφ2x - 2εφ2x - 4εφ4x - 8σφ8x$$

$$\overset{(i)}{=} \underbrace{4σφ4x - 4εφ4x} - 8σφ8x$$

$$\overset{(i)}{=} 8σφ8x - 8σφ8x = 0$$

9. **i)** Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$3x - 4x^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (1)$$

Επειδή $3ημα - 4ημ^3α = ημ3α$ για να είναι το ημα λύση της εξίσωσης (1) αρκεί $ημ3α = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Έχουμε όμως:

$$\eta\mu 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 3\alpha = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 3\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad ή \quad 3\alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{4},\ k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad ή \quad \alpha = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4},\quad k \in Z$$

Επειδή ο k παίρνει τη μορφή $k = 3\rho + \upsilon$, όπου $\rho,\ \upsilon \in Z$ με $0 \leqslant \upsilon < 3$

οι ρίζες της $\eta\mu 3\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ δίνονται από τους τύπους

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 2\rho\pi + \dfrac{2\upsilon\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12} = 2\rho\pi + \dfrac{(8\upsilon+1)\pi}{12} \\ \qquad\qquad ή \\ \alpha = 2\rho\pi + \dfrac{2\upsilon\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = 2\rho\pi + \dfrac{(8\upsilon+3)\pi}{12} \end{array}\right. \quad \text{με } \rho,\upsilon \in Z \text{ και } 0 \leqslant \upsilon < 3.$$

Επομένως οι αριθμοί:

$$\eta\mu\left(2\rho\pi + \frac{(8\upsilon+1)\pi}{12}\right) = \eta\mu\frac{(8\upsilon+1)\pi}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \eta\mu\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\mathbf{\sqrt{6} - \sqrt{2}}}{\mathbf{4}} \\ \eta\mu\dfrac{9\pi}{12} = \eta\mu\dfrac{3\pi}{4} = \eta\mu\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}} \\ \eta\mu\dfrac{17\pi}{12} = -\eta\mu\dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{\mathbf{\sqrt{6} + \sqrt{2}}}{\mathbf{4}} \end{array}\right.$$

και

$$\eta\mu\left(2\rho\pi + \frac{(8\upsilon+3)\pi}{12}\right) = \eta\mu\frac{(8\upsilon+3)\pi}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \eta\mu\dfrac{3\pi}{12} = \eta\mu\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\dfrac{11\pi}{12} = \eta\mu\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \eta\mu\dfrac{19\pi}{12} = -\eta\mu\dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{array}\right.$$

είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Επειδή η εξίσωση αυτή είναι τρίτου βαθμού θα είναι και οι μοναδικές.

ii) Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο

10. Έστω M(x, y) ένα σημείο του επιπέδου με $x = συνθ$ και $y = συν2θ + 1$, όπου $θ \in [0, π]$. Τότε:

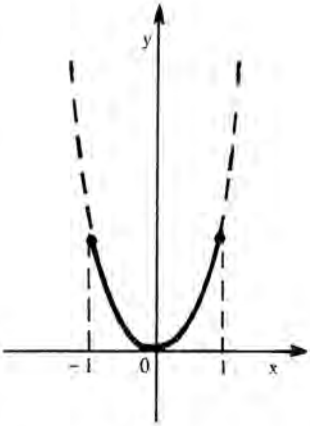
$y = συν2θ + 1 = 2συν^2θ - 1 + 1 = 2συν^2θ = 2x^2$

Επειδή επιπλέον $-1 \leqslant συνθ \leqslant 1$ θα είναι $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Άρα το M(x, y) ανήκει στο τόξο της παραβολής $y = 2x^2$, με $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Αντιστρόφως έστω M(x, y) ένα σημείο του τόξου της παραβολής $y = 2x^2$, με $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Τότε υπάρχει $θ \in [0, π]$ τέτοιο, ώστε $συνθ = x$, οπότε $y = 2(συνθ)^2 = 1 + συν2θ$.

Άρα το M(x, y) ανήκει στο σύνολο των σημείων του επιπέδου με

$x = συνθ$ και $y = συν2θ + 1$, όπου $θ \in [0, π]$.



11. Επειδή $-π < x < π$ θα είναι και $-\frac{π}{2} < \frac{x}{2} < \frac{π}{2}$. Άρα ορίζεται η $εφ\frac{x}{2}$ και σύμφωνα με τους δοσμένους τύπους έχουμε:

$$f(x) = \frac{1 + \dfrac{2εφ\frac{x}{2}}{1 + εφ^2\frac{x}{2}}}{5 + 4\dfrac{1 - εφ^2\frac{x}{2}}{1 + εφ^2\frac{x}{2}}} = \frac{\left(1 + εφ\frac{x}{2}\right)^2}{9 + εφ^2\frac{x}{2}} = \frac{(1 + t)^2}{9 + t^2}, \qquad \text{όπου } t = εφ\frac{x}{2}$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $0 \leqslant \frac{(1+t)^2}{9 + t^2} \leqslant \frac{10}{9}$. Πράγματι η πρώτη ανισότητα προφανώς ισχύει ενώ η δεύτερη γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{(1+t)^2}{9+t^2} \leqslant \frac{10}{9} \Leftrightarrow 9(1+t)^2 \leqslant 90 + 10t^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant t^2 - 18t + 81$$

$$\Leftrightarrow (t-9)^2 \geqslant 0, \text{ που ισχύει.}$$

12.
$$ημx + συνx - \frac{ημ2x}{\sqrt{2} + 1} = συν\frac{π}{4}συνx + ημ\frac{π}{4}ημx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ημx + συνx - (\sqrt{2} - 1)ημ2x = \frac{\sqrt{2}}{2}συνx + \frac{\sqrt{2}}{2}ημx$$

$$\Leftrightarrow 2ημx + 2συνx - 2(\sqrt{2} - 1)ημ2x = \sqrt{2}συνx + \sqrt{2}ημx$$

$$\Leftrightarrow (2-\sqrt{2})\cdot[\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x] = 2(\sqrt{2}-1)\eta\mu 2x$$

$$\Leftrightarrow (2-\sqrt{2})\sqrt{2}\,\eta\mu(x+\frac{\pi}{4}) = 2(\sqrt{2}-1)\eta\mu 2x$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2}-1)\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 2(\sqrt{2}-1)\eta\mu 2x$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \text{ ή } 2x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4},\ k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4},\ k \in Z}$$

13. i) Επειδή (ΒΓ) = (ΟΕ) = 20συνθ και (ΟΑ) = 20ημθ, το ζητούμενο εμβαδό S είναι ίσο με

$$S = (B\Gamma)^2 + (OA)(OE) = 400\sigma\upsilon\nu^2\theta + 400\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$$

ii) Λόγω της (i) έχουμε:

$$S = 200\ (1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta) + 200\eta\mu 2\theta = 200(\eta\mu 2\theta + \sigma\upsilon\nu 2\theta) + 200$$

$$= 200\cdot\sqrt{2}\eta\mu(2\theta + \frac{\pi}{4}) + 200$$

Επομένως:

$$\mathbf{S = 200\ \sqrt{2}\eta\mu(\ 2\theta + \frac{\pi}{4}) + 200}$$

iii) Επομένως το S παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του όταν:

$$\eta\mu\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$$

Η μεγαλύτερη τιμή του S είναι ίση με $\mathbf{S}_{\mu\epsilon\gamma.} = 200\sqrt{2} + 200$

$$= \mathbf{200\ (\sqrt{2}+1)}.$$

14. Από το νόμο των ημιτόνων για τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ έχουμε:

$$\frac{(BM)}{\eta\mu x} = \frac{(AM)}{\eta\mu(\omega - x)} \quad \text{και} \quad \frac{(\Gamma M)}{\eta\mu y} = \frac{(AM)}{\eta\mu(\pi-(\omega+y))}$$

οπότε με διαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{\eta\mu y}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu(\omega+y)}{\eta\mu(\omega-x)} \Leftrightarrow \eta\mu y\,(\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu x) = \eta\mu x\,(\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu y + \sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu y)$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\eta\mu y\eta\mu\omega - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu y\eta\mu\omega = 2\eta\mu x\eta\mu y\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu y\eta\mu\omega}{\eta\mu x\eta\mu y\eta\mu\omega} - \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y\eta\mu\omega}{\eta\mu x\eta\mu y\eta\mu\omega} = \frac{2\eta\mu x\eta\mu y\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu x\eta\mu y\eta\mu\omega}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\varphi x - \sigma\varphi y = 2\sigma\varphi\omega$$

15. Αν θέσουμε Γ = x τότε Β = 180°-45°-30°-x = 105°-x, οπότε

από το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΔ έχουμε:

- $\dfrac{(\Delta\Gamma)}{\eta\mu 45^\circ}=\dfrac{(\mathrm{A}\Delta)}{\eta\mu x}$, οπότε: $(\Delta\Gamma)=\dfrac{(\mathrm{A}\Delta)\cdot\eta\mu 45^\circ}{\eta\mu x}=\dfrac{(\mathrm{A}\Delta)\cdot\sqrt{2}}{2\eta\mu x}$
- $\dfrac{(\Delta \mathrm{B})}{\eta\mu\varepsilon 30^\circ}=\dfrac{(\mathrm{A}\Delta)}{\eta\mu(105^\circ-x)}$, οπότε: $(\Delta \mathrm{B})=\dfrac{(\mathrm{A}\Delta)\cdot\eta\mu 30^\circ}{\eta\mu(105^\circ-x)}=\dfrac{(\mathrm{A}\Delta)}{2\eta\mu(105^\circ-x)}$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και επειδή $\dfrac{(\Delta\Gamma)}{(\Delta \mathrm{B})}=\sqrt{3}$ βρίσκουμε ότι:

$$\frac{(\Delta\Gamma)}{(\Delta \mathrm{B})}=\frac{\sqrt{2}\eta\mu(105^\circ-x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}\eta\mu(105^\circ-x)}{\eta\mu x}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\eta\mu x=\sqrt{2}(\eta\mu 105^\circ\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 105^\circ\eta\mu x)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\eta\mu x=\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu 15^\circ\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 15^\circ\eta\mu x)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\eta\mu x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\sigma\upsilon\nu x+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\eta\mu x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\eta\mu x=(\sqrt{3}+1)\sigma\upsilon\nu x+(\sqrt{3}-1)\eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{3}+1)\eta\mu x=(\sqrt{3}+1)\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=45^\circ\qquad[\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 0^\circ<x<180^\circ]$$

Επομένως **Γ = 45°** και **Β = 60°**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 4.1 Πολυώνυμα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Οι παραστάσεις $-x^3+1$ και $-x^3+3\alpha^2x-3\alpha x^2+\alpha^3$ είναι πολυώνυμα του x, ενώ οι παραστάσεις $x+\frac{1}{x}$ και $x^4-2x^{1/3}+4x-1$ δεν είναι πολυώνυμα του x.

2. i) $P(x)+Q(x)=x^2-5x+2+x^3+3x+1$
$=x^3+x^2-2x+3$

ii) $2P(x)-3Q(x)=2(x^2-5x+2)-3(x^3+3x+1)$
$=2x^2-10x+4-3x^3-9x-3$
$=-3x^3+2x^2-19x+1$

iii) $P(x)\cdot Q(x)=(x^2-5x+2)(x^3+3x+1)$
$=x^5-5x^4+2x^3+3x^3-15x^2+6x+x^2-5x+2$
$=x^5-5x^4+5x^3-14x^2+x+2$

iv) $[P(x)]^2=(x^2-5x+2)^2$
$=x^4+25x^2+4-10x^3+4x^2-20x$
$=x^4-10x^3+29x^2-20x+4.$

3. Για να είναι το P(x) το μηδενικό πολυώνυμο αρκεί

$$4\mu^3-\mu=0 \quad \text{και} \quad \mu^2-\frac{1}{4}=0 \quad \text{και} \quad -2\mu+1=0$$

Η κοινή ρίζα των εξισώσεων αυτών είναι $\mu=\frac{1}{2}$. Επομένως το P(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο αν $\mu=\frac{1}{2}$.

4. Από τον ορισμό της ισότητας δύο πολυωνύμων αρκεί

$$\alpha^2-3\alpha=-2 \quad \text{και} \quad 1=\alpha^2 \quad \text{και} \quad \alpha^3-1=0 \text{ και } \alpha=1 \text{ ή}$$

$$\alpha^2-3\alpha+2=0 \text{ και } \alpha^2-1=0 \text{ και } \alpha^3-1=0 \text{ και } \alpha=1.$$

Η κοινή ρίζα αυτών είναι $\alpha=1$, που είναι η ζητούμενη τιμή του α.

5. i) Έχουμε

● $P(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2+2(-1)+7=-2-3-2+7=0$, οπότε το -1 είναι ρίζα του P(x).

● $P(1)=2\cdot1^3-3\cdot1^2+2\cdot1+7=8$, οπότε το 1 δεν είναι ρίζα του P(x).

ii) Ομοίως έχουμε

● $Q(-1)=-(-1)^4+1=-1+1=0$, οπότε το -1 είναι ρίζα του Q(x).

● $Q(1)=-1^4+1=-1+1=0$, οπότε το 1 είναι ρίζα του Q(x).

● $Q(3)=-3^4+1=-80\neq0$, οπότε το 3 δεν είναι ρίζα του Q(x).

6. Για να είναι το 2 ρίζα του P(x) αρκεί

$$\begin{aligned} P(2)=0 &\Leftrightarrow 2^3-k\cdot2^2+5\cdot2+k=0 \\ &\Leftrightarrow -3k+18=0 \\ &\Leftrightarrow 3k=18 \\ &\Leftrightarrow k=6 \end{aligned}$$

7. Έχουμε

$$\begin{aligned} P(-1)=1 &\Leftrightarrow 5(-1)^2+3\alpha(-1)+\alpha^2-2=1 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0 \\ &\Leftrightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=2. \end{aligned}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $f(x)=\alpha x(x+1)+\beta x+\gamma=\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\gamma$

Για να παίρνει το $3x^2-7x+5$ τη μορφή $\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\gamma$ αρκεί τα δύο αυτά πολυώνυμα να είναι ίσα. Αυτό σημαίνει ότι

$$\alpha=3, \quad \alpha+\beta=-7 \text{ και } \gamma=5, \text{ οπότε}$$
$$\alpha=3, \quad \beta=-10 \text{ και } \gamma=5$$

2. Το -2 είναι ρίζα του $P(x)$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} P(-2)=0 &\Leftrightarrow 3(-2)^3+\alpha(-2)^2+\beta(-2)-6=0 \\ &\Leftrightarrow -24+4\alpha-2\beta-6=0 \\ &\Leftrightarrow 4\alpha-2\beta=30 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha-\beta=15 \qquad (1) \end{aligned}$$

Το 3 είναι ρίζα του $P(x)$ μόνο αν

$$\begin{aligned} P(3)=0 &\Leftrightarrow 3\cdot 3^3+\alpha\cdot 3^2+\beta\cdot 3-6=0 \\ &\Leftrightarrow 81+9\alpha+3\beta-6=0 \\ &\Leftrightarrow 27+3\alpha+\beta-2=0 \\ &\Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-25 \qquad (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha=-2, \quad \beta=-19$

3. Το 1 είναι ρίζα του $P(x)$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} P(1)=0 &\Leftrightarrow 2+\lambda+\mu+6=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda+\mu=-8 \qquad (1) \end{aligned}$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} P(-2)=-12 &\Leftrightarrow 2(-2)^3+\lambda(-2)^2+\mu(-2)+6=-12 \\ &\Leftrightarrow -16+4\lambda-2\mu+6=-12 \\ &\Leftrightarrow 4\lambda-2\mu=-2 \\ &\Leftrightarrow 2\lambda-\mu=-1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) παίρνουμε $\lambda=-3$ και $\mu=-5$.

4. Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται

$$\begin{aligned} P(x) &= \lambda(9\lambda^2-4)x^2+(9\lambda^2-4)x-(3\lambda-2) \\ &= \lambda(3\lambda-2)(3\lambda+2)x^2+(3\lambda-2)(3\lambda+2)x-(3\lambda-2) \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq\frac{2}{3}$ και $\lambda\neq-\frac{2}{3}$, τότε ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι 3.

ii) Αν $\lambda=0$, τότε $P(x)=-4x+2$ και ο βαθμός του πολυωνύμου είναι 1.

iii) Αν $\lambda = \frac{2}{3}$, τότε $P(x) = 0$, είναι δηλαδή το μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό.

iv) Αν $\lambda = -\frac{2}{3}$, τότε $P(x) = 4$, είναι δηλαδή ένα σταθερό πολυώνυμο και επομένως έχει βαθμό μηδέν.

5. Είναι φανερό ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι 2.
Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Τότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& (2x+1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2\alpha x^3 + 2\beta x^2 + 2\gamma x + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2\alpha x^3 + (2\beta + \alpha)x^2 + (2\gamma + \beta)x + \gamma = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2\alpha = 2, \quad 2\beta + \alpha = -9, \quad 2\gamma + \beta = -3 \quad \text{και} \quad \gamma = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \alpha = 1, \quad \beta = -5, \quad \gamma = 1
\end{aligned}
$$

Είναι επομένως $P(x) = x^2 - 5x + 1$.

§ 4.2 Διαίρεση Πολυωνύμων

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

i)

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^3 & +6x^2 - 17x & +20 & x+3 \\ \cline{4-4}
-3x^3 & -9x^2 & & 3x^2 - 3x - 8 \\ \cline{1-3}
 & -3x^2 - 17x & +20 & \\
 & +3x^2 + 9x & & \\ \cline{2-3}
 & -8x & +20 & \\
 & 8x & +24 & \\ \cline{2-3}
 & & 44 &
\end{array}
$$

Επομένως $3x^3 + 6x^2 - 17x + 20 = (x+3)(3x^2 - 3x - 8) + 44$

ii)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & & & -81 & x-3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +3x^3 & & & & x^3 + 3x^2 + 9x + 27 \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & & & -81 & \\
 & -3x^3 & +9x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & 9x^2 & & -81 & \\
 & & -9x^2 & +27x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 27x & -81 & \\
 & & & -27x & +81 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Επομένως $x^4 - 81 = (x-3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$.

iii)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
24x^5 & +20x^3 - 16x^2 & & -15 & 6x^2+5 \\
\cline{5-5}
-24x^5 & -20x^3 & & & 4x^3 - \frac{8}{3} \\
\cline{1-4}
 & -16x^2 & & -15 & \\
 & 16x^2 & & +5\cdot\frac{8}{3} & \\
\cline{2-4}
 & & & -\frac{5}{3} &
\end{array}
$$

Επομένως $24x^5 + 20x^3 - 16x^2 - 15 = (6x^2+5)\left(4x^3 - \frac{8}{3}\right) - \frac{5}{3}$

iv)

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2 & x^2 + 2x - 3 \\
\cline{2-2}
-2x^4 - 4x^3 + 6x^2 & 2x^2 + 1 \\
\cline{1-1}
x^2 + 3x - 2 & \\
-x^2 - 2x + 3 & \\
\cline{1-1}
x + 1 &
\end{array}
$$

Επομένως $2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = (x^2 + 2x - 3)(2x^2+1) + x + 1$

v) Είναι $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ οπότε

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x & x + 3 \\
\cline{1-1}
3x^3 - 3x^2 + x & \\
-3x^3 + 9x^2 - 9x + 3 & \\
\cline{1-1}
6x^2 - 8x + 3 &
\end{array}
$$

Επομένως $x^4 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x+3) + 6x^2 - 8x + 3$
$= (x-1)^3(x+3) + 6x^2 - 8x + 3$

vi)

$$
\begin{array}{rr|l}
x^5 & +7 & x^3 - 1 \\
\cline{3-3}
-x^5 + x^2 & & x^2 \\
\cline{1-2}
x^2 & +7 &
\end{array}
$$

Επομένως $x^5 + 7 = (x^3 - 1)x^2 + x^2 + 7$

2. Έστω $P(x) = 18x^{80} - 6x^{50} + 4x^{20} - 2$. Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\upsilon = P(-1) = 18 - 6 + 4 - 2 = 14$

3. Το $x-1$ είναι παράγοντας του $g(x)$ αν και μόνο αν το 1 είναι ρίζα του $g(x)$, δηλαδή μόνο αν

$$
\begin{aligned}
g(1) = 0 &\Leftrightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad k = 1 \quad ή \quad k = -4
\end{aligned}
$$

4. **i)** Με το σχήμα Horner έχουμε

−1	0	75	−250	ρ = −10
	10	−100	250	
−1	10	−25	0	

Επομένως το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = -x^2 + 10x - 25$ και $\upsilon = 0$ αντιστοίχως.

ii) Ομοίως έχουμε

1	0	0	512	ρ = −8
	−8	64	−512	
1	−8	64	0	

Επομένως το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = x^2 - 8x + 64$ και $\upsilon = 0$ αντιστοίχως.

iii) Ομοίως έχουμε

1	0	0	0	0	1	ρ = 1
	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	2	

Επομένως το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ και $\upsilon = 2$ αντιστοίχως.

iv) Ομοίως έχουμε

−3	0	0	0	0	ρ = 2
	−6	−12	−24	−48	
−3	−6	−12	−24	−48	

Επομένως το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = -3x^3 - 6x^2 - 12x - 24$ και $\upsilon = -48$ αντιστοίχως.

v) Ομοίως έχουμε

4	16	−23	−15	ρ = −1/2
	−2	−7	15	
4	14	−30	0	

Επομένως το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = 4x^2 + 14x - 30$ και $\upsilon = 0$ αντιστοίχως.

5. Το σχήμα του Horner για το $P(x)$ και για $\rho = -11$ δίνει:

−2	−2	−1	2409	ρ = −11
	22	−220	2431	
−2	20	−221	4840	

Επομένως $P(-11) = 4840$.

6. **i)** Για $\rho = -3$ έχουμε

1	0	−25	0	144	ρ = −3
	−3	9	48		
1	−3	−16	48	0	

Δηλαδή $P(-3) = 0$. Επομένως το $x + 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii) Για $\rho = \frac{1}{4}$ έχουμε

16	−8	9	14	−4	ρ = 1/4
	4	−1	2	4	
16	−4	8	16	0	

Δηλαδή $P\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, επομένως το $x - \frac{1}{4}$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

iii) Για $\rho = 1 + \sqrt{3}$ έχουμε

1	-3	0	2	$\rho=1+\sqrt{3}$
	$1+\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}$	-2	
1	$-2+\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}$	0	

Δηλαδή $P(1+\sqrt{3})=0$, επομένως το $x-1-\sqrt{3}$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

7. Θεωρούμε τα $x^{\nu}-y^{\nu}$ και $x+y$ ως πολυώνυμα του x. Αν $P(x)=x^{\nu}-y^{\nu}$, τότε για $\rho=-y$ παίρνουμε: $P(\rho)=P(-y)=(-y)^{\nu}-y^{\nu}=y^{\nu}-y^{\nu}=0$, αφού ν άρτιος. Επομένως το $x-\rho=x+y$ είναι παράγοντας του $P(x)=x^{\nu}-y^{\nu}$.

8. i) Έχουμε $P(\rho)=4\rho^4+7\rho^2+12>0$, για κάθε $\rho\in\mathbb{R}$. Επομένως $P(\rho)\neq 0$ για κάθε $\rho\in\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το $P(x)$ δεν έχει πραγματική ρίζα ή αλλιώς το $P(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

ii) Για κάθε $\rho\in\mathbb{R}$ έχουμε $Q(\rho)=-5\rho^6-3\rho^2-4<0$. Επομένως $Q(\rho)\neq 0$ για κάθε $\rho\in\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το $Q(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

9. Έστω $P(x)=x^{\nu}+1$, τότε $P(-1)=(-1)^{\nu}+1=-1+1=0$ αφού ο ν είναι περιττός φυσικός. Αυτό σημαίνει ότι όταν το ν είναι περιττός, τότε το $x+1$ είναι παράγοντας του $x^{\nu}+1$.
Το σχήμα Horner με διαιρετέος το $x^{\nu}+1$ και διαιρέτη το $x+1$ δίνει:

1	0	0	0	...	0	1	$\rho=-1$
	-1	1	-1	...	1	-1	
1	-1	1	-1	...	1	0	

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης $(x^{\nu}+1):(x+1)$ είναι το $\pi(x)=x^{\nu-1}-x^{\nu-2}+x^{\nu-3}-\ldots+1$ ενώ το υπόλοιπο είναι $\upsilon=0$.
Τέλος η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται

$$x^{\nu}+1=(x+1)(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}+x^{\nu-3}-\ldots+1)$$

10. iii) Θεωρούμε διαιρετέο και διαιρέτη ως πολυώνυμα του x και κάνου με τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-2\alpha x-8\alpha^2 & x-2\alpha \\ \cline{2-2} \underline{-3x^2+6\alpha x} & 3x+4\alpha \\ 4\alpha x-8\alpha^2 & \\ \underline{-4\alpha x+8\alpha^2} & \\ 0 & \end{array}$$

ii) Θεωρούμε διαιρετέο και διαιρέτη ως πολυώνυμα του x, και κάνουμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} x^3+\alpha x^2-\alpha^2x-\alpha^3 & x+\alpha \\ \cline{2-2} \underline{-x^3-\alpha x^2} & x^2-\alpha^2 \\ -\alpha^2x-\alpha^3 & \\ \underline{\alpha^2x+\alpha^3} & \\ 0 & \end{array}$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν το ν είναι παράγοντας του μ, δηλαδή $\mu=\rho\nu$, $\rho\in\mathbb{N}$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} x^{\mu}-\alpha^{\mu} &= x^{\rho\nu}-\alpha^{\rho\nu}=(x^{\nu})^{\rho}-(\alpha^{\nu})^{\rho} \\ &=(x^{\nu}-\alpha^{\nu})\left[(x^{\nu})^{\rho-1}+(x^{\nu})^{\rho-2}\alpha^{\nu}+\ldots+(\alpha^{\nu})^{\rho-1}\right] \\ &=(x^{\nu}-\alpha^{\nu})(x^{\nu(\rho-1)}+x^{\nu(\rho-2)}\alpha^{\nu}+\ldots+\alpha^{\nu(\rho-1)}). \end{aligned}$$

Επομένως το $x^{\mu}-\alpha^{\mu}$ διαιρείται με το $x^{\nu}-\alpha^{\nu}$.

2. **i)** Έστω $\pi(x)$ το πηλίκο και $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x):(\alpha x+\beta).$$

Τότε έχουμε

$$P(x)=(\alpha x+\beta)\pi(x)+\upsilon(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $\alpha x+\beta$ είναι 1ου βαθμού το υπόλοιπο θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο. Έστω $\upsilon(x)=\upsilon$. Τότε έχουμε:

$$P(x)=(\alpha x+\beta)\pi(x)+\upsilon$$

Για $x=-\frac{\beta}{\alpha}$ παίρνουμε

$$P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\left(-\alpha\frac{\beta}{\alpha}+\beta\right)\pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\upsilon \Leftrightarrow \upsilon=P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ii) Το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta$ διαιρείται με το $\alpha x+\beta$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \upsilon=P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0 &\Leftrightarrow \alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3+\beta=0. \\ &\Leftrightarrow -\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\beta=0 \\ &\Leftrightarrow -\beta^3+\alpha^2\beta=0 \\ &\Leftrightarrow \beta(\alpha^2-\beta^2)=0 \\ &\Leftrightarrow \beta=0 \text{ ή } \alpha^2=\beta^2 \\ &\Leftrightarrow \beta=0 \text{ ή } \alpha=\beta \text{ ή } \alpha=-\beta \end{aligned}$$

3. **Για το** $P(x)$ και για $\rho=1$ έχουμε.

2	−6	5	−3	2	ρ=1
	2	−4	1	−2	
2	−4	1	−2	0	

οπότε $p(x)=(x-1)(2x^3-4x^2+x-2)$.
Για το $\pi(x)=2x^3-4x^2+x-2$ και για $\rho=2$ έχουμε

2	−4	1	−2	ρ=2
	4	0	2	
2	0	1	0	

οπότε $\pi(x)=(x-2)(2x^2+1)$. Έτσι έχουμε $P(x)=(x-1)(x-2)(2x^2+1)$. Αυτό σημαίνει ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $2x^2+1$.

4. Έχουμε $2x^3+3x^2+x=x(2x^2+3x+1)=2x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Για το πολυώνυμο $P(x)$ είναι:

- $P(0)=(0+1)^{2\nu}-0^{2\nu}-2\cdot 0-1=1-1=0$, οπότε το $x-0=x$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
- $P(-1)=(-1+1)^{2\nu}-(-1)^{2\nu}-2(-1)-1=-1+2-1=0$, οπότε το $x+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
- $P\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2\nu}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2\nu}-2\left(-\frac{1}{2}\right)-1$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}+1-1=0,$$ οπότε και το $x+\frac{1}{2}$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

5. Για να είναι το $(x-1)^2$ παράγοντας του $P(x)$ αρκεί το $(x-1)$ να είναι παράγοντας και του $P(x)$ και του πηλίκου $\pi(x)$ της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ δηλαδή αρκεί $P(1)=0$ και $\pi(1)=0$. Έχουμε λοιπόν

$$P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0 \quad \beta=-1-\alpha. \ (1)$$

Το $P(x)$ τότε γράφεται

$$\begin{aligned} P(x) &= \alpha x^{\nu+1} - (1+\alpha)x^{\nu} + 1 \\ &= \alpha x^{\nu+1} - \alpha x^{\nu} - x^{\nu} + 1 \\ &= \alpha x^{\nu}(x-1) - (x^{\nu} - 1) \\ &= \alpha x^{\nu}(x-1) - (x-1)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ldots + x + 1) \\ &= (x-1)(\alpha x^{\nu} - x^{\nu-1} - x^{\nu-2} - \ldots - x - 1) \end{aligned}$$

Έτσι είναι $\pi(x) = \alpha x^{\nu} - x^{\nu-1} - \ldots - x - 1$ και επομένως

$$\pi(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - 1 - 1 - \ldots - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \nu = 0 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = \nu}.$$

Τότε, λόγω της (1), είναι $\beta = -1 - \nu$.

§ 4.3 Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Καθεμιά από τις εξισώσεις διαδοχικά γράφεται:

i) $$5x^4 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(5x^2 - 6) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{6/5} \text{ ή } x = -\sqrt{6/5}.$$

ii) $$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0 &\Leftrightarrow x^2(x+2) - 9(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-3)(x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -3 \end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned} 3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2 &\Leftrightarrow 3x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 5x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^3(x^2 - 1) + 5x^2(x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1)(3x + 5) = 0 \end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (διπλή) ή } x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = -\frac{5}{3}$$

iv) $$\begin{aligned} x^6 - 64 = 0 &\Leftrightarrow x^6 - 2^6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^3 - 2^3)(x^3 + 2^3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4)(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2 \end{aligned}$$

αφού τα τριώνυμα $x^2 + 2x + 4$ και $x^2 - 2x + 4$ δεν έχουν ρίζες.

v) $$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 2 = 0 &\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 1 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1, \end{aligned}$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + 2x + 2$ δεν έχει ρίζες.

vi) $$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 = 0 &\Leftrightarrow x^3 - x - 6x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 6(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) - 6(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -3. \end{aligned}$$

vii) $(x+1)^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^3=-1 \Leftrightarrow x+1=-1 \Leftrightarrow x=-2$

viii) $7(3x+2)^2(1-x)^2-(3x+2)(1-x)^3=0$

$\Leftrightarrow (3x+2)(1-x)^2\left[7(3x+2)-(1-x)\right]=0$

$\Leftrightarrow (3x+2)(x-1)^2(22x+13)=0$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$ ή $x=1$ ή $x=-\dfrac{13}{22}$.

ix) $x^3+8=7(x^2+5x+6)+9x^2-36$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)=7(x+2)(x+3)+9(x-2)(x+2)$

$\Leftrightarrow (x+2)\left[x^2-2x+4-7x-21-9x+18\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-18x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ ή $x=9+4\sqrt{5}$ ή $x=9-4\sqrt{5}$.

x) $x^4-3x^3+6x-4=0 \Leftrightarrow x^4-2^2-3x(x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+2)-3x(x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2)(x^2-3x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-1)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ή $x=-\sqrt{2}$ ή $x=1$ ή $x=2$

2. **i)** Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες ± 1, ± 2 του σταθερού όρου 2. Με το σχήμα Horner για $\rho=1$ και $\rho=-1$ βρίσκουμε $P(1)=1\neq 0$ και $P(-1)=-3\neq 0$, οπότε οι 1 και -1 δεν είναι ρίζες της εξίσωσης, ενώ για $\rho=2$ έχουμε:

1	−3	1	2	ρ = 2
	2	−2	−2	
1	−1	−1	0	

Είναι δηλαδή $P(2)=0$, οπότε το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης.
Τέλος για $\rho=-2$ βρίσκουμε $P(-2)=20\neq 0$, οπότε το -2 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.

Επομένως η μόνη ακέραια ρίζα της εξίσωσης είναι το 2.

ii) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι ± 1, ± 2, ± 4.
Με το σχήμα Horner για $\rho=1$ έχουμε

3	8	−15	4	ρ=1
	3	11	−4	
3	11	−4	0	

Δηλαδή το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης. Επομένως η εξίσωση γράφεται:
$(x-1)(3x^2+11x-4)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $3x^2+11x-4=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-4$ ή $x=\frac{1}{3}$

Επομένως οι ακέραιες ρίζες είναι οι 1 και −4.

iii) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Με το σχήμα του Horner βρίσκουμε ότι οι ±1, 2 δεν είναι ρίζες, ενώ για $\rho=-2$ το σχήμα του Horner δίνει:

1	0	−10	−12	ρ=−2
	−2	4	12	
1	−2	−6	0	

Δηλαδή το −2 είναι ρίζα της εξίσωσης. Επομένως η εξίσωση γράφεται:
$(x+2)\cdot(x^2-2x-6)=0 \Leftrightarrow x+2=0$ ή $x^2-2x-6=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ ή $x=1-\sqrt{7}$ ή $x=1+\sqrt{7}$.

Επομένως η μόνη ακέραια ρίζα είναι το −2.

iv) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ±1, ±2, ±3, ±6. Επειδή όμως οι συντελεστές της εξίσωσης είναι όλοι θετικοί, οι θετικές ρίζες αποκλείονται. Για το λόγο αυτό δοκιμάζουμε μόνο για αρνητικές ρίζες. Το σχήμα Horner για $\rho=-1$ δίνει:

1	2	7	6	ρ=−1
	−1	−1	−6	
1	1	6	0	

Δηλαδή το −1 είναι ρίζα της εξίσωσης. Επομένως η εξίσωση γράφεται:
$(x+1)(x^2+x+6)=0 \Leftrightarrow x+1=0$, [αφού το x^2+x+6 έχει $\Delta=-23<0$]

$\Leftrightarrow x=-1$.

Επομένως η μόνη ακέραια ρίζα της εξίσωσης είναι το -1.

3. i) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ± 1, ± 2. Αν θέσουμε $P(x)=x^4+3x-2$, θα είναι $P(1)=2\neq 0$, $P(-1)=-4\neq 0$, $P(2)=20\neq 0$ και $P(-2)=8\neq 0$. Επομένως η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες.

ii) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι: ± 1, ± 5. Αν θέσουμε $P(x)=2x^4-3x^3+6x^2-24x+5$ και υπολογίσουμε τα $P(1)$, $P(-1)$, $P(5)$, $P(-5)$, βρίσκουμε ότι κανένα από αυτά δεν είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες.

4. i) Έχουμε:

- $2-3x\geq 0 \Leftrightarrow 2\geq 3x \Leftrightarrow 3x\leq 2 \Leftrightarrow x\leq \frac{2}{3}$.
- $x^2-x-2\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 2$.
- $x^2-x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ (αφού $\Delta=1-4=-3<0$).

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$2-3x$		+		+	0	−		−	
x^2-x-2		+	0	−		−	0	+	
x^2-x+1		+		+		+		+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

ii) Έχουμε:

- $-x^2+4\geq 0 \Leftrightarrow x^2-4\leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 2$.
- $x^2-3x+2\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$ ή $x\geq 2$.
- $x^2+x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ (αφού $\Delta=-3<0$).

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$-x^2+4$		−	0	+		+	0	−	
x^2-3x+2		+		+	0	−	0	+	
x^2+x+1		+		+		+		+	
Q(x)		−	0	+	0	−	0	−	

5. ii) Έστω $P(x)=(x-1)(x^2+2)(x^2-9)$. Έχουμε:

- $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.
- $x\ +2>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.
- $x^2-9\geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -3$ ή $x\geq 3$.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2		$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $(x-1)(x^2+2)(x^2-9)>0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1) \cup (3, +\infty)$.

6. i) Έχουμε

$$\begin{aligned} x^3+2x^2+3x+6>0 &\Leftrightarrow x^2(x+2)+3(x+2)>0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x^2+3)>0 \\ &\Leftrightarrow x+2>0, \text{ αφού } x^2+3>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow x>-2. \end{aligned}$$

ii) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου $P(x)=x^4-6x^3+22x^2-30x+13$ είναι ±1, ±13. Με το σχήμα Horner για $\rho=1$ έχουμε

1	−6	22	−30	13	ρ=1
	1	−5	17	−13	
1	−5	17	−13	0	

οπότε $P(x)=(x-1)(x^3-5x^2+17x-13)$.

Ομοίως για το πολυώνυμο $\pi(x)=x^3-5x^2+17x-13$ και για $\rho=1$ έχουμε:

1	−5	17	−13	ρ=1
	1	−4	13	
1	−4	13	0	

οπότε $\pi(x)=(x-1)(x^2-4x+13)$ και η ανίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} (x-1)^2(x^2-4x+13)\leqslant 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2\leqslant 0, \qquad [\text{αφού } x^2-4x+13>0] \\ &\Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση έχει μοναδική λύση την $x=1$.

iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} x^3-3x+2<0 &\Leftrightarrow x^3-x-2x+2<0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2-1)-2(x-1)<0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)[x(x+1)-2]<0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)<0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)<0 \\ &\Leftrightarrow x+2<0, \quad [\text{αφού } (x-1)^2>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}, \text{ με } x\neq 1] \\ &\Leftrightarrow x<-2. \end{aligned}$$

iv) Αν εργαστούμε με το σχήμα του Horner για $\rho=-1$ βρίσκουμε:

1	−1	1	−3	−6	ρ = −1
	−1	2	−3	6	
1	−2	3	−6	0	

οπότε η ανίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} &(x+1)(x^3-2x^2+3x-6)\geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ &(x+1)[x^2(x-2)+3(x-2)]\geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ &(x+1)(x-2)(x^2+3)\geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ &(x+1)(x-2)\geqslant 0, \qquad [\text{αφού } x^2+3>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}]. \\ \Leftrightarrow\ &x\leqslant -1 \text{ ή } x\geqslant 2. \end{aligned}$$

7. i) Τα σημεία τομής έχουν ως τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης

$$3x^3-3x^2-5x-2=0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι ± 1, ± 2. Με το σχήμα Horner βρίσκουμε ότι: $f(1)\neq 0$, $f(-1)\neq 0$, ενώ για $\rho=2$ έχουμε

3	−3	−5	−2	ρ = 2
	6	6	2	
3	3	1	0	

οπότε $f(x)=(x-2)(3x^2+3x+1)$. Το τριώνυμο όμως $3x^2+3x+1$ δεν έχει ρίζες οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $(2,\ 0)$.

ii) Όπως και στην περίπτωση **i)** αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $4x^3-3x-1=0$. Αυτή διαδοχικά γράφεται:

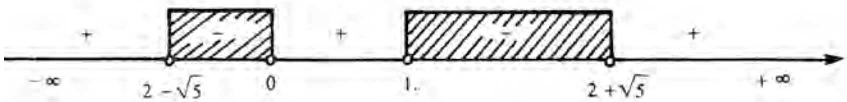
$$\begin{aligned} 3x^3-3x+x^3-1=0 &\Leftrightarrow 3x(x^2-1)+(x-1)(x^2+x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)[3x^2+3x+x^2+x+1]=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(4x^2+4x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(2x+1)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \ \text{ ή } \ x=-\frac{1}{2} \ (\text{διπλή}) \end{aligned}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της g τέμνει τον x'x στα σημεία (1,0) και εφάπτεται αυτού στο σημείο $(-\frac{1}{2}, 0)$

8. Αρκεί να βρούμε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$\begin{aligned} x^4-5x^3+3x^2+x<0 &\Leftrightarrow x(x^3-5x^2+3x+1)<0 \\ &\Leftrightarrow x(x^3-x^2-3x^2+3x-x^2+1)<0 \\ &\Leftrightarrow x\left[x^2(x-1)-3x(x-1)-(x-1)(x+1)\right]<0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)(x^2-4x-1)<0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})<0 \end{aligned}$$

Από την τελευταία βρίσκουμε το σχήμα:



Επομένως οι λύσεις είναι όλα τα x, με $2-\sqrt{5}<x<0$ ή $1<x<2+\sqrt{5}$.

9. i) Αν θέσουμε $x^4=y$ η εξίσωση γίνεται $y^2-15y-16=0$ και έχει ρίζες $y_1=16$ και $y_2=-1$.

Επομένως:

- Για $y=16$ έχουμε $x^4=16 \Leftrightarrow x=\pm 2$
- Για $y=-1$ έχουμε $x^4=-1$, που είναι αδύνατη.

ii) Αν θέσουμε $(x-1)^3=y$ η εξίσωση γίνεται $y^2-9y+8=0$ και έχει ρίζες $y_1=1$ και $y_2=8$.

Επομένως:

- Για $y=1$ έχουμε $(x-1)^3=1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$
- Για $y=8$ έχουμε $(x-1)^3=8 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$

iii) Αν για $x\neq -1$ θέσουμε $\frac{x}{x+1}=y$ η εξίσωση γίνεται $6y^2+5y-6=0$ και έχει ρίζες $y_1=-\frac{3}{2}$ και $y_2=\frac{2}{3}$. Επομένως η αρχική εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{x+1}=-\frac{3}{2} \quad ή \quad \frac{x}{x+1}=\frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow\ & 2x=-3x-3 \quad ή \quad 3x=2x+2 \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{-3}{5} \quad ή \quad x=2 \end{aligned}$$

10. Έστω $f(x)=x^3+5x-3$ Τότε $\begin{cases} f(0)=-3<0 \\ f(1)=3>0 \end{cases}$

Άρα η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1)

Υπολογίζουμε τις τιμές $f(0,1)$, $f(0,2),\ldots,f(0,9)$ και βρίσκουμε:

$$\begin{cases} f(0,5) = -0,375 < 0 \\ f(0,6) = 0,216 > 0 \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση έχει μία ρίζα στο διάστημα $(0,5,\ 0,6)$

Ομοίως τις τιμές $f(0,51)$, $f(0,52)$, ... $f(0,59)$ και βρίσκουμε:

$$\begin{cases} f(0,56) \simeq -0,03 < 0 \\ f(0,57) \simeq 0,03 > 0 \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση έχει μια ρίζα στο διάστημα $(0,56,\ 0,57)$. Είναι δηλαδή $0,56 < \rho < 0,57$ και άρα $\rho \simeq 0,6$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** Αν πολλαπλασιάσουμε με 10 βρίσκουμε την ισοδύναμη εξίσωση $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$ η οποία έχει ακέραιους συντελεστές. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ± 1, ± 2, ± 4, ± 8. Με το σχήμα Horner έχουμε:

1	5	2	−8	ρ = 1
	1	6	8	
1	6	8	0	

οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$(x-1)(x^2+6x+8) = 0$$

και έχει ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -4$.

ii) Αν πολλαπλασιάσουμε με το 6 βρίσκουμε την ισοδύναμη εξίσωση $6x^3 - 5x^2 - 44x + 15 = 0$ Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι ± 1, ± 3, ± 5, ± 15.

Με την βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε ότι το 3 είναι ρίζα της εξίσωσης. Συγκεκριμένα έχουμε:

6	−5	−44	15	ρ = 3
	18	39	−15	
6	13	−5	0	

οπότε η εξίσωση γράφεται

$$(x-3)(6x^2+13x-5)=0$$

και έχει ρίζες $x_1 = 3$, $x_2 = -2{,}5$, $x_3 = \frac{1}{3}$

2. Το P(x) έχει παράγοντα το $x+1$, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} P(-1)=0 &\Leftrightarrow (-1)^4+\alpha(-1)^3+\beta(-1)^2-16(-1)-12=0 \\ &\Leftrightarrow 1-\alpha+\beta+16-12=0 \\ &\Leftrightarrow \alpha-\beta=5 \qquad (1) \end{aligned}$$

Το P(x) έχει παράγοντα το $x-2$, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} P(2)=0 &\Leftrightarrow 2^4+\alpha\cdot 2^3+\beta\cdot 2^2-16\cdot 2-12=0 \\ &\Leftrightarrow 16+8\alpha+4\beta-32-12=0 \\ &\Leftrightarrow 8\alpha+4\beta-28=0 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=7 \qquad (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε $\alpha=4$ και $\beta=-1$, οπότε $P(x)=x^4+4x^3-x^2-16x-12$

Με το σχήμα Horner για $\rho=-1$ παίρνουμε

1	4	−1	−16	−12	ρ = −1
	−1	−3	4	12	
1	3	−4	−12	0	

οπότε $P(x)=(x+1)(x^3+3x^2-4x-12)$

Ομοίως με το σχήμα Horner για το πολυώνυμο $x^3+3x^2-4x-12$ και για $\rho=2$ παίρνουμε:

1	3	−4	−12	ρ = 2
	2	10	12	
1	5	6	0	

οπότε $x^3+3x^2-4x-12=(x-2)(x^2+5x+6)$, και άρα $P(x)=(x+1)(x-2)(x^2+5x+6)$ και η εξίσωση $P(x)=0$ θα έχει ρίζες $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-2$ και $x_4=-3$.

3. Οι δυνατές ακέραιες ρίζες είναι ± 1, ± 3.
Για $x=1$ έχουμε $1-1+k+3=0 \Leftrightarrow k=-3$.
Για $x=-1$ έχουμε $-1-1-k+3=0 \Leftrightarrow k=1$
Για $x=3$ έχουμε $27-9+3k+3=0 \Leftrightarrow k=-7$
Για $x=-3$ έχουμε $-27-9-3k+3=0 \Leftrightarrow k=-11$
Επομένως οι τιμές του k είναι -3, 1, -7, -11.

4. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ± 1, ± 2.
Για $x=1$ έχουμε $1+2\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, οπότε το 1 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.
Για $x=-1$ έχουμε $(-1)^{\nu}-2\lambda-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-\frac{1}{2}, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ \lambda=-\frac{3}{2}, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$

δηλαδή $\lambda \notin \mathbf{Z}$, οπότε το -1 δεν είναι ρίζα.
Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι οι -2 και 2 δεν είναι ρίζες. Επομένως η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες.

5. Το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν και μόνο αν
$$P(1)=0 \Leftrightarrow 1-5-10+k=0 \Leftrightarrow k-14=0 \Leftrightarrow k=14.$$
Για την τιμή αυτή του k είναι: $P(x)=x^6-5x^4-10x^2+14$.
Αν θέσουμε $x^2=y$ βρίσκουμε το πολυώνυμο $Q(y)=y^3-5y^2-10y+14$ για το οποίο από το σχήμα Horner, για $\rho=1$ παίρνουμε:

1	-5	-10	14	$\rho=1$
	1	-4	-14	
1	-4	-14	0	

οπότε $Q(y)=(y-1)(y^2-4y-14)$ και άρα
$P(x)=(x^2-1)(x^4-4x^2-14)=(x-1)(x+1)(x^4-4x^2-14)$.
Επομένως:
$$\mathbf{P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^4-4x^2-14)=0}$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x^4-4x^2-14=0$$
Αν θέσουμε $x^2=\omega$ η τελευταία εξίσωση γίνεται $\omega^2-4\omega-14=0$ και έχει ρίζες $\omega_1=2+3\sqrt{2}$ και $\omega_2=2-3\sqrt{2}$.
Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική $2+3\sqrt{2}$, οπότε
$$x^2=2+3\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{2+3\sqrt{2}} \text{ ή } x=-\sqrt{2+3\sqrt{2}}.$$
Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι:
$$1,\ -1,\ -\sqrt{2+3\sqrt{2}},\ \sqrt{2+3\sqrt{2}}$$

6. Ο όγκος του κουτιού θα είναι $V=(9-2x)(5-2x)x$, οπότε έχουμε την εξίσωση $(9-2x)(5-2x)x=21$ που γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$4x^3-28x^2+45x-21=0$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ±1, ±3, ±7, ±21. Το σχήμα Horner για $\rho=1$ δίνει

4	−28	45	−21	ρ=1
	4	−24	21	
4	−24	21	0	

οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$(x-1)(4x^2-24x+21)=0$$

και έχει μοναδική ακέραια ρίζα το 1. Επομένως $x=1$ dm και οι διαστάσεις του κουτιού είναι 3, 7, 1

7. Έχουμε

$$\begin{aligned} 3t^4+2t^3-300t-200=0 &\Leftrightarrow t^3(3t+2)-100(3t+2)=0\\ &\Leftrightarrow (3t+2)(t^3-100)=0\\ &\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3} \text{ ή } t^3=100\\ &\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3} \text{ ή } t=\sqrt[3]{100}. \end{aligned}$$

Η ρίζα $-\frac{2}{3}$ δεν είναι δεκτή αφού πρέπει $t\geqslant0$. Επομένως $t=\sqrt[3]{100}$.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} 64= 4^3 &< 100 < 5^3=125\\ 97{,}3\simeq(4{,}6)^3 &< 100 < (4{,}7)^3\simeq103{,}8\\ 99{,}8\simeq(4{,}64)^3 &< 100 < (4{,}65)^3\simeq100{,}5 \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $t=\sqrt[3]{100}\simeq4{,}6$ οπότε η μέγιστη συγκέντρωση είναι:

$$C=\frac{3\cdot(4{,}6)^2+4{,}6}{100+50}=\frac{68{,}08}{150}\simeq0{,}45$$

8. Ο όγκος του διπλανού σχήματος είναι ίσος με $x^2(x+1)\text{cm}^3$. Επειδή ο όγκος αυτός είναι ίσος με 36cm^3 έχουμε:

$$\begin{aligned} x^2(x+1)=36 &\Leftrightarrow x^3+x^2-36=0\\ &\Leftrightarrow x^3-27+x^2-9=0\\ &\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+9)+(x-3)(x+3)=0\\ &\Leftrightarrow (x-3)(x^2+4x+12)=0\\ &\Leftrightarrow x-3=0, \text{ αφού το } x^2+4x+12 \text{ δεν έχει ρίζες.}\\ &\Leftrightarrow x=3\text{m}. \end{aligned}$$

9. Το παγόβουνο λιώνει τελείως όταν γίνει $V=0$. Για να βρούμε επομένως μετά πόσο χρόνο θα λιώσει, αρκει να λύσουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}\frac{500\pi}{3}(2000-100\nu+20\nu^2-\nu^3)=0 &\Leftrightarrow \nu^3-20\nu^2+100\nu-2000=0\\ &\Leftrightarrow \nu^2(\nu-20)+100(\nu-20)=0\\ &\Leftrightarrow (\nu-20)(\nu^2+100)=0\\ &\Leftrightarrow \nu=20 \text{ ημέρες.}\end{aligned}$$

10. Η μπάρα θα επανέλθει στην αρχική της θέση όταν το d γίνει μηδέν. Αρκεί λοιπόν να λύσουμε την εξίσωση

$$15t(t^3-6t-9)=0 \Leftrightarrow t=0 \text{ ή } t^3-6t-9=0$$

Η ρίζα $t=0$ αντιστοιχεί στη στιγμή της πρόσκρουσης, οπότε ο χρόνος που ζητάμε θα είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\begin{aligned}t^3-6t-9=0 &\Leftrightarrow t^3-9t+3t-9=0\\ &\Leftrightarrow t(t^2-9)+3(t-3)=0\\ &\Leftrightarrow (t-3)(t^2+3t+3)=0\\ &\Leftrightarrow t=3\text{ sec, αφού η } t^2+3t+3=0 \text{ δεν έχει ρίζες.}\end{aligned}$$

11. Πρέπει

$$y+4x\leqslant 108 \quad\text{και}\quad x^2y=11664,$$

οπότε $\quad y=\dfrac{11664}{x^2} \quad$ και $\quad \dfrac{11664}{x^2}+4x\leqslant 108.$

Η ανίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned}4x^3-108x^2+11664\leqslant 0 &\Leftrightarrow x^3-27x^2+2916\leqslant 0\\ &\Leftrightarrow x^3-18x^2-9x^2+18\cdot 162\leqslant 0\\ &\Leftrightarrow x^2(x-18)-9(x^2-324)\leqslant 0\\ &\Leftrightarrow x^2(x-18)-9(x-18)(x+18)\leqslant 0\\ &\Leftrightarrow (x-18)(x^2-9x-162)\leqslant 0\\ &\Leftrightarrow (x-18)^2(x+9)\leqslant 0\\ &\Leftrightarrow x=18 \text{ ή } x+9\leqslant 0\\ &\Leftrightarrow x=18 \text{ ή } x\leqslant -9\end{aligned}$$

Η $x\leqslant -9$ δεν ισχύει αφού x θετικό, άρα $x=18$cm, οπότε

$$y=\frac{11664}{18^2}=36\text{cm}.$$

12. i) Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της ευθείας. Επειδή τα $A(1,2)$ και $B\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ανήκουν στην ευθεία αυτή, έχουμε:

$$\begin{aligned}2=\lambda+\beta \text{ και } -\frac{1}{2}=\lambda\frac{1}{2}+\beta &\Leftrightarrow \beta+\lambda=2 \text{ και } 2\beta+\lambda=-1\\ &\Leftrightarrow \lambda=5 \text{ και } \beta=-3.\end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι $y=5x-3$.

ii) Τα σημεία τομής των δύο γραμμών, αποτελούν τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = x^3 + x^2 \\ y = 5x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 = 5x - 3 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$

Επομένως τα x των σημείων τομής επαληθεύουν την εξίσωση
$$x^3 + x^2 = 5x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0.$$

iii) Με το σχήμα Horner έχουμε:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x^2 + 2x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \ |\text{διπλή ρίζα}| \ \text{ή} \ x = -3.$$

Για $x = -3$ παίρνουμε $y = 5(-3) - 3 = -18$. Επομένως οι συντεταγμένες του Γ είναι $(-3, \ -18)$.

13. **α)** Η εξίσωση του προβλήματος είναι
$x(x+1)(x+2) = 200 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 3x^2 + 2x - 200 = 0$ $\qquad (1ml = 1cm^3)$

Έστω $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 200$.

Τότε: $\begin{cases} f(4) = -80 < 0 \\ f(5) = 10 > 0 \end{cases}$. Άρα $4 < x < 5$.

Επίσης $\begin{cases} f(4,9) \simeq -0,52 < 0 \\ f(5) \simeq 10 > 0 \end{cases}$. Άρα $4,9 < x < 5$

και $\begin{cases} f(4,90) \simeq -0,52 < 0 \\ f(4,91) \simeq 0,52 > 0 \end{cases}$. Άρα $4,90 < x < 4,91$

Επομένως $x \simeq 4,9cm = 49mm$.

β) Η εξίσωση του προβλήματος είναι

$$\pi r^2(r+10) = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 + 10r^2 = \frac{1000}{\pi} \simeq 318 \qquad (1lit = 1000cm^3)$$
$$\Leftrightarrow \quad r^3 + 10r^2 - 318 = 0$$

Έστω $f(r) = r^3 + 10r^2 - 318$.

Τότε $\begin{cases} f(4) = -94 < 0 \\ f(5) = 57 > 0 \end{cases}$ Άρα $4 < r < 5$

Επίσης $\begin{cases} f(4,6) \simeq -9,07 < 0 \\ f(4,7) \simeq 6,72 > 0 \end{cases}$. Άρα $4,6 < r < 4,7$

και $\begin{cases} f(4,65) \simeq -1,24 < 0 \\ f(4,66) \simeq 0,34 > 0 \end{cases}$. Άρα $4,65 < r < 4,66$

Επομένως $r \simeq 4,7\text{cm} = 47\text{mm}$

γ) Η εξίσωση του προβλήματος είναι

$$\frac{1}{3}(h+5)^2 h = 250 \iff (h^2 + 10h + 25)h = 750 \qquad (1\text{ml} = 1\text{cm}^3)$$

$$\iff h^3 + 10h^2 + 25h - 750 = 0$$

Έστω $f(h) = h^3 + 10h^2 + 25h - 750$

Τότε $\begin{cases} f(6) = -24 < 0 \\ f(7) = 258 > 0 \end{cases}$. Άρα $6 < h < 7$

Επίσης $\begin{cases} f(6,0) = -24 < 0 \\ f(6,1) = 1,58 > 0 \end{cases}$. Άρα $6,0 < h < 6,1$

Τέλος $\begin{cases} f(6,09) = -101 < 0 \\ f(6,10) = 1,58 > 0 \end{cases}$. Άρα $6,09 < h < 6,10$

Επομένως $h \simeq 6,1\text{cm} = 61\text{mm}$.

§ 4.4 Εξισώσεις και Ανισώσεις που Ανάγονται σε Πολυωνυμικές

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Για αυτές τις τιμές του x η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} x(3x^2-1)-2=(x-1)(x^2-3x+2) &\iff 3x^3-x-2=x^3-3x^2+2x-x^2+3x-2 \\ &\iff 2x^3+4x^2-6x=0 \\ &\iff 2x(x^2+2x-3)=0 \\ &\iff x^2+2x-3=0, \qquad [\text{αφού } x\neq 0] \\ &\iff x=-3 \ \text{ ή } \ x=1 \\ &\iff x=-3, \qquad [\text{αφού } x\neq 1.] \end{aligned}$$

ii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Για αυτές τις τιμές του x η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} x^2(x+1)-2(x-1)=4 &\iff x^3+x^2-2x-2=0 \\ &\iff x^2(x+1)-2(x+1)=0 \\ &\iff (x+1)(x^2-2)=0 \\ &\iff x=-1 \ \text{ ή } \ x=-\sqrt{2} \ \text{ ή } \ x=\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Από αυτές δεκτές είναι μόνο οι $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ αφού $x \neq -1$.

2. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} 2ημ^3x + 1 - ημ^2x + 2ημx - 2 = 0 &\Leftrightarrow 2ημ^3x - ημ^2x + 2ημx - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow ημ^2x(2ημx - 1) + 2ημx - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2ημx - 1)(ημ^2x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2ημx - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow ημx = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow ημx = ημ\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Άρα $x = 2κπ + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2kπ + \frac{5\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. i) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Για αυτά τα x έχουμε:

$$\sqrt{x^3} = -4x \Leftrightarrow x = 0 \qquad (\text{αφού } -4x \leq 0)$$

ii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Για αυτά τα x διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-2} &= 4 \\ 3x - 2 &= 16 \end{aligned}$$

(υψώνουμε στο τετράγωνο)

Αυτή έχει ρίζα το $x = 6$. Με επαλήθευση διαπιστώνουμε ότι το 6 είναι και ρίζα της αρχικής.

iii) Η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $\sqrt{5x-1}$ είναι θετικό, ενώ το -4 είναι αρνητικό.

iv) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x + 3 \geqslant 0$, δηλαδή για κάθε $x \geqslant -3$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= x + 1 \\ x + 3 &= x^2 + 2x + 1 \qquad [\text{Υψώσαμε στο τετράγωνο}] \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ x = -2 &\text{ ή } x = 1 \end{aligned}$$

Από τις ρίζες αυτές, όπως διαπιστώνουμε με δοκιμές, ρίζα της αρχικής εξίσωσης είναι μόνο η $x = 1$.

v) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x + 3 \geqslant 0$ και $10 - x \geqslant 0$, δηλαδή για κάθε $x \in [-3, 10]$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= \sqrt{10-x} + 1 \\ x + 3 &= 10 - x + 1 + 2\sqrt{10-x} \end{aligned}$$

$$2x-8=2\sqrt{10-x}$$
$$x-4=\sqrt{10-x}$$
$$x^2-7x+6=0 \qquad \text{[Υψώσαμε στο τετράγωνο]}$$
$$x=1 \text{ ή } x=6$$

Από τις ρίζες αυτές, όπως διαπιστώνουμε με δοκιμές, ρίζα της αρχικής εξίσωσης είναι μόνο η $x=6$.

vi) Η εξίσωση ορίζεται για $x\in\mathbb{R}$ με $x\geqslant 0$ και $x-20\geqslant 0$ δηλαδή, για $x\geqslant 20$.

Με αυτόν τον περιορισμό διαδοχικά έχουμε

$$(\sqrt{x-20})^2=(10-\sqrt{x})^2$$
$$x-20=100-20\sqrt{x}+x$$
$$20\sqrt{x}=120$$
$$\sqrt{x}=6$$
$$x=36.$$

Η τιμή 36 ικανοποιεί τον περιορισμό $x\geqslant 20$ και αν θέσουμε στην αρχική $x=36$, αυτή επαληθεύεται. Επομένως το 36 είναι ρίζα και της αρχικής εξίσωσης.

vii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in(0, +\infty)$. Με αυτόν τον περιορισμό διαδοχικά έχουμε

$$2x=x-8+6\sqrt{x} \qquad (1)$$
$$x+8=6\sqrt{x}$$
$$(x+8)^2=36x$$
$$x^2+16x+64=36x$$
$$x^2-20x+64=0$$
$$x=4 \text{ ή } x=16$$

Οι τιμές 4 και 16 ικανοποιούν τον περιορισμό $x>0$ και επαληθεύουν την αρχική εξίσωση. Άρα είναι ρίζες της.

viii) Η εξίσωση ορίζεται για $x\in\mathbb{R}$ με $x\geqslant 0$ και $x\geqslant -1$ δηλαδή, για $x\geqslant 0$.

Με αυτόν το περιορισμό διαδοχικά έχουμε:

$$\sqrt{1+2\sqrt{x}}=\sqrt{x+1} \qquad \text{[υψώνουμε στο τετράγωνο]}$$
$$2\sqrt{x}=x$$
$$4x=x^2$$
$$x(x-4)=0$$
$$x=0 \text{ ή } x=4$$

Οι τιμές 0 και 4 ικανοποιούν τον περιορισμό $x\geqslant 0$ και αν θέσουμε στην αρχική, την επαληθεύουν. Είναι επομένως ρίζες της.

4. i) $\frac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 2$.

ii) $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) \leq 0$, με $x \neq 3$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 3$.

iii) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2-x-2)(x^2+x-2) \leq 0$, με $x^2+x-2 \neq 0$.

Έστω $P(x) = (x^2-x-2)(x^2+x-2)$. Έχουμε:

• $x^2-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 2$.

• $x^2+x-2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 1$.

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+		+	0	−		−	0	+	
x^2+x-2		+	0	−		−	0	+		+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Άρα $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-2,-1] \cup (1,2]$.

5. i) $\frac{2x+3}{x-1} > 4 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-4x+4}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x-1} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x-7}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (2x-7)(x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{7}{2}$.

ii) $\frac{x-2}{3x+5} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{x-2}{3x+5} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2-12x-20}{3x+5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-11x-22}{3x+5} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{11x+22}{3x+5} \geq 0 \Leftrightarrow 11(x+2)(3x+5) \geq 0$, με $x \neq -\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x > -\frac{5}{3}$.

Άρα $x \in (-\infty,-2] \cup (-\frac{5}{3}, +\infty)$.

iii) $\frac{x^2-3x-10}{x-1} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-10+2x-2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-12}{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2-x-12)(x-1) \leq 0$, με $x \neq 1$.

Έστω $P(x) = (x^2-x-12)(x-1)$. Έχουμε:

• $x^2 - x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 4$.

• $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
x^2-x-12		+	0	−		−	0	+	
$x-1$		−		−	0	+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup (1, 4]$.

iv) $\dfrac{x}{3x-5} \leq \dfrac{2}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3x-5} - \dfrac{2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-1)-2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-6x+10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-7x+10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10) \leq 0, \text{ με } x \neq 1,\ x \neq \frac{5}{3}.$$

Έστω $P(x) = (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10)$. Έχουμε:

• $3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{3}$.

• $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

• $x^2 - 7x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ ή $x \geq 5$.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		2		5		$+\infty$
$3x-5$		−		−	0	+		+		+	
$x-1$		−	0	+		+		+		+	
$x^2-7x+10$		+		+		+	0	−	0	+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Άρα $\dfrac{x}{3x-5} \leq \dfrac{2}{x-1} \Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10) \leq 0$,

$x \neq 1, x \neq \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x \in (1, \dfrac{5}{3}) \cup [2, 5]$.

v) $\dfrac{x}{2x-1} \geq \dfrac{3}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2x-1} - \dfrac{3}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-6x+3}{(2x-1)(x+2)} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(2x-1)(x+2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+3)(2x-1)(x+2) \geq 0, \text{ με } x \neq -2,\ x \neq \frac{1}{2}.$$

Έστω $P(x) = (x^2-4x+3)(2x-1)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		+		+		+	0	−	0	+	
$2x-1$		−		−	0	+		+		+	
$x+2$		−	0	+		+		+		+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, 1] \cup [3, +\infty)$.

6. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ και $x \neq \frac{1}{2}$. Για αυτές τις τιμές του x γράφεται:

$$x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(2x-1)x+2x-1}{x(2x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^3+1)}{x} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3+1) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x^2-x+1) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1, \text{ ή } (x > 0 \text{ ,με } x \neq \frac{1}{2})$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** Η ανίσωση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$ με $2x+3 \geqslant 0$ και $1-3x \geqslant 0$ δηλαδή για $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$. Με αυτόν τον περιορισμό διαδοχικά έχουμε:

$$\sqrt{2x+3} < \sqrt{1-3x} \Leftrightarrow (\sqrt{2x+3})^2 < (\sqrt{1-3x})^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 < 1-3x$$

$$\Leftrightarrow 5x < -2$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-2}{5}$$

και λόγω του περιορισμού βρίσκουμε ως λύσεις της ανίσωσης τα $x \in \mathbb{R}$ με $-\frac{3}{2} \leqslant x < \frac{-2}{5}$

ii) Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \geqslant 3$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x-5<0 \Leftrightarrow x<5$, τότε η ανίσωση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $3 \leqslant x < 5$. (γιατί το 1ο μέλος της είναι θετικό).
- Αν $x-5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 5$, τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3} > x-5 \quad &\Leftrightarrow \quad x-3 \geqslant (x-5)^2\\ &\Leftrightarrow \quad x-3 > x^2-10x+25\\ &\Leftrightarrow \quad x^2-11x+28<0\\ &\Leftrightarrow \quad 4<x<7\\ &\Leftrightarrow \quad 5\leqslant x<7, \quad \text{επειδή } x\geqslant 5.\end{aligned}$$

2. **i)** Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in[0,\ +\infty)$. Αν θέσουμε $\sqrt{x}=y$ η εξίσωση γίνεται $y^2+3y-10=0$ και έχει ρίζες $y_1=2$ και $y_2=-5$.
Επειδή $y=\sqrt{x}\geqslant 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1=2$, οπότε $\sqrt{x}=2$ δηλαδή $x=4$.

Η τιμή 4 ικανοποιεί τον περιορισμό $x\geqslant 0$ και επαληθεύει την αρχική εξίσωση, άρα είναι ρίζα της.

ii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Αν θέσουμε $\sqrt[3]{x}=y$ η εξίσωση γίνεται $y^2+y-6=0$ και έχει ρίζες $y_1=2$ και $y_2=-3$. Επειδή $y=\sqrt[3]{x}\geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y=2$, οπότε $\sqrt[3]{x}=2$ δηλαδή $x=8$. Η τιμή $x=8$ ικανοποιεί τον περιορισμό $x\geq 0$ και επαληθεύει την αρχική εξίσωση, άρα είναι ρίζα της.

3. **i)** Αν θέσουμε $\quad x^2+x-2=y \quad (1) \quad$ η εξίσωση γράφεται:

$$y-2=\sqrt{y} \quad (2)$$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $y\geq 0$. Με τον περιορισμό αυτό από την εξίσωση (2) προκύπτει η εξίσωση $(y-2)^2=y$ η οποία γράφεται διαδοχικά:

$$y^2-4y+4=y \Leftrightarrow y^2-5y+4=0 \Leftrightarrow y=1 \text{ ή } y=4$$

Από τις τιμές αυτές μόνο η $y=4$ είναι ρίζα της (2). Ετσι, λόγω της (1), έχουμε:

$$x^2+x-2=4 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=-3 \text{ ή } x=+2$$

ii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $x-1\geq 0$ και $x-4\geq 0$ και $x+4\geq 0$, δηλαδή $x\geq 4$. Με τον περιορισμό αυτό από την εξίσωση αυτή προκύπτουν διαδοχικά οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4})^2 &= (\sqrt{x+4})^2\\ x-1+x-4+2\sqrt{(x-1)(x-4)} &= x+4\\ 2\sqrt{(x-1)(x-4)} &= 9-x\\ (2\sqrt{(x-1)(x-4)})^2 &= (9-x)^2\\ 4(x^2-5x+4) &= 81-18x+x^2\\ 3x^2-2x-65 &= 0\\ x=\frac{2\pm 28}{6} &= \begin{cases}5\\ -\dfrac{13}{3}\end{cases}\end{aligned}$$

Από τις τιμές αυτές του x μόνο η $x=5$ είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

4. **i)** Πρέπει $x-1\geqslant 0$ δηλαδή $x\geqslant 1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
- **Αν $\alpha<0$,** η εξίσωση είναι αδύνατη.

- **Αν $\alpha \geqslant 0$,** τότε $\sqrt{x-1} = \alpha \Leftrightarrow x-1=\alpha^2 \Leftrightarrow x=\alpha^2+1$

ii) Η εξίσωση ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $2x-\lambda<0$ δηλαδή $x<\frac{\lambda}{2}$, η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $2x-\lambda\geqslant 0$ δηλαδή $x\geqslant\frac{\lambda}{2}$, τότε:

$$\sqrt{4x^2+1} = 2x-\lambda \Leftrightarrow 4x^2+1=4x^2-4\lambda x+\lambda^2 \Leftrightarrow 4\lambda x=\lambda^2-1.$$

Η τελευταία εξίσωση,

- αν $\lambda=0$ είναι αδύνατη, ενώ
- αν $\lambda\neq 0$ έχει μία λύση $x=\frac{\lambda^2-1}{4\lambda}$. Η λύση αυτή είναι δεκτή μόνο

αν επαληθεύει τον περιορισμό $x\geqslant\frac{\lambda}{2}$, δηλαδή μόνο αν

$$\frac{\lambda^2-1}{4\lambda}\geqslant\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \frac{-(\lambda^2+1)}{4\lambda}\geqslant 0 \Leftrightarrow 4\lambda(\lambda^2+1)\leqslant 0 \Leftrightarrow \lambda<0.$$

5. Η εξίσωση γράφεται:

$$2\eta\mu^4x-3\eta\mu^3x-3(1-\eta\mu^2x)-3\eta\mu x+4=0$$

ή
$$2\eta\mu^4x-3\eta\mu^3x+3\eta\mu^2x-3\eta\mu x+1=0$$

Αν θέσουμε $\eta\mu x=y$ βρίσκουμε την πολυωνυμική εξίσωση

$$2y^4-3y^3+3y^2-3y+1=0 \qquad (1)$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της είναι ± 1. Με το σχήμα Horner για $\rho=1$ βρίσκουμε

2	−3	3	−3	1	ρ=1
	2	−1	2	−1	
2	−1	2	−1	0	

οπότε η (1) διαδοχικά γίνεται:

$$(y-1)(2y^3-y^2+2y-1)=0 \Leftrightarrow (y-1)[y^2(2y-1)+2y-1]=0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)(2y-1)(y^2+1)=0$$

και έχει ρίζες $y_1=1$ και $y_2=\frac{1}{2}$. Επομένως έχουμε $\eta\mu x=1$ ή $\eta\mu x=\frac{1}{2}$

δηλαδή $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Θεωρούμε τη διαφορά

$$\begin{aligned} P(x)-(x^2+x+1) &= x^{3\nu}+x^{3\mu+1}+x^{3\rho+2}-x^2-x-1 \\ &= x^{3\nu}-1+x^{3\mu+1}-x+x^{3\rho+2}-x^2 \\ &= (x^3)^\nu-1+x\left[(x^3)^\mu-1\right]+x^2\left[(x^3)^\rho-1\right] \\ &= (x^3-1)\pi_1(x)+x(x^3-1)\pi_2(x)+x^2(x^3-1)\pi_3(x) \\ &= (x^3-1)\cdot\pi(x), \quad \text{όπου } \pi(x) \text{ ένα πολυώνυμο του } x. \end{aligned}$$

Επομένως
$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+x+1)+(x^3-1)\cdot\pi(x) \\ &= x^2+x+1+(x-1)(x^2+x+1)\pi(x) \\ &= (x^2+x+1)\left[1+(x-1)\pi(x)\right] \\ &= (x^2+x+1)\cdot\pi_1(x) \end{aligned}$$
που σημαίνει ότι το $P(x)$ διαιρείται με το x^2+x+1.

2. **i)** Το πολυώνυμο $f(x)$ γράφεται

$$\begin{aligned} f(x) &= \nu x^{\nu+1}-\nu x^\nu-x^\nu+1 \\ &= \nu x^\nu(x-1)-(x^\nu-1) \\ &= \nu x^\nu(x-1)-(x-1)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1) \\ &= (x-1)\left[\nu x^\nu-x^{\nu-1}-x^{\nu-2}-\ldots-x-1\right] \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $P(x)=\nu x^\nu-x^{\nu-1}-x^{\nu-2}-\ldots-x-1$, τότε είναι
$f(x)=(x-1)\,P(x)$ και $P(1)=\nu-1-1-\ldots-1-1=\nu-\nu=0$,
οπότε

$$P(x)=(x-1)\pi(x), \text{ όπου } \pi(x) \text{ πολυώνυμο του } x.$$

Επομένως $f(x)=(x-1)\cdot(x-1)\cdot\pi(x)=(x-1)^2\pi(x)$, που σημαίνει ότι το $f(x)$ διαιρείται με το $(x-1)^2$.

Το πηλίκο $\pi(x)$ υπολογίζεται με το σχήμα Horner, για το πολυώνυμο $P(x)$ και για $\rho=1$, ως εξής:

ν	-1	-1	$\ldots$	-1	-1	$\rho=1$
	ν	$\nu-1$	$\ldots$	$\nu-\nu+2$	1	
ν	$\nu-1$	$\nu-2$	$\ldots$	1	0	

Έχουμε δηλαδή $\pi(x)=\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)x^{\nu-2}+\ldots+1$.

ii) Το $g(x)$ γράφεται

$$\begin{aligned} g(x) &= (\nu-2)x^\nu-\nu x^{\nu-1}+\nu x-\nu+2 \\ &= \nu x^\nu-2x^\nu-\nu x^{\nu-1}+\nu x-\nu+2 \\ &= \nu x^{\nu-1}(x-1)-2(x^\nu-1)+\nu(x-1) \\ &= \nu x^{\nu-1}(x-1)-2(x-1)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1)+\nu(x-1) \\ &= (x-1)\left[\nu x^{\nu-1}-2x^{\nu-1}-2x^{\nu-2}-\ldots-2x-2+\nu\right] \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $P(x)=\nu x^{\nu-1}-2x^{\nu-1}-2x^{\nu-2}-\ldots-2x-2+\nu$, τότε $g(x)=(x-1)P(x)$ (1) και $P(1)=\nu-2-2-\ldots-2+\nu=2\nu-2\nu=0$, οπότε

$$P(x)=(x-1)Q(x), \text{ όπου } Q(x) \text{ πολυώνυμο του } x.$$

Επομένως

$$g(x)=(x-1)^2Q(x) \qquad (2).$$

Υπολογίζουμε το Q(x) με το σχήμα Horner ως εξής:

$\nu-2$	-2	-2	...	-2	$\nu-2$	$\rho=1$
	$\nu-2$	$\nu-4$	...	$\nu-2(\nu-2)$	$-\nu+2$	
$\nu-2$	$\nu-4$	$\nu-6$	...	$\nu-2(\nu-1)$	0	

Έχουμε δηλαδή:

$$Q(x)=(\nu-2)x^{\nu-2}+(\nu-4)x^{\nu-3}+(\nu-6)x^{\nu-4}+\ldots+[\nu-2(\nu-1)]$$

Ακόμη έχουμε

$$\begin{aligned}Q(1)&=(\nu-2)+(\nu-4)+(\nu-6)+\ldots+[\nu-2(\nu-1)]\\&=\nu-2+\nu-2\cdot2+\nu-2\cdot3+\ldots+\nu-2(\nu-1)\\&=(\nu+\nu+\ldots+\nu)-2[1+2+3+\ldots+(\nu-1)]\\&=\nu(\nu-1)-2\frac{[1+(\nu-1)](\nu-1)}{2}=\nu(\nu-1)-\nu(\nu-1)=0\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $x-1$ είναι παράγοντας του Q(x), δηλαδή

$$Q(x)=(x-1)\Pi(x) \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) παίρνουμε

$$g(x)=(x-1)^3\pi(x)$$

Επομένως το g(x) διαιρείται με το $(x-1)^3$.

3. **i)** Η εξίσωση είναι αντίστροφη και το 0 δεν είναι ρίζα της, οπότε έχουμε

$$x^4+2x^3+2x+1=0 \Leftrightarrow x^2+2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad (\text{διαιρούμε με } x^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

Αν θέσουμε $x+\frac{1}{x}=y$ τότε $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ και η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}y^2-2+2y=0 &\Leftrightarrow y^2+2y-2=0\\&\Leftrightarrow y=-1-\sqrt{3} \text{ ή } y=-1+\sqrt{3}\end{aligned}$$

Έτσι είναι $x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{3}$ ή $x+\frac{1}{x}=-1+\sqrt{3}$

ή ισοδύναμα

$$x^2+(1+\sqrt{3})x+1=0 \text{ ή } x^2+(1-\sqrt{3})x+1=0$$

Είναι $\Delta_1=(1+\sqrt{3})^2-4=2\sqrt{3}$ και $\Delta_2=(1-\sqrt{3})^2-4=-2\sqrt{3}<0$ οπότε η δεύτερη εξίσωση δεν έχει ρίζες, ενώ η πρώτη έχει τις

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{3}-\sqrt[4]{12}}{2} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}}{2}$$

που είναι και οι ρίζες της αρχικής.

ii) Η εξίσωση δεν έχει ρίζα το 0, έτσι αν διαιρέσουμε με x^2 έχουμε

$$x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}-4=0$$

Αν θέσουμε $x+\frac{1}{x}=y$ τότε $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ και η εξίσωση γίνεται

$$y^2-2+y-4=0 \quad \text{ή} \quad y^2+y-6=0$$

και έχει ρίζες $y_1=-3$ και $y_2=2$.

Έτσι έχουμε $x+\frac{1}{x}=-3$ ή $x+\frac{1}{x}=2$

ή ισοδύναμα

$$x^2+3x+1=0 \quad \text{ή} \quad x^2-2x+1=0$$

Αυτές έχουν ρίζες $x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ η πρώτη και $x_3=1$ η δεύτερη. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι:

$$\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2},\ 1$$

4. i) Επειδή το $x=0$ δεν είναι ρίζα, διαιρούμε με x^2 και έχουμε:

$$x^2+x-16-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{4}{x^2}+x-\frac{2}{x}-16=0$$

Αν θέσουμε $x-\frac{2}{x}=y$ τότε $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=y^2$, οπότε

$$x^2+\frac{4}{x^2}-2x\frac{2}{x}=y^2, \text{ δηλαδή } x^2+\frac{4}{x^2}=y^2+4$$

και η εξίσωση γίνεται

$$y^2+4+y-16=0 \quad \text{ή} \quad y^2+y-12=0$$

που έχει ρίζες $y_1=-4$ και $y_2=3$

Επομένως

$$x-\frac{2}{x}=-4 \quad \text{ή} \quad x-\frac{2}{x}=3$$

$\Leftrightarrow x^2+4x-2=0$ ή $x^2-3x-2=0$

$\Leftrightarrow x=-2-\sqrt{6}$ ή $x=-2+\sqrt{6}$ ή $x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ ή $x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

ii) Αν εργασθούμε όπως στην **i)** η εξίσωση γράφεται

$$x^2+\frac{1}{x^2}+8\left(x-\frac{1}{x}\right)+13=0$$

Αν θέσουμε $x-\dfrac{1}{x}=y$ τότε $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2+2$ και η εξίσωση γίνεται

$$y^2+8y+15=0$$

που έχει ρίζες $y_1=-3$ και $y_2=-5$
Επομένως διαδοχικά έχουμε

$$x-\frac{1}{x}=-3 \text{ ή } x-\frac{1}{x}=-5$$
$$x^2+3x-1=0 \text{ ή } x^2+5x-1=0$$

Οι τελευταίες έχουν ρίζες

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\ x_2=\frac{-3+\sqrt{13}}{2} \text{ και } x_3=\frac{-5-\sqrt{29}}{2},\ x_4=\frac{-5+\sqrt{29}}{2}$$

αντιστοίχως. Αυτές όλες είναι οι ρίζες της αρχικής.

5. Αν θέσουμε $\mathbf{x^2+2x-1=y}$ η εξίσωση γίνεται
$y^2-3(y+4)+14=0$ ή $y^2-3y+2=0$
και έχει ρίζες $y_1=1$ και $y_2=2$, οπότε έχουμε
$x^2+2x-1=1$ ή $x^2+2x-1=2$
$\Leftrightarrow x^2+2x-2=0$ ή $x^2+2x-3=0$
Οι εξισώσεις αυτές έχουν ρίζες τους αριθμούς
$-1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}$ η πρώτη και $1,\ -3$ η δεύτερη.
Επομένως οι ρίζες της αρχικής είναι

$$x_1=-1-\sqrt{3},\ x_2=-1+\sqrt{3},\ x_3=1,\ x_4=-3$$

6. Από την ταυτότητα της διαίρεσης προκύπτει ότι:

$$x^5+3x^2+\alpha x+\beta=(x^2-2)\,\pi(x)+5x+8$$

Για $x=\sqrt{2}$ έχουμε

$(\sqrt{2})^5+3(\sqrt{2})^2+\alpha\sqrt{2}+\beta=0+5\sqrt{2}+8$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}+6+\alpha\sqrt{2}+\beta=5\sqrt{2}+8$

$\Leftrightarrow \alpha\sqrt{2}+\beta=\sqrt{2}+2 \qquad (1)$

Για $x=-\sqrt{2}$ έχουμε

$\alpha\sqrt{2}-\beta=\sqrt{2}-2 \qquad (2)$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$.

7. Με το σχήμα Horner παίρνουμε

1	−12	12	−12	...	12	−1	ρ=11
	11	−11	11	...	−11	11	
1	−1	1	−1	...	1	10	

επομένως $P(11) = 10$.

Αν δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το $P(13)$ με τον ίδιο τρόπο θα διαπιστώσουμε ότι οι πράξεις είναι αρκετά επίπονες. Ένας πιο σύντομος τρόπος είναι ο εξής:

Το $P(x)=x^{17}-1-12x(x^{15}-x^{14}+x^{13}-...+x-1)$

$$=x^{17}-1-12x\,\frac{x^{16}-1}{x+1}$$

$$=x^{17}-1-12\,\frac{x^{17}-x}{x+1}$$

Οπότε $P(13)=13^{17}-1-2\cdot\dfrac{13^{17}-13}{13+1}$

$$=13^{17}-1-\frac{13^{17}-13}{7}=\frac{6(13^{17}+1)}{7}$$

Με έναν υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε το 13^{17} και έτσι έχουμε το $P(13)$.

8. Ο παγετώνας τελειώνει όταν η θερμοκρασία $T = T(x)$ ανερχόμενη συνεχώς μηδενίζεται, ενώ αυτός ξαναρχίζει όταν η θερμοκρασία κατερχόμενη μηδενίζεται. Για να λύσουμε λοιπόν το πρόβλημα, αρκεί να βρούμε τα σημεία μηδενισμού της συνάρτησης $T(x)$ καθώς επίσης και τα διαστήματα μονοτονίας της.

Αν θέσουμε $T=0$ προκύπτει η εξίσωση

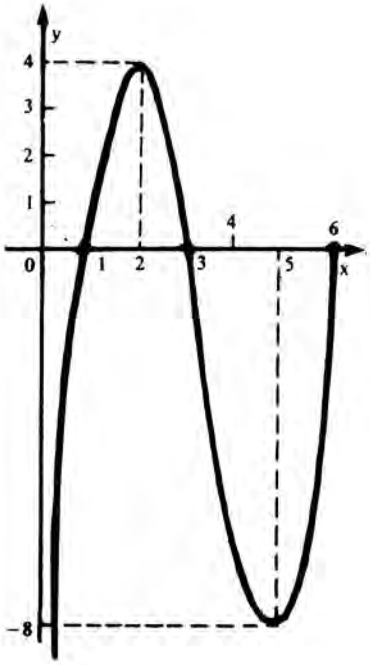
$$10x^3-100x^2+270x-180=0$$
$$\Leftrightarrow x^3-10x^2+27x-18=0$$
$$\Leftrightarrow x^3-9x^2-x^2+9x+18x-18=0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-1)-9x(x-1)+18(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-9x+18)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x-6)=0$$

Με τη βοήθεια των ριζών και ενός πίνακα τιμών βρίσκουμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης $T_1(x)=x^3-10x^2+27x-18$.

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης βρίσκουμε ότι:

α) το τέλος των παγετώνων θα έρθει μετά από 1 εκατομμύριο χρόνια.

β) Ο επόμενος παγετώνας θα αρχίσει σε 3 εκατομμύρια χρόνια και θα διαρκέσει $6-3=3$ εκατομμύρια χρόνια.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

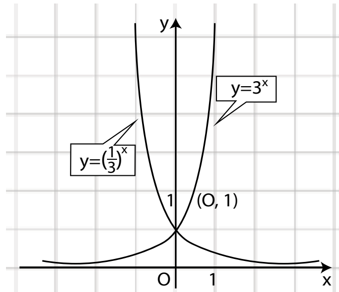
§ 5.1 Εκθετική Συνάρτηση

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) • Για τη συνάρτηση $f(x) = 3^x$, εργαζόμαστε όπως στην §4.1 για την $f(x) = 2^x$ και παίρνουμε το σχήμα.

• Είναι $f_1(x) = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$

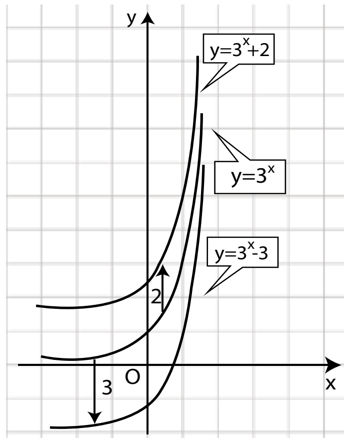
Επομένως η γραφική παράσταση της $f_1(x) = 3^{-x}$ θα είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $f(x) = 3^x$ ως προς τον y΄y. (Σχ. α).



Σχ. α

ii) • Η γραφική παράσταση της $f_2(x) = 3^x+2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = 3^x$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω (Σχ. β).

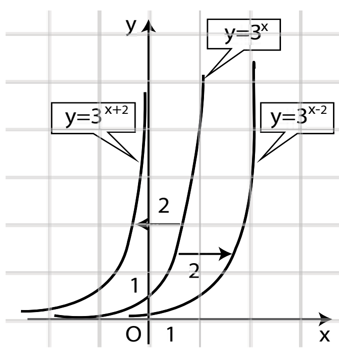
• Η γραφική παράσταση της $f_3(x) = 3^x-3$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = 3^x$ κατά 3 μονάδες προς τα κάτω (Σχ. β).



Σχ. β

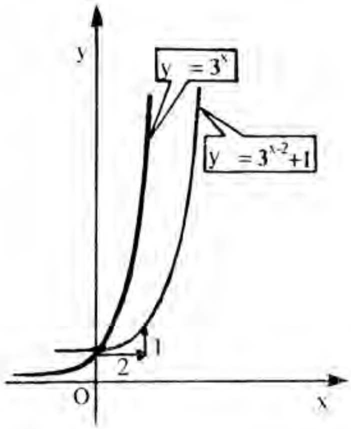
iii) • Η γραφική παράσταση της $f_4(x) = 3^{x-2}$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = 3^x$ κατα 2 μονάδες προς τα δεξιά (Σχ. γ).

• Η γραφική παράσταση της $f_5(x) = 3^{x+2}$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = 3^x$ κατα 2 μονάδες προς τα αριστερά (Σχ. γ).



Σχ. γ

iv) Η γραφική παράσταση της $f_6(x) = 3^{x-2}+1$ προκύπτει από ένα συνδυασμό μετατοπίσεων της γραφικής παράστασης της $f(x) = 3^x$, πρώτα μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και έπειτα μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (Σχ. δ).



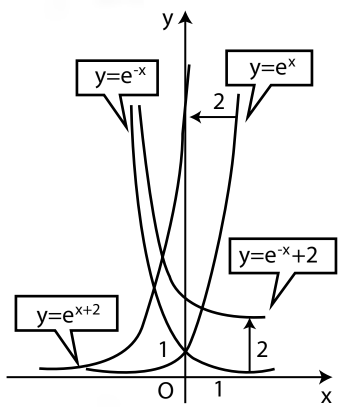
Σχ. δ

v) • Είναι ήδη γνωστή η γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$.

• Η γραφική παράσταση της $g_1(x) = e^{x+2}$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $g(x) = e^x$ κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά.

• Η γραφική παράσταση της $g_2(x) = e^{-x}$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = e^x$ ως προς τον άξονα $y'y$.

• Η γραφική παράσταση της $g_3(x)= e^x+2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $g_2(x) = e^{-x}$ κατά δύο μονάδες προς τα πάνω.



Σχ. ε

2. • Για κάθε εξίσωση διαδοχικά έχουμε:

i) $2^x=64 \Leftrightarrow 2^x=2^6 \Leftrightarrow \mathbf{x=6}$

ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \mathbf{x=3}$

iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^{-2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow \mathbf{x=-2}$

iv) $3^{-x}=\frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^4 \Leftrightarrow \mathbf{x=4}$

v) $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{64}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \Leftrightarrow \mathbf{x=-3}$

vi) $27^{4x}=9^{x+1} \Leftrightarrow (3^3)^{4x}=(3^2)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{12x}=3^{2x+2}$

$$\Leftrightarrow 12x=2x+2 \Leftrightarrow \mathbf{x=\frac{1}{5}}$$

vii) $32^x=16^{1-x} \Leftrightarrow (2^5)^x=(2^4)^{1-x} \Leftrightarrow 2^{5x}=2^{4-4x}$

$$\Leftrightarrow 5x=4-4x \Leftrightarrow \mathbf{x=\frac{4}{9}}$$

viii) $3^{x^2-x-2}=1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \mathbf{x=2}$ ή $\mathbf{x=-1}$

3. i) • Η εξίσωση γράφεται $2\cdot 2^{2x}-4\cdot 2^x=0$

Αν θέσουμε $2^x=y$ αυτή γίνεται $2y^2-4y=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και 2. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων:

$$2^x=0 \quad \text{και} \quad 2^x=2$$

Η $2^x=0$ είναι αδύνατη, ενώ η $2^x=2$ γράφεται $2^x=2^1$ και έχει ρίζα το $\mathbf{x=1}$ που είναι και η μοναδική ρίζα της αρχικής.

ii) Η εξίσωση γράφεται $2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2=0$.

Αν θέσουμε $2^x=y$ αυτή γίνεται $2y^2-5y+2=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{2}$ και 2. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων $2^x=\frac{1}{2}$ και $2^x=2$, δηλαδή των $2^x=2^{-1}$ και $2^x=2^1$ που έχουν ρίζες το $\mathbf{-1}$, $\mathbf{1}$ αντιστοίχως.

iii) Ομοίως αν θέσουμε $3^x=y$ η εξίσωση γίνεται $3y^2-26y-9=0$ και έχει ρίζες $y=-\frac{1}{3}$ και $y=9$, οπότε η αρχική έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων:

$$3^x=-\frac{1}{3} \text{ και } 3^x=9.$$

Η $3^x=-\frac{1}{3}$ είναι αδύνατη, ενώ η $3^x=9 \Leftrightarrow 3^x=3^2$ έχει ρίζα την **x = 2** που είναι και η μοναδική ρίζα της αρχικής.

4. **i)** Έχουμε $5^{x^2-5x+6}<1 \Leftrightarrow 5^{x^2-5x+6}<5^0$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6<0$ (γιατί $5>1$)

$\Leftrightarrow \mathbf{2<x<3}$

ii) Έχουμε: $7^{x+1}<7^{2x-4} \Leftrightarrow x+1<2x-4$ (γιατί $7>1$)

$\Leftrightarrow \mathbf{x>5}$

iii) Έχουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} \Leftrightarrow x+1>2x-4$ (γιατί $\frac{1}{2}<1$)

$\Leftrightarrow \mathbf{x<5}$

5. **i)** Έχουμε:

- $8^{2x+1}=32\cdot 4^{4y-1} \Leftrightarrow (2^3)^{2x+1}=2^5\cdot(2^2)^{4y-1} \Leftrightarrow 2^{6x+3}=2^{8y+3}$

  $\Leftrightarrow 6x+3=8y+3 \Leftrightarrow \mathbf{3x=4y}$

- $5\cdot 5^{x-y}=5^{2y+1} \Leftrightarrow 5^{x-y+1}=5^{2y+1} \Leftrightarrow x-y+1=2y+1$

  $\Leftrightarrow \mathbf{x=3y}$

Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x=3y \\ 3x=4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ 9y=4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x=0} \\ \mathbf{y=0} \end{cases}$$

ii) Αν θέσουμε $3^x=\varphi$ και $2^y=\omega$, τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} \varphi+\omega=11 \\ \varphi-\omega=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\varphi=18 \\ 2\omega=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varphi=9} \\ \boldsymbol{\omega=2} \end{cases}$$

Άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} 3^x=9 \\ 2^y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x=3^2 \\ 2^y=2^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x=2} \\ \mathbf{y=1} \end{cases}$$

6. **i)** Έχουμε:

$$\begin{cases} e^x:e^y=1 \\ e^x\cdot e^y=e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y}=e^0 \\ e^{x+y}=e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

ii) Θέτουμε $2^x=z$ και $2^y=w$, οπότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} z\cdot w=8 \\ z+w=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(6-z)=8 \\ w=6-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-6z+8=0 \\ w=6-z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \text{ ή } z=4 \\ w=6-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ w=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} z=4 \\ w=2 \end{cases}$$

Επομένως:

- Αν $\begin{cases} z=2 \\ w=4 \end{cases}$, τότε $\begin{cases} 2^x=2 \\ 2^y=4 \end{cases}$, οπότε $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

- Αν $\begin{cases} z=4 \\ w=2 \end{cases}$, τότε $\begin{cases} 2^x=4 \\ 2^y=2 \end{cases}$, οπότε $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

7. Οι ρίζες της εξίσωσης $w^2-101w+100=0$ είναι οι 1 και 100. Επομένως

$$w^2-101w+100<0 \Leftrightarrow 1<w<100 \qquad (1)$$

Για την επίλυση της ανίσωσης $10^{2x}-101\cdot 10^x+101<0$, θέτουμε $10^x=w$, οπότε έχουμε να επιλύσουμε την ανίσωση $w^2-101w+100<0$. Λόγω της (1) η ανίσωση αυτή αληθεύει όταν $1<w<100$, οπότε έχουμε

$$1<10^x<100 \Leftrightarrow 10^0<10^x<10^2 \Leftrightarrow 0<x<2$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. • Η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν είναι:

$$\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}>0 \Leftrightarrow (2-\alpha)(2\alpha-1)>0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-2)(2\alpha-1)<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}<\alpha<2$$

i) Η f είναι γνησίως αύξουσα αν και μόνο αν είναι:

$$\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}>1 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1}-1>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\alpha-2\alpha+1}{2\alpha-1}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-3\alpha}{2\alpha-1}>0$$

$$\Leftrightarrow 3(1-\alpha)(2\alpha-1)>0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-1)(2\alpha-1)<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}<\alpha<1$$

ii) Η f είναι γνησίως φθίνουσα αν και μόνο αν είναι:

$$0<\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}<1$$

Βρήκαμε όμως ότι:

$$0<\frac{2-\alpha}{2\alpha-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\alpha<2 \qquad (1)$$

Αν εργαστούμε όπως στη (i) βρίσκουμε ακόμη ότι:

$$\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}<1 \Leftrightarrow \alpha<\frac{1}{2} \text{ ή } \alpha>1 \qquad (2)$$

Οι (1) και (2) συναληθεύουν για **1<α<2**. Γι' αυτές τις τιμές του α η f είναι γνησίως φθίνουσα.

2. **i)** Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{4^x}{4}-5\sqrt{\frac{4^x}{4^2}}+1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}4^x-\frac{5}{4}\sqrt{2^{2x}}+1=0$$

$$\Leftrightarrow 4^x-5\cdot 2^x+4=0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0$$

Αν θέσουμε $2^x=y$ αυτή γίνεται $y^2-5y+4=0$ και έχει ρίζες $y=1$ και $y=4$, οπότε η αρχική είναι ισοδύναμη με τις $2^x=1$ ή $2^x=4$. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι $\mathbf{x=0}$ ή $\mathbf{x=2}$.

ii) Η εξίσωση γράφεται:

$$3^x+\frac{1}{3}3^x=\frac{45}{9\cdot 3^x}+\frac{7}{3^x} \Leftrightarrow \frac{4}{3}3^x=\frac{5}{3^x}+\frac{7}{3^x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}3^x=\frac{12}{3^x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}3^{2x}=12$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x}=\frac{12\cdot 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x}=3^2$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x=1}$$

iii) Η εξίσωση γράφεται:

$$21\cdot 3^x+5^{x+3}=3^{x+4}+5^{x+2} \Leftrightarrow 21\cdot 3^x-3^4\cdot 3^x=5^2\cdot 5^x-5^3\cdot 5^x$$

$$\Leftrightarrow -60\cdot 3^x=-100\cdot 5^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{100}{60}=\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x=\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x=-1}$$

iv) Η εξίσωση γράφεται:

$$9^x + 9^x = \frac{11}{4}4^x + 4\cdot 4^x \Leftrightarrow 2\cdot 9^x = \frac{27}{4}\,4^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{3}{2}}$$

v) Η εξίσωση γράφεται:

$$4^x - \frac{3}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^x\cdot 3^{\frac{1}{2}} - \frac{2^{2x}}{2} \Leftrightarrow 4^x - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot 3^x - \frac{4^x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4^x + \frac{4^x}{2} = \sqrt{3}\cdot 3^x + \frac{3^x}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4\cdot 2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{3}{2}}$$

3. **i)** Αν θέσουμε $3^y = \omega$ και $2^x = \varphi$ το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} \omega - \varphi = 1 \\ \omega - \dfrac{16}{\varphi} = 11 \end{cases} \text{ ή ισοδύναμα } \begin{cases} \omega = 1 + \varphi \\ 1 + \varphi + \dfrac{16}{\varphi} = 11 \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $\varphi^2 - 10\varphi + 16 = 0$ και έχει ρίζες $\varphi = 2$ και $\varphi = 8$, οπότε από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε για $\varphi = 2$, $\omega = 1+2 = 3$ ενώ για $\varphi = 8$, $\omega = 1+8 = 9$.

Επομένως το αρχικό σύστημα έχει ως λύσεις τις λύσεις των συστημάτων:

$$(\Sigma_1)\begin{cases} 3^y = 3 \\ 2^x = 2 \end{cases} \quad \text{και } (\Sigma_2) \begin{cases} 3^y = 9 \\ 2^x = 8 \end{cases}$$

που είναι τα ζεύγη ($\mathbf{x = 1, y = 1}$) και ($\mathbf{x = 3, y = 2}$) αντιστοίχως.

ii) Το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} 2^x\cdot 5^y = 250 \\ 5^x\cdot 2^y = 40 \end{cases}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της 1ης εξίσωσης με τα αντίστοιχα μέλη της 2ης παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} 2^{x+y}\cdot 5^{x+y} = 10000 \\ 5^x \cdot 2^y = 40 \end{cases}$$

Η $1^η$ εξίσωση γράφεται:

$$10^{x+y} = 10^4 \Leftrightarrow x + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - x$$

οπότε η $2^η$ γίνεται:

$$5^x \cdot 2^{4-x} = 40 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

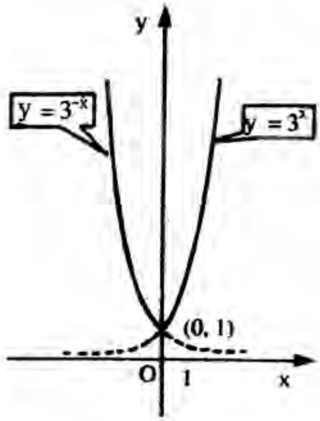
Έχουμε τότε $y = 4 - 1 = 3$ και η λύση του συστήματος είναι **($x = 1$, $y = 3$)**

4. **i)** Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι άρτια $\left(\text{αφού } f(-x) = 3^{|-x|} = 3^{|x|} = f(x)\right)$ και γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x, & \text{αν } x \geq 0 \\ 3^{-x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Λόγω της συμμετρίας ως προς τον $y'y$ περιοριζόμαστε στο $[0, +\infty)$, όπου η 3^x είναι γνησίως αύξουσα (γιατί $3>1$) και κατασκευάζουμε τον πίνακα:

x	0	0,5	1	1,5	2
3^x	1	1,73	3	5,2	9



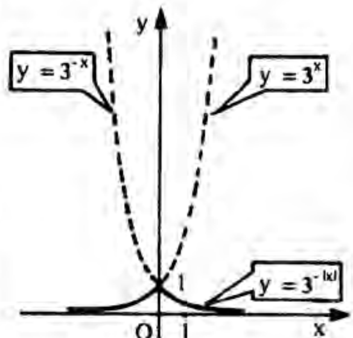
Σχ. ii

Με τη βοήθεια αυτού και της συμμετρίας χαράσσουμε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της $f(x) = 3^{|x|}$.

ii) Η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ 3^x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Απ' αυτό συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα διακεκομμένα τμήματα του σχήματος (ii). Έτσι για τη γραφική παράσταση της $f(x) \overset{3}{=} e^{-|x|}$ έχουμε το διπλανό σχήμα (iii).



Σχ. iii

5. Έχουμε:

$$f^2(x)-g^2(x)=\frac{1}{4}\left(\alpha^x+\alpha^{-x}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\alpha^x-\alpha^{-x}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\left(\alpha^{2x}+2\alpha^x\alpha^{-x}+\alpha^{-2x}-\alpha^{2x}+2\alpha^x\alpha^{-x}-\alpha^{-2x}\right)$$
$$=\frac{1}{4}(2+2)=1$$

6. **i)** Στο τέλος της $1^{ης}$ εβδομάδας η ποσότητα της βενζίνης που θα έχει εξατμισθεί θα είναι $5\cdot\frac{20}{100}=5\cdot 0{,}2$, οπότε η βενζίνη που θα έχει απομείνει στο δοχείο θα είναι:

$$Q_1=5-5\cdot 0{,}2=5(1-0{,}2)=5\cdot 0{,}8$$

Ομοίως η ποσότητα της βενζίνης στο τέλος:

— της $2^{ης}$ εβδομάδας θα είναι $Q_2=Q_1\cdot 0{,}8=5\cdot(0{,}8)^2$

— της $3^{ης}$ εβδομάδας θα είναι $Q_3=Q_2\cdot 0{,}8=5\cdot(0{,}8)^3$

....

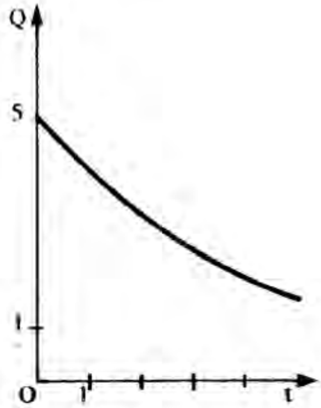
— της t εβομάδας θα είναι $Q_t=5\cdot(0{,}8)^t$

Επομένως η συνάρτηση που ζητάμε είναι $\mathbf{Q(t)=5\cdot(0{,}8)^t}$

ii) Επειδή $0{,}8<1$ η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών ($t\geq 0$).

t	0	1	2	3	4	5	6	7
Q(t)	5	4	3,2	2,56	2	1,6	1,3	1

με τη βοήθεια αυτού χαράξουμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση.



iii) Είναι $Q(40)=5\cdot(0{,}8)^{40}\simeq 0{,}0000132$ λίτρα. Επομένως μετά από 40 εβδομάδες θα έχουν απομείνει **0,0000132** λίτρα βενζίνης.

7. **i) Επειδή η ποσότητα Q του ραδιενεργού υλικού ακολουθεί το νόμο της εκθετικής απόσβεσης θα έχουμε διαδοχικά:**

$$Q(t)=Q_0e^{ct}$$

$$Q(t)=5\cdot e^{ct} \qquad (\text{γιατί } Q_0=5 \text{ γραμ.}) \qquad (1)$$

Επειδή ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι t=1600 έτη, από την (1) θα έχουμε διαδοχικά:

$$Q(1600) = 5\cdot e^{c\cdot 1600}$$

$$\frac{5}{2} = 5\cdot e^{c\cdot 1600}$$

$$e^{1600c} = \frac{1}{2}$$

$$(e^c)^{1600} = \frac{1}{2}$$

$$e^c = \sqrt[1600]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}$$

Επομένως ο τύπος (1) γράφεται:

$$Q(t) = 5\cdot(e^c)^t = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} = \mathbf{5(0,5)^{\frac{t}{1600}}}$$

ii) $Q(600) = 5\cdot(0,5)^{\frac{600}{1600}} = 5\cdot(0,5)^{\frac{3}{8}} \simeq \mathbf{3,86}$ **γραμ.**

iii) $Q(20000) = 5\cdot(0,5)^{\frac{20000}{1600}} = 5\cdot(0,5)^{12,5} \simeq \mathbf{0,001}$ **γραμ.**

Οι υπολογισμοί να γίνουν με υπολογιστή τσέπης.

8. **i) Η τιμή του αυτοκινήτου σε χιλιάδες στο τέλος**

- **του 1^ου^ χρόνου θα είναι** $T_1 = 40 - 40\cdot 0,15 = 40\cdot 0,85$
- **του 2^ου^ χρόνου θα είναι** $T_2 = T_1\cdot 0,85 = 40\cdot(0,85)^2$
- **του 3^ου^ χρόνου θα είναι** $T_3 = T_2\cdot 0,85 = 40\cdot(0,85)^3$

....

- **του t χρόνου θα είναι** $T_t = 40(0,85)^t,\ \ t \le 6$

Επομένως η συνάρτηση που ζητάμε είναι $T_t = 40(0,85)^t,\ \ t \le 6$

ii) Η τιμή του αυτοκινήτου στο τέλος του 6^ου^ χρόνου θα είναι

$T(6) = 40\cdot(0,85)^6 \approx 15,085$ **χιλιάδες ευρώ, δηλαδή 15.085 ευρώ.**

9. **i)** Έχουμε $e^{-0,5x} = \frac{1}{e^{0,5x}} = \frac{1}{(e^x)^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

Έτσι για

— x=0 είναι $e^{-0,5\cdot 0} = e^0 = \mathbf{1}$

— x=1 είναι $e^{-0,5\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{e}} \simeq \mathbf{0,606}$

— x=2 είναι $e^{-0,5\cdot 2} = e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq \mathbf{0,368}$

— x=3 είναι $e^{-0,5\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} = \frac{1}{e\sqrt{e}} \simeq \mathbf{0,223}$

— x=4 είναι $e^{-0,5\cdot 4} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \simeq \mathbf{0,135}$

— $x=5$ είναι $e^{-0,5\cdot 5}=\frac{1}{\sqrt{e^5}}=\frac{1}{e^2\sqrt{e}}\simeq \mathbf{0,082}$

ii) Έχουμε $I(x)=I_o\cdot e^{-0,5x}$, οπότε $\frac{I(x)}{I_o}=e^{-0,5x}$

(α) Είναι $\frac{I(x)}{I_o}=1 \Leftrightarrow e^{-0,5x}=1 \Leftrightarrow -0,5x=0 \Leftrightarrow \mathbf{x=0}$

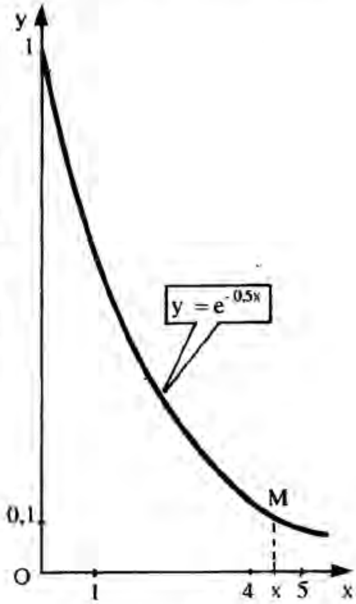
(β) Είναι $\frac{I(x)}{I_o}=0,1 \Leftrightarrow e^{-0,5x}=0,1$

Από την (i) βλέπουμε ότι η τιμή του $e^{-0,5x}$ που είναι πλησιέστερη στο είναι η 0,082 και αντιστοιχεί στο x=5. Επομένως η τιμή του x που ζητάμε είναι το **5** (αφού η $e^{-0,5x}$ είναι φθίνουσα).

iii) Με τη βοήθεια του πίνακα τιμών

x	0	1	2	3	4	5
$\frac{I(x)}{I_o}=e^{-0,5x}$	1	0,605	0,368	0,223	0,135	0,082

Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $y=e^{-0,5x}$. Απ' αυτή βλέπουμε ότι η τετμημένη x του σημείου Μ είναι πλησιέστερα στον ακέραιο 5 πράγμα που επιβεβαιώνει την τιμή x = 5 που βρήκαμε προηγουμένως.



10. i) Έχουμε $e^{-2t}=\frac{1}{e^{2t}}$ οπότε για

— $t=0$ είναι $e^{-2\cdot 0}=\mathbf{1}$

— $t=1$ είναι $e^{-2\cdot 1}=\frac{1}{e^2}\simeq \mathbf{0,135}$

— $t=2$ είναι $e^{-2\cdot 2}=\frac{1}{e^4}\simeq \mathbf{0,018}$

— $t=3$ είναι $e^{-2\cdot 3}=\frac{1}{e^6}\simeq \mathbf{0,002}$

ii) Έχουμε $T(t)=T_o(1+e^{-2t}) \Leftrightarrow \frac{T(t)}{T_o}=1+e^{-2t}$. Επομένως:

α) $$\frac{T(t)}{T_o}=1,1 \Leftrightarrow 1+e^{-2t}=1,1 \Leftrightarrow e^{-2t}=0,1$$

Από (i) βλέπουμε ότι η τιμή του e^{-2t} που είναι πλησιέστερη στο 0,1 είναι η 0,135, που αντιστοιχεί στο **t = 1.**

Επομένως η τιμή του t που ζητάμε είναι το 1 (αφού η $f(t) = e^{-2t}$ είναι γνησίως φθίνουσα).

β)
$$\frac{T(t)}{T_o}=2 \Leftrightarrow 1+e^{-2t}=2$$
$$\Leftrightarrow e^{-2t}=1$$
$$\Leftrightarrow -2t=0$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{t=0}$$

11. Η ελάττωση του q ακολουθεί το νόμο της εκθετικής μεταβολής με σταθερά $-\frac{1}{RC}<0$. Έτσι η συνάρτηση q(t) είναι φθίνουσα και η καμπύλη της έχει ασύμπτωτη του άξονα των τετμημένων t΄t.

Αν στον άξονα τετμημένων t΄t πάρουμε το RC ως μονάδα, έχουμε τον πίνακα τιμών:

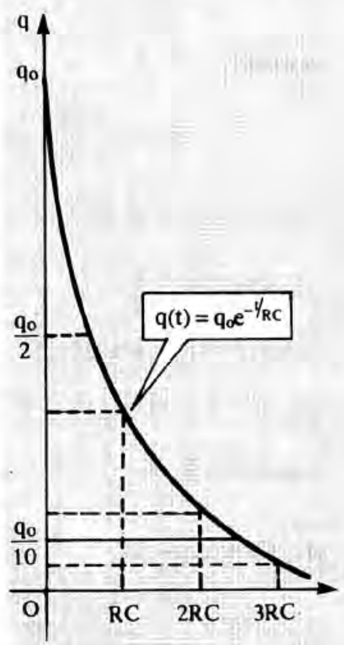
t	0	RC	2RC	3RC
q	q_o	$0{,}37q_o$	$0{,}14q_o$	$0{,}05q_o$

Με την βοήθεια των παραπάνω χαράσσουμε τη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος.

ii) Όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση το φορτίο γίνεται:

α) μικρότερο από $\frac{1}{2}q_o$ για όλες τις τιμές του **t = kRC με k = 1, 2, 3...**

β) μικρότερο από $\frac{1}{10}q_o$ για όλες τις τιμές του **t = kRC με k = 3,4,...**



§ 5.2 Λογάριθμοι

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** Αν θέσουμε $\log_{10}0{,}001 = x$, τότε έχουμε:

$\log_{10}0{,}001 = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}001 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -3.$

Άρα $\mathbf{\log_{10}0{,}001 = -3}$.

ii) Αν θέσουμε $\log_{\frac{1}{10}}\sqrt{10} = x$, τότε έχουμε:

$$\log_{\frac{1}{10}}\sqrt{10} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x = \sqrt{10} \Leftrightarrow 10^{-x} = 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow -x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Άρα $\mathbf{\log_{\frac{1}{10}}\sqrt{10} = -\frac{1}{2}}$

iii) Αν θέσουμε $\log_{\frac{1}{2}}32 = x$, τότε έχουμε:

$$\log_{\frac{1}{2}}32 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^5 \Leftrightarrow -x = 5 \Leftrightarrow x = -5$$

Άρα $\mathbf{\log_{\frac{1}{2}}32 = -5}$

iv) Αν θέσουμε $\log_9\frac{\sqrt{27}}{3} = x$, τότε έχουμε:

$$\log_9\frac{\sqrt{27}}{3} = x, \Leftrightarrow 9^x = \frac{\sqrt{27}}{3} \Leftrightarrow 9^x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Άρα $\mathbf{\log_9\frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{1}{4}}$

v) Αν θέσουμε $\log_{\sqrt{2}}16 = x$, τότε έχουμε:

$$\log_{\sqrt{2}}16 = x \Leftrightarrow (\sqrt{2})^x = 16 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 4 \Leftrightarrow x = 8$$

Άρα $\mathbf{\log_{\sqrt{2}}16 = 8}$

vi) Αν θέσουμε $\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{8}{27}} = x$ τότε έχουμε:

$$\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{8}{27}} = x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \sqrt{\frac{8}{27}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3/2} \Leftrightarrow x = -3/2$$

Άρα $\mathbf{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{8}{27}} = -3}$

2. **i)** $\log_{10}x = 3 \Leftrightarrow 10^3 = x \Leftrightarrow \mathbf{x = 1000}$

ii) $\log_4 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4^{-\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{1}{2}}$

iii) $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} = x \Leftrightarrow x = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \mathbf{x = \sqrt[3]{2}}$

3. Πρέπει $0<\alpha\neq 1$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

i) $\log_\alpha 16 = 4 \Leftrightarrow \alpha^4 = 16 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \sqrt[4]{\mathbf{16}} = \mathbf{2}$, αφού $\alpha>0$.

ii) $\log_\alpha 8 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow (\alpha^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \alpha = 8^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{(2^3)^{\frac{2}{3}} = 4}$.

iii) $\log_\alpha 0,1 = -3 \Leftrightarrow \alpha^{-3} = 0,1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 10 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \sqrt[3]{\mathbf{10}}$

4. **i)**
$$\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = \log_2 3 + \log_2 4^2 - \log_2 12$$
$$= \log_2 3 + \log_2 16 - \log_2 12$$
$$= \log_2 \frac{3\cdot 16}{12} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2.$$

ii)
$$3\log_{10}2 + \log_{10}5 - \log_{10}4 = \log_{10}8 + \log_{10}5 - \log_{10}4$$
$$= \log_{10}\frac{8\cdot 5}{4} + \log_{10}10 = 1$$

iii)
$$\frac{1}{2}\log_{10}25 + \frac{1}{3}\log_{10}8 - \frac{1}{5}\log_{10}32 = \log_{10}\sqrt{25} + \log_{10}\sqrt[3]{8} - \log_{10}\sqrt[5]{32}$$
$$= \log_{10}5 + \log_{10}2 - \log_{10}2$$
$$= \log_{10}10 - \log_{10}2 = 1 - \log_{10}2$$

iv) Είναι $\log_2 6 - 2\log_2\sqrt{3} = \log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 2 = 1$

Άρα η ζητούμενη παράσταση ισούται με $2^1 = 2$.

v)
$$2\log_2(2+\sqrt{2}) + \log_2(6-4\sqrt{2}) = \log_2(2+\sqrt{2})^2 + \log_2(6-4\sqrt{2})$$
$$= \log_2(6+4\sqrt{2}) + \log_2(6-4\sqrt{2})$$
$$= \log_2(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})$$
$$= \log_2(36-32) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

5. Ζητάμε τον t για τον οποίο ισχύει $Q(t) = 10Q_o$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} Q(t) = 10Q_o &\Leftrightarrow Q_o \cdot e^{0,34t} = 10\,Q_o \\ &\Leftrightarrow e^{0,34t} = 10 \\ &\Leftrightarrow 0,34t = \ln 10 \\ &\Leftrightarrow 0,34t \simeq 2,3026 \\ &\Leftrightarrow t \equiv \frac{2,3026}{0,34} \simeq 6,77 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{t \simeq 6^h\,46^{min}} \end{aligned}$$

6. **i)** Είναι $h = 3050$ και $p = 68900$. Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (*) έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 68900 = 101300 \cdot e^{k \cdot 3050} &\Leftrightarrow e^{k \cdot 3050} = \frac{689}{1013} \\ &\Leftrightarrow 3050k = \ln\frac{689}{1013} \\ &\Leftrightarrow 3050k = \ln 689 - \ln 1013 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{\ln 689 - \ln 1013}{3050} \simeq \mathbf{-0,000126} \end{aligned}$$

ii) Αν τώρα στον τύπο (*) θέσουμε όπου $k = -0,000126$ και $h = 1000$ βρίσκουμε ότι:

$$p = 101300 \cdot e^{-0,126} \simeq 101300 \cdot 0,881615 \simeq 89308$$

Άρα η ατμοσφαιρική πίεση σε ύψος 1000m είναι **89308 Pascals.**

7. **i)** Επειδή $L = \sqrt[5]{100} \cdot L_o$, λόγω του τύπου (*), έχουμε:

$$m = 6 - 2,5 \cdot \log\sqrt[5]{100} = 6 - 2,5 \cdot \log 10^{2/5} = 6 - 2,5 \cdot \frac{2}{5} = 6 - 1 = 5.$$

Άρα **m = 5**

ii) Από τον τύπο (*) για $m = 1$ έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 1 = 6 - 2,5 \cdot \log\frac{L}{L_0} &\Leftrightarrow 2,5\log\frac{L}{L_0} = 5 \\ &\Leftrightarrow \log\frac{L}{L_0} = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{L}{L_0} = 10^2 \\ &\Leftrightarrow L = 100L_o \end{aligned}$$

Άρα ένας αστέρας 1ου μεγέθους είναι **100 φορές** λαμπρότερος από έναν αστέρα 6ου μεγέθους.

8. **i)** Επειδή $S(1) = 15$ (χιλιάδες μονάδες) έχουμε:

$$15 = 100\,(1-e^{k}) \Leftrightarrow 0{,}15 = 1 - e^{k}$$
$$\Leftrightarrow e^{k} = 0{,}85$$
$$\Leftrightarrow k = \ln 0{,}85 \cong \mathbf{-0{,}16}$$

Επομένως $\mathbf{S(t) = 100(1-e^{-0{,}16t})}$ (1)

ii) Οι πωλήσεις (σε χιλιάδες μονάδες) μετά από 5 χρόνια, σύμφωνα με τον τύπο (1), θα είναι:

$$S(5) = 100\cdot(1-e^{-0{,}16\cdot 5}) = 100\,(1-e^{-0{,}8})$$
$$= 100\cdot(1-0{,}4493) = 100\cdot 0{,}5507 = 55{,}07$$

Άρα οι πωλήσεις κατά τα 5 πρώτα χρόνια ανέρχονται σε **55070** μονάδες.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** $4^{1-\frac{1}{2}\log_2 3} = (2^2)^{1-\frac{1}{2}\log_2 3} = 2^{2-\log_2 3} = 2^{\log_2 4-\log_2 3} = 2^{\log_2\frac{4}{3}} = \mathbf{\frac{4}{3}}$.

ii) $9^{\frac{1}{2}\log_3 18-1} = (3^2)^{\frac{1}{2}\log_3 18-1} = 3^{\log_3 18-2} = 3^{\log_3 18-\log_3 9} = 3^{\log_3\frac{18}{9}} = 3^{\log_3 2} = \mathbf{2}$.

2. Επειδή οι: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής περιόδου, θα υπάρχει $\lambda>0$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\theta_{\nu+1} = \lambda\theta_\nu, \qquad \text{για κάθε } \nu\in\mathbb{N}^*$$

οπότε $\quad \log\theta_{\nu+1} = \log\lambda\theta_\nu, \qquad$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$

ή $\quad \log\theta_{\nu+1} = \log\theta_\nu + \log\lambda, \qquad$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$

που σημαίνει ότι οι: $\log\theta_1$, $\log\theta_2$, $\log\theta_3$, ... είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = \log\lambda$.

3. Επειδή $\alpha_1 = \log 2$, και $\alpha_2 = \log 8$, η διαφορά της προόδου θα είναι ίση με

$$\omega = \log 8 - \log 2 = \log 4 = 2\log 2$$

Επομένως, λόγω του τύπου $\Sigma_\nu = \dfrac{[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]\nu}{2}$, έχουμε:

$$\Sigma_\nu = \frac{[2\log 2+(\nu-1)2\log 2]\nu}{2} = \frac{(2\nu\log 2)\cdot\nu}{2} = \nu^2\log 2.$$

4. $$\log\Big(\log \underbrace{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\ldots\sqrt[10]{10}}}}}_{\nu \text{ ριζικά}}\Big) = \log\left(\log \sqrt[10^{\nu}]{10}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{10^{\nu}}\right) = \log 10^{-\nu} = -\nu$$

5. $$\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{1}{\nu}\right)=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\ldots+\log\frac{\nu-1}{\nu}$$

$$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{\nu-1}{\nu}\right)$$

$$=\log\frac{1}{\nu}=-\log\nu.$$

6. Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αλλαγής βάσης, βρίσκουμε:

$$\log_{\alpha^2} x^2 = \frac{\log_\alpha x^2}{\log_\alpha \alpha^2} = \frac{2\log_\alpha x}{2} = \log_\alpha x \qquad \left|\text{αφού } x>0\right|$$

7. Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αλλαγής βάσης, βρίσκουμε:

i) $\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\alpha = \dfrac{\log\beta}{\log\alpha}\cdot\dfrac{\log\alpha}{\log\beta}=1$

ii) $\log_\alpha\beta^2\cdot\log_\beta\alpha^3 = 2\log_\alpha\beta\cdot 3\log_\beta\alpha = 6(\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\alpha) \overset{(i)}{=} 6$

iii) $\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\gamma\cdot\log_\gamma\alpha = \dfrac{\log\beta}{\log\alpha}\cdot\dfrac{\log\gamma}{\log\beta}\cdot\dfrac{\log\alpha}{\log\gamma}=1$

8. Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αλλαγής βάσης, βρίσκουμε:

i) $$\log_\alpha\theta+\log_{1/\alpha}\theta = \frac{\log\theta}{\log\alpha}+\frac{\log\theta}{\log\frac{1}{\alpha}} = \frac{\log\theta}{\log\alpha}+\frac{\log\theta}{-\log\alpha}$$

$$=\frac{\log\theta}{\log\alpha}-\frac{\log\theta}{\log\alpha}=0$$

ii) $$\log_\alpha(\alpha\beta)+\log_\beta(\alpha\beta)=\frac{\log(\alpha\beta)}{\log\alpha}+\frac{\log(\alpha\beta)}{\log\beta}$$

$$=\frac{\log(\alpha\beta)\cdot\log\beta+\log(\alpha\beta)\cdot\log\alpha}{\log\alpha\cdot\log\beta}$$

$$=\frac{\log(\alpha\beta)\cdot\left[\log\beta+\log\alpha\right]}{\log\alpha\cdot\log\beta}$$

$$=\frac{\log(\alpha\beta)\cdot\log(\alpha\beta)}{\log\alpha\cdot\log\beta}$$

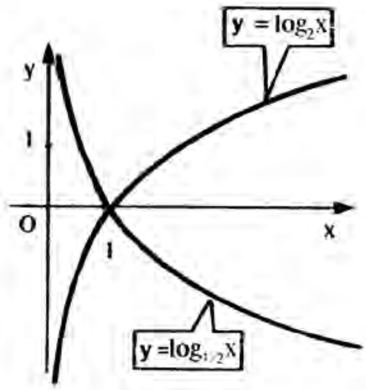
$$=\frac{\log(\alpha\beta)}{\log\alpha}\cdot\frac{\log(\alpha\beta)}{\log\beta}=\log_\alpha(\alpha\beta)\cdot\log_\beta(\alpha\beta)$$

§ 5.3 Λογαριθμική Συνάρτηση

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. • Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης $f(x)=\log_2 x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	−3	−2	−1	0	1	2	3



Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα και ενώνοντας με συνεχή καμπύλη έχουμε το διπλανό σχήμα.

• Εργαζόμασθε με τον ίδιο τρόπο. Επειδή για κάθε x>0 ισχύει:

$$g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x=\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2 x=-f(x)$$

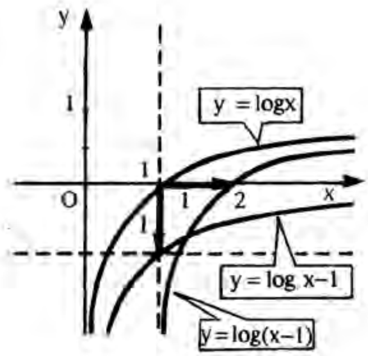
η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x΄x.

2. Για να παραστήσουμε γραφικά την f(x) = logx κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	−0,60	−0,48	−0,30	0	0,30	0,48	0,60

Επειδή $g(x) = f(x) - 1$, η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

Τέλος, επειδή $h(x) = f(x-1)$, η γραφική παράσταση της h προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.



3. Επειδή $0<\alpha\neq 1$ έχουμε:

i) $f(2) = 4 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$ Άρα $\mathbf{f(x) = 2^x}$

$g(2) = 4 \Leftrightarrow \log_\alpha 2 = 4 \Leftrightarrow \alpha^4 = 2 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[4]{2}$ Άρα $\mathbf{g(x) = \log_{\sqrt[4]{2}} x}$

ii) $f(-2) = 4 \Leftrightarrow \alpha^{-2} = 4 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ Άρα $\mathbf{f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$

ενώ δεν υπάρχει η g, αφού ο λογάριθμος αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται.

iii) $f(2) = -4 \Leftrightarrow \alpha^2 = -4$ (αδύνατο)

$g(2) = -4 \Leftrightarrow \log_\alpha 2 = -4 \Leftrightarrow \alpha^{-4} = 2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

iv) $f(-2) = -4 \Leftrightarrow \alpha^{-2} = -4 \Leftrightarrow \alpha^2 = -\frac{1}{4}$ (αδύνατο)

Επίσης δεν υπάρχει η g, αφού ο λογάριθμος αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται.

4. Για $x = 50$ είναι $\log x = \log 50 = \log\frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - \log 2 \cong 1{,}7$

Άρα $y = 1+10\cdot 1{,}7 = \mathbf{18}$

Για $x = 100$ είναι $\log x = \log 100 = 2$. Άρα $y = 1+10\cdot 2 = \mathbf{21}$

Για $x = 200$ είναι $\log x = \log(100\cdot 2) = \log 100 + \log 2 = 2+\log 2 = 2{,}3$

Άρα $y = 1+10\cdot 2{,}3 = \mathbf{24}$

Για $x = 400$ είναι $\log x = \log(100\cdot 4) = \log 100 + \log 4 = 2+2\log 2 = 2{,}6$

Άρα $y = 1+10\cdot 2{,}6 = \mathbf{27}$

Για $x = 800$ είναι $\log x = \log(100\cdot 8) = \log 100 + \log 8 = 2+3\log 2 = 2{,}9$

Άρα $y = 1+10\cdot 2{,}9 = \mathbf{30}$

Για $x = 1600$ είναι $\log x = \log(100 \cdot 16) = \log 100 + \log 16$

$$= 2 + 4\log 2 = 3{,}2$$

Άρα $y = 1+10 \cdot 3{,}2 = \mathbf{33}$

Επομένως έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	50	100	200	400	800	1600
y	18	21	24	27	30	33

Παρατηρούμε ότι:

- Οι τιμές του x είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$, ενώ

- Οι τιμές του y είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 3$.

5. **i)** Η εξίσωση ορίζεται αν $x+1>0$ και $x-1>0$, δηλαδή αν $\mathbf{x>1}$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\log(x+1) + \log(x-1) = \log 2 \Leftrightarrow \log\big((x+1)(x-1)\big) = \log 2$$
$$\Leftrightarrow \log(x^2-1) = \log 2$$
$$\Leftrightarrow x^2-1 = 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}$$

Δεκτή είναι μόνο η ρίζα $\mathbf{x = \sqrt{3}}$

ii) Η εξίσωση ορίζεται αν $x-1>0$ και $x>0$, δηλαδή αν $\mathbf{x>1}$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\log(x-1) + \log x = 1-\log 5 \Leftrightarrow \log\big((x-1)x\big) = \log\frac{10}{5}$$
$$\Leftrightarrow \log(x^2-x) = \log 2$$
$$\Leftrightarrow x^2-x = 2$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1$$

Δεκτή είναι μόνο η ρίζα $\mathbf{x = 2}$

iii) Η εξίσωση ορίζεται αν $\mathbf{x>0}$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\log x^2 = (\log x)^2 \Leftrightarrow 2\log x = (\log x)^2$$
$$\Leftrightarrow \log x(\log x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \log x = 0 \text{ ή } \log x = 2$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 1} \text{ ή } \mathbf{x = 100}$$

(που είναι δεκτές).

iv) Η εξίσωση ορίζεται αν **x>0**. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x=1} \quad (\text{δεκτή})$$

6. i)

$$5^x = 2^{1-x} \Leftrightarrow \log 5^x = \log 2^{1-x}$$
$$\Leftrightarrow x\log 5 = (1-x)\log 2$$
$$\Leftrightarrow x\log 5 = \log 2 - x\log 2$$
$$\Leftrightarrow x(\log 5+\log 2) = \log 2$$
$$\Leftrightarrow x\log 10 = \log 2$$
$$\Leftrightarrow x = \mathbf{\log 2 \simeq 0,30102}$$

ii)

$$3^{x-1} = 2^{x+1} \Leftrightarrow \log 3^{x-1} = \log 2^{x+1}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\log 3 = (x+1)\log 2$$
$$\Leftrightarrow x\log 3 - x\log 2 = \log 3+\log 2$$
$$\Leftrightarrow (\log 3 - \log 2)x = \log 3+ \log 2$$
$$\Leftrightarrow (\log 1,5)x = \log 6$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\log 6}{\log 1,5} \simeq \mathbf{4,41902}$$

7. i) Είναι 2<5. Επομένως $\log_3 2<\log_3 5$, αφού η συνάρτηση $f(x) = \log_3 x$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Είναι 5<7. Επομένως $\log_{0,3} 5>\log_{0,3} 7$, αφού η συνάρτηση $f(x) = \log_{0,5} x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

iii) Είναι $x^2+1\geq 2x$, αφού

$$x^2+1\geq 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Επομένως $\log(x^2+1)\geq \log 2x$, αφού η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα

8.

$$\text{Είναι } [H^+]>10^{-7} \Leftrightarrow \log[H^+]>\log 10^{-7}$$
$$\Leftrightarrow \log[H^+]>-7$$
$$\Leftrightarrow -\log[H^+]<7$$
$$\Leftrightarrow pH<7$$

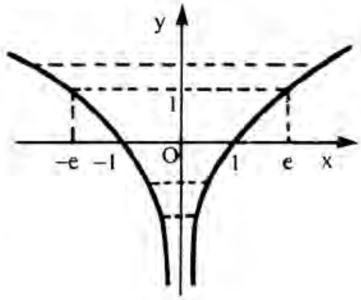
Άρα ένα διάλυμα είναι **όξινο** αν έχει pH<7, ενώ είναι **βασικό** αν έχει pH>7.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ ορίζεται και κάθε $x \neq 0$. Επειδή

$$f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x), \text{ για κάθε } x \neq 0$$

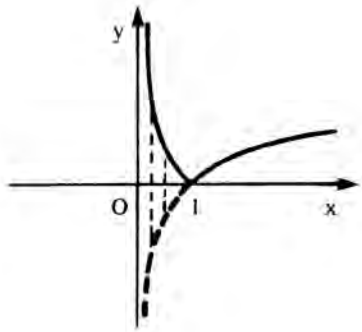
η συνάρτηση f είναι άρτια. Άρα η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y. Επομένως αποτελείται από τη γραφική παράσταση της $g(x) = \ln|x|$, $x>0$ και τη συμμετρική της ως προς τον άξονα y΄y. Επειδή $x>0$ είναι $g(x) = \ln x$ και επομένως η γραφική παράσταση της f δίνεται στο διπλανό σχήμα:



ii) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$ ορίζεται για κάθε $x \neq 0$.

Επειδή $f(x) = \frac{1}{2}\ln x^2 = \ln\sqrt{x^2} = \ln|x|$,

για κάθε $x \neq 0$, η γραφική της παράσταση είναι η προηγούμενη.



iii) Η συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$ ορίζεται για κάθε $x>0$. Επειδή

$$f(x) = \begin{cases} -\ln x & , x<1 \\ \ln x & , x\geq 1 \end{cases}$$

η γραφική της παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα:

iv) Η συνάρτηση $f(x) = \log(10x-20)$ ορίζεται για κάθε $x \in (2,+\infty)$.

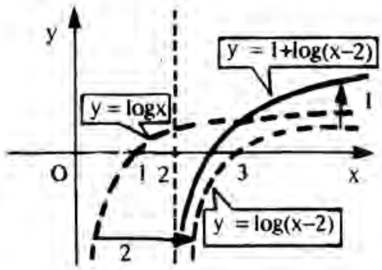
Επειδή

$$f(x) = \log\big(10(x-2)\big) = \log 10 + \log(x-2) = 1 + \log(x-2),$$

αν θέσουμε $g(x) = \log x$, έχουμε:

$$f(x) = 1+g(x-2)$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f προκύπτει αν τη γραφική παράσταση της $g(x) = \log x$ τη μετατοπίσουμε πρώτα κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και έπειτα κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



2. **i)** Η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, γιατί

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0, \quad \text{αφού } |x| \geq -x$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$= \ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή συνάρτηση.

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ ορίζεται για κάθε $x \in (-1, 1)$, γιατί

$$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1<x<1$$

Για κάθε $x \in (-1, 1)$ ισχύει:

$$f(-x) = \ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \ln\frac{1+x}{1-x} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή συνάρτηση.

3. Οι αριθμοί $\log 178$, $\log\sqrt{81(2^x + 2\cdot 3^x)}$ και $x\log 3$ με τη σειρά που δόθηκαν είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν

$$2\log\sqrt{81(2^x+2\cdot 3^x)} = \log 178 + x\log 3 \Leftrightarrow \log\left(81(2^x+2\cdot 3^x)\right) = \log(178\cdot 3^x)$$

$$\Leftrightarrow 81(2^x+2\cdot 3^x) = 178\cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 81\cdot 2^x = 16\cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{81}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

4.
$$\log_\alpha\beta = \log_\beta\gamma \cdot \log_\gamma\alpha \Leftrightarrow \frac{\log\beta}{\log\alpha} = \frac{\log\gamma}{\log\beta} \cdot \frac{\log\alpha}{\log\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log\beta}{\log\alpha} = \frac{\log\alpha}{\log\beta}$$

$$\Leftrightarrow (\log\alpha)^2 = (\log\beta)^2$$

$$\Leftrightarrow \log\alpha = \log\beta \quad \text{ή} \quad \log\alpha = -\log\beta$$

$$\Leftrightarrow \log\alpha = \log\beta \quad \text{ή} \quad \log\alpha = \log\frac{1}{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta \qquad \text{ή} \qquad \alpha = \frac{1}{\beta}$$

5. **i)** Η εξίσωση $\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x}$ ορίζεται εφόσον $x>0$ και $\log x \geq 0$, δηλαδή εφόσον $x \geq 1$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x} \Leftrightarrow \left(\log\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{\log x}\right)^2 \qquad \left[\text{αφού } \log\sqrt{x}, \sqrt{\log x} \geq 0\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\log x\right)^2 = \log x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\log^2 x = \log x$$

$$\Leftrightarrow \log^2 x - 4\log x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log x(\log x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log x = 0 \quad \text{ή} \quad \log x = 4$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 1} \quad \text{ή} \quad \mathbf{x = 10.000}$$

ii) Θέτουμε $w = \ln^2 x$, οπότε η εξίσωση γράφεται
$w^2 - 5w + 4 = 0 \Leftrightarrow w = 1$ ή $w = 4$.
Επομένως:

- Αν $w = 1$, τότε $\ln^2 x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \pm 1 \Leftrightarrow x = e^{\pm 1}$.
- Αν $w = 4$, τότε $\ln^2 x = 4 \Leftrightarrow \ln x = \pm 2 \Leftrightarrow x = e^{\pm 2}$.

Άρα, η εξίσωση έχει ως λύσεις τους αριθμούς e, $\frac{1}{e}$, e^2 και $\frac{1}{e^2}$.

6. Έχουμε:

$x^{\log 5} = 5^{\log x} \Leftrightarrow \log x^{\log 5} = \log 5^{\log x} \Leftrightarrow \log 5 \cdot \log x = \log x \cdot \log 5$ που ισχύει.

Επομένως αν θέσουμε $\mathbf{5^{\log x} = x^{\log 5} = t}$ (1) η εξίσωση $5^{2\log x} = 5 + 4 \cdot x^{\log 5}$ γράφεται:

$$t^2 = 5 + 4t \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \text{ ή } t = -1$$

- Για $t=5$ η (1) γράφεται:

$$5^{\log x} = 5 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow \mathbf{x = 10}$$

- Για $t=-1$ η (1) γράφεται:

$$5^{\log x} = -1 \text{ που είναι αδύνατη.}$$

7. i) Το σύστημα ορίζεται εφόσον $x>0$ και $y>0$. Γι' αυτά τα x, y έχουμε:

$$\begin{cases} \log(xy) = 4\log 2 \\ \log x \cdot \log y = 3(\log 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x + \log y = 4\log 2 \\ \log x \cdot \log y = 3(\log 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log x = \log 2 \\ \log y = 3\log 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \log x = 3\log 2 \\ \log y = \log 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 8} \end{Bmatrix} \textbf{ ή } \begin{Bmatrix} \mathbf{x = 8} \\ \mathbf{y = 2} \end{Bmatrix}$$

ii) Το σύστημα ορίζεται εφόσον $x, y > 0$. Γι' αυτά τα x, y έχουμε:

$$\begin{cases} xy = 8 \\ \log y = 2\log x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8 \\ \log y = \log x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 8 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

iii) Το σύστημα ορίζεται εφόσον $x, y>0$. Γι' αυτά τα x,y έχουμε:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2\log y = \log x + \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \log y^2 = \log 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 1 \end{cases} \text{, αφού } y>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x = \frac{1}{2}} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}$$

8. **i)** Η ανίσωση ορίζεται εφόσον $x>0$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε

$$\log x^2>(\log x)^2 \Leftrightarrow 2\log x>(\log x)^2$$
$$\Leftrightarrow \log x(2-\log x)>0$$
$$\Leftrightarrow \log x(\log x-2)<0$$
$$\Leftrightarrow 0<\log x<2$$
$$\Leftrightarrow \log 1<\log x<\log 100$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{1<x<100} \quad \left[\begin{array}{c}\text{αφού η } f(x)=\log x \\ \text{είναι γνησίως αύξουσα}\end{array}\right]$$

ii) Η ανίσωση ορίζεται εφόσον $x^2-4>0$ και $3x>0$, δηλαδή εφόσον $x>2$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\log(x^2-4)<\log 3x \Leftrightarrow x^2-4<3x$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x-4<0$$
$$\Leftrightarrow -1<x<4$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει αν $\mathbf{2<x<4}$, επειδή $x>2$

iii) Η ανίσωση ορίζεται εφόσον $x>0$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$x^{\log x}>10 \Leftrightarrow \log(x^{\log x})>\log 10$$
$$\Leftrightarrow \log x\cdot\log x>1$$
$$\Leftrightarrow (\log x)^2-1>0$$
$$\Leftrightarrow (\log x+1)(\log x-1)>0$$
$$\Leftrightarrow \log x<-1 \text{ ή } \log x>1$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{0<x<0{,}1} \text{ ή } \mathbf{x>10}$$

9.

$$\log_2 3>\log_6 9 \Leftrightarrow \frac{\log 3}{\log 2}>\frac{\log 9}{\log 6}$$
$$\Leftrightarrow \log 3\cdot\log 6>\log 2\cdot\log 9$$
$$\Leftrightarrow \log 3\cdot\log(2\cdot 3)>\log 2\cdot\log 3^2$$
$$\Leftrightarrow \log 3\cdot(\log 2+\log 3)>\log 2\cdot 2\cdot\log 3$$
$$\Leftrightarrow \log 2+\log 3>2\log 2$$
$$\Leftrightarrow \log 3>\log 2 \text{ , που ισχύει.}$$

10.

$$\alpha^\alpha\beta^\beta>\alpha^\beta\beta^\alpha \Leftrightarrow \log(\alpha^\alpha\beta^\beta)>\log(\alpha^\beta\beta^\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \alpha\log\alpha+\beta\log\beta>\beta\log\alpha+\alpha\log\beta$$
$$\Leftrightarrow \alpha(\log\alpha-\log\beta)-\beta(\log\alpha-\log\beta)>0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\log\alpha-\log\beta)>0 \quad (1)$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα,

- αν $\alpha>\beta$ θα είναι και $\log\alpha>\log\beta$, οπότε η (1) ισχύει, ενώ
- αν $\alpha<\beta$ θα είναι και $\log\alpha<\log\beta$, οπότε η (1) ισχύει.

Γενικές Ασκήσεις

1. i) Η εξίσωση αυτή αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$x^2-3x+1=1 \quad (1) \quad ή \quad \begin{cases} 3x-5=0 \\ και \\ x^2-3x+1\neq 0 \end{cases} \quad (2) \quad ή \quad \begin{cases} x^2-3x+1=-1 \\ και \\ 3x-5 \text{ άρτιος} \end{cases} \quad (3)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$(1) \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow \mathbf{x=0} \text{ ή } \mathbf{x=3}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ και \\ x^2-3x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x=\frac{5}{3}}, \text{ αφού } \left(\frac{5}{3}\right)^2-3\cdot\frac{5}{3}+1=-\frac{11}{9}\neq 0$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \\ και \\ 3x-5 \text{ άρτιος ακέραιος} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x=1}$$

αφού για $x=1$ είναι $3x-5=-2$ άρτιος
ενώ για $x=2$ είναι $3x-5=1$ περιττός

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί: $\mathbf{0}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{\frac{5}{3}}$, $\mathbf{1}$

ii) Είναι

$$x^{x^2+3x+1}=x \Leftrightarrow x^{x^2+3x+1}-x=0 \Leftrightarrow x\left(x^{x^2+3x}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x=0} \quad ή \quad \mathbf{x^{x^2+3x}=1} \qquad (4)$$

Η (4) αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$\mathbf{x=1} \quad ή \quad \begin{cases} x^2+3x=0 \\ και \\ x\neq 0 \end{cases} \quad (5) \quad ή \quad \begin{cases} x=-1 \\ και \\ x^2+3x \quad \text{άρτιος} \end{cases} \quad (6)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } x=-3 \\ και \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x=-3}$$

(6) $\Leftrightarrow$ **x = −1**, αφού για $x=-1$ είναι $(-1)^2+3(-1)=-2$ άρτιος

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί: **0, 1, −3, −1**

2. • **Αν $\gamma=1$** προφανώς ισχύει η ισότητα

• **Αν $\gamma\neq1$,** αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\log_\gamma(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\log_\gamma(\alpha-\beta)}=2\cdot\frac{1}{\log_\gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{\log_\gamma(\alpha-\beta)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_\gamma(\alpha-\beta)+\log_\gamma(\alpha+\beta)=2$$

$$\Leftrightarrow \log_\gamma(\alpha^2-\beta^2)=2 \quad [\text{αφού } \alpha^2-\beta^2=\gamma^2]$$

$$\Leftrightarrow \log_\gamma\gamma^2=2, \text{ που ισχύει.}$$

3. • **Αν $\theta=1$** προφανώς ισχύει το συμπέρασμα

• **Αν $\theta\neq1$,** έχουμε διαδοχικά:

$$(\alpha\gamma)^{\log_\alpha\beta}=\gamma^2 \Leftrightarrow \log_\theta(\alpha\gamma)^{\log_\alpha\beta}=\log_\theta\gamma^2$$

$$\Leftrightarrow \log_\alpha\beta\cdot\log_\theta(\alpha\gamma)=2\log_\theta\gamma$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_\theta\beta}{\log_\theta\alpha}\cdot(\log_\theta\alpha+\log_\theta\gamma)=2\log_\theta\gamma$$

$$\Leftrightarrow \log_\theta\alpha\cdot\log_\theta\beta+\log_\theta\beta\cdot\log_\theta\gamma=2\log_\theta\gamma\cdot\log_\theta\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_\alpha\theta}\cdot\frac{1}{\log_\beta\theta}+\frac{1}{\log_\beta\theta}\cdot\frac{1}{\log_\gamma\theta}=\frac{2}{\log_\gamma\theta\cdot\log_\alpha\theta}$$

$$\Leftrightarrow \log_\gamma\theta+\log_\alpha\theta=2\log_\beta\theta\ ,$$

που σημαίνει ότι οι αριθμοί $\log_\alpha\theta$, $\log_\beta\theta$, $\log_\gamma\theta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

4. Α΄ μέλος: $$\frac{\log_\alpha\theta-\log_\beta\theta}{\log_\beta\theta-\log_\gamma\theta}=\frac{\dfrac{1}{\log_\theta\alpha}-\dfrac{1}{\log_\theta\beta}}{\dfrac{1}{\log_\theta\beta}-\dfrac{1}{\log_\theta\gamma}}=\frac{\dfrac{\log_\theta\beta-\log_\theta\alpha}{\log_\theta\alpha\cdot\log_\theta\beta}}{\dfrac{\log_\theta\gamma-\log_\theta\beta}{\log_\theta\beta\cdot\log_\theta\gamma}}$$

$$=\frac{\log_\theta\gamma\log_\theta\beta-\log_\theta\alpha)}{\log_\theta\alpha\log_\theta\gamma-\log_\theta\beta)}$$

$$=\frac{\log_\theta\gamma\cdot\log_\theta\dfrac{\beta}{\alpha}}{\log_\theta\alpha\cdot\log_\theta\dfrac{\gamma}{\beta}}=\frac{\log_\theta\gamma}{\log_\theta\alpha}$$

[Επειδή $\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha}$ αφού οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδ. όροι γεωμ. προόδου]

$$=\frac{\frac{1}{\log_\gamma\theta}}{\frac{1}{\log_\alpha\theta}}=\frac{\log_\alpha\theta}{\log_\gamma\theta}$$

5. Είναι $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-\log 2$

Η εξίσωση $x^{\log(2x)}=5$ ορίζεται εφόσον $x>0$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε διαδοχικά:

$$x^{\log(2x)}=5 \Leftrightarrow \log(x^{\log(2x)})=\log 5$$
$$\Leftrightarrow \log(2x)\cdot\log x=\log 5$$
$$\Leftrightarrow (\log 2+\log x)\cdot\log x=1-\log 2$$
$$\Leftrightarrow (\log x)^2+\log 2\cdot\log x-(1-\log 2)=0$$
$$\Leftrightarrow \log x=\frac{-\log 2\pm(\log 2-2)}{2}\left[\text{αφού } \Delta=(\log 2-2)^2\right]$$
$$\Leftrightarrow \log x=-1 \text{ ή } \log x=1-\log 2=\log 5$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x=\frac{1}{10}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{x=5}$$

6. $\log_{\eta\mu x}2+\log_{\sigma\upsilon\nu x}2+\log_{\eta\mu x}2\cdot\log_{\sigma\upsilon\nu x}2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2(\eta\mu x)}+\frac{1}{\log_2(\sigma\upsilon\nu x)}+\frac{1}{\log_2(\eta\mu x)}\cdot\frac{1}{\log_2(\sigma\upsilon\nu x)}=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2(\sigma\upsilon\nu x)+\log_2(\eta\mu x)+1=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2(\sigma\upsilon\nu x)+\log_2(\eta\mu x)+\log_2 2=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)-0$$
$$\Leftrightarrow \log_2(\eta\mu 2x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x=1$$
$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}\quad\left[\text{αφού } 0<2x<\pi\right]$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x=\frac{\pi}{4}}$$

7. $(\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x}=(\sigma\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x}=\frac{1}{(\varepsilon\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x}}$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1 \qquad \left[\text{αφού } \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x>0\right]$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x=\frac{\pi}{4}} \qquad \left[\text{αφού } 0<x<\frac{\pi}{2}\right]$$

8. **i)** Έχουμε διαδοχικά:

$$27^x+12^x-2\cdot 8^x>0 \Leftrightarrow 3^{3x}+2^{2x}\cdot 3^x-2\cdot 2^{3x}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2>0 \quad (1)$$

Αν τώρα θέσουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t$ η ανίσωση (1) γράφεται διαδοχικά

$t^3+t-2>0 \Leftrightarrow (t-1)\,(t^2+t+2)>0$ [Με σχήμα Horner]

$\Leftrightarrow t-1>0$ [αφού $t^2+t+2>0$]

$\Leftrightarrow t>1$

Άρα, λόγω του μετασχηματισμού $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t$, έχουμε:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}>1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x}>\left(\frac{3}{2}\right)^{0} \Leftrightarrow x>0$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε **x>0.**

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. $ημ^2x - 2\sqrt{3}ημxσυνx - συν^2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-συν2x}{2}-\sqrt{3}ημ2x-\frac{1+συν2x}{2}=-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 1-συν2x-2\sqrt{3}ημ2x-1-συν2x=-2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}ημ2x-2συν2x=-2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}ημ2x+συν2x=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2ημ\left(2x+\frac{π}{6}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow ημ\left(2x+\frac{π}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=ημ\frac{π}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{π}{6}=2kπ+\frac{π}{3} \;\; ή \;\; 2x+\frac{π}{6}=2kπ+π-\frac{π}{3},\; k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x=kπ+\frac{π}{12}} \;\; ή \;\; \mathbf{x=kπ+\frac{π}{4}}, \quad \mathbf{k\in Z}$$

2. **i)** **Οπως είναι γνωστό η παράσταση αημx+βσυνx παίρνει τη μορφή**

$$αημx+βσυνx=ρημ(x+φ), \quad με\; ρ=\sqrt{α^2+β^2}$$

Έτσι η δοσμένη εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$αημx+βσυνx=γ \Leftrightarrow ρημ(x+φ)=γ \Leftrightarrow ημ(x+φ)=\frac{γ}{ρ}.$$

Αλλά η εξίσωση αυτή, άρα και η αρχική, έχει λύση αν και μόνο αν:

$$\left|\frac{γ}{ρ}\right|\leqslant 1 \Leftrightarrow |γ|\leqslant|ρ| \Leftrightarrow γ^2\leqslant ρ^2 \Leftrightarrow γ^2\leqslant α^2+β^2$$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i) η εξίσωση αυτή έχει λύση μόνο αν

$$(1+\text{συν}t)^2+\text{ημ}^2 t \geqslant 2^2 \Leftrightarrow 2(1+\text{συν}t) \geqslant 4 \Leftrightarrow 4\text{συν}^2\frac{t}{2} \geqslant 4 \Leftrightarrow \text{συν}^2\frac{t}{2} \geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\text{συν}\frac{t}{2}\right| \geqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \left|\text{συν}\frac{t}{2}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\frac{t}{2} = 1 \qquad \Leftrightarrow t = 0 \quad \left(\text{αφού } -\frac{\pi}{2} < \frac{t}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

Για την τιμή αυτή του t η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$(1+\text{συν}0)\text{ημ}x+\text{ημ}0\cdot\text{συν}x = 2 \Leftrightarrow 2\text{ημ}x = 2 \Leftrightarrow \text{ημ}x = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad \mathbf{k \in Z}.$$

3. • $\text{εφ}3\alpha = \text{εφ}(2\alpha+\alpha) = \dfrac{\text{εφ}2\alpha+\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}2\alpha\cdot\text{εφ}\alpha} = \dfrac{\dfrac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha}+\text{εφ}\alpha}{1-\dfrac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha}\cdot\text{εφ}\alpha} = \dfrac{3\text{εφ}\alpha-\text{εφ}^3\alpha}{1-3\text{εφ}^2\alpha}$

• Αν τώρα αντικαταστήσουμε το α με $\dfrac{\pi}{12}$ έχουμε:

$$\text{εφ}\frac{\pi}{4} = \frac{3\text{εφ}\frac{\pi}{12}-\text{εφ}^3\frac{\pi}{12}}{1-3\text{εφ}^2\frac{\pi}{12}} \Leftrightarrow 1 = \frac{3\text{εφ}\frac{\pi}{12}-\text{εφ}^3\frac{\pi}{12}}{1-3\text{εφ}^2\frac{\pi}{12}}$$

$$\Leftrightarrow \text{εφ}^3\frac{\pi}{12}-3\text{εφ}^2\frac{\pi}{12}-3\text{εφ}\frac{\pi}{12}+1=0$$

που σημαίνει ότι η $\text{εφ}\dfrac{\pi}{12}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$x^3-3x^2-3x+1=0$$

• Η εξίσωση αυτή λύνεται ως εξής:

$$x^3-3x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow (x^3+1)-3x(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x=-1} \;\; \text{ή} \;\; \mathbf{x=2-\sqrt{3}} \;\; \text{ή} \;\; \mathbf{x=2+\sqrt{3}}$$

Επειδή $\text{εφ}\dfrac{\pi}{12} < 1$ θα είναι $\mathbf{\text{εφ}\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}}$.

4. Ο αριθμός «αβγδ» γράφεται

$$«\alpha\beta\gamma\delta» = \alpha 10^3+\beta 10^2+\gamma 10+\delta$$

Έστω το πολυώνυμο $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Τότε θα είναι

$$f(10) = «\alpha\beta\gamma\delta» \text{ και } f(1)=\alpha+\beta+\gamma+\delta$$

Είναι γνωστό ότι $f(x)=(x-1)\pi(x)+f(1)$, οπότε, για $x=10$, έχουμε

$$f(10)=(10-1)\Pi(10)+f(1)$$

$$\text{ή } «\alpha\beta\gamma\delta»=9\cdot\Pi(10)+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει αμέσω ότι, αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ είναι πολλαπλάσιο του 9, τότε και ο αριθμός «αβγδ» είναι πολλαπλάσιο του 9 και αντιστρόφως, πράγμα που αποδεικνύει τον κανόνα.

5. i) Οι διαιρέτες του 1 είναι ± 1, ενώ του 2 είναι ± 1, ± 2, οπότε οι πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης είναι ± 1, $\pm\frac{1}{2}$.

Αν θέσουμε $P(x)=2x^3+x^2+x-1$, με το σχήμα Horner για $\rho=1$, $\rho=-1$ βρίσκουμε $P(1)=3\neq 0$, $P(-1)=-3\neq 0$, ενώ για $\rho=\frac{1}{2}$ έχουμε:

2	1	1	−1	$\rho=\frac{1}{2}$
	1	1	1	
2	2	2	0	

Επομένως η εξίσωση γίνεται

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)=0 \text{ ή } (2x-1)(x^2+x+1)=0$$

και έχει ρίζα το $x=\frac{1}{2}$ μόνο.

• Οι διαιρέτες του 1 είναι ± 1, ενώ του 6 είναι ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, οπότε οι πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης είναι ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{6}$.

Επειδή όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι θετικοί δοκιμάζουμε μόνο τα αρνητικά -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6}$.

Αν θέσουμε $P(x)=6x^4+29x^3+27x^2+9x+1$, με το σχήμα Horner για $\rho=-1$ βρίσκουμε $P(-1)=-4\neq 0$, ενώ για $\rho=-\frac{1}{2}$ έχουμε:

6	29	27	9	1	$\rho=-\frac{1}{2}$
	−3	−13	−7	−1	
6	26	14	2	0	

οπότε $P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(6x^3+26x^2+14x+2)$

$$=(2x+1)(3x^3+13x^2+7x+1)$$

Αν εργασθούμε ανάλογα με το $\Pi(x)=3x^3+13x^2+7x+1$ για $\rho=-\frac{1}{3}$ έχουμε:

3	13	7	1	$\rho=-\frac{1}{3}$
	-1	-4	-1	
3	12	3	0	

οπότε $\Pi(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2+12x+3)$

$$=(3x+1)(x^2+4x+1)$$

Επομένως η εξίσωση γίνεται

$$(2x+1)(3x+1)(x^2+4x+1)=0$$

και έχει ρίζες $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_3=-2-\sqrt{3}$ και $x_4=-2+\sqrt{3}$.

ii) Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-2=0$. Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι αυτή δεν έχει ρητές ρίζες. Οι πιθανές ρητές ρίζες αυτής είναι ±1, ±2. Όμως καμία από αυτές δεν επαληθεύει την εξίσωση, οπότε η εξίσωση δεν έχει ρητές ρίζες. Αυτό σημαίνει ότι ο $\sqrt{2}$ που είναι ρίζα της, δεν είναι ρητός.

Η απόδειξη για το $\sqrt{12}$ είναι ανάλογη.

6. 1ος τρόπος

Επειδή $3^2+4^2=5^2$ μια λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $x=2$ θα δείξουμε τώρα ότι η λύση αυτή είναι μοναδική. Πράγματι αν $\varrho\neq2$ ήταν μια άλλη λύση της εξίσωσης, τότε θα ισχύει:

$$3^\varrho+4^\varrho=5^\varrho \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^\varrho+\left(\frac{4}{5}\right)^\varrho=1 \quad (1)$$

Επειδή οι συναρτήσεις $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ και $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσες,

- αν $\varrho<2$, τότε $\left(\frac{3}{5}\right)^\varrho>\left(\frac{3}{5}\right)^2$ και $\left(\frac{4}{5}\right)^\varrho>\left(\frac{4}{5}\right)^2$, οπότε:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^\varrho+\left(\frac{4}{5}\right)^\varrho>\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1 \quad \text{(άτοπο, λόγω της 1)}$$

- αν $\varrho>2$, τότε $\left(\frac{3}{5}\right)^\varrho<\left(\frac{3}{5}\right)^2$ και $\left(\frac{4}{5}\right)^\varrho<\left(\frac{4}{5}\right)^2$, οπότε:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^\varrho+\left(\frac{4}{5}\right)^\varrho<\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1 \quad \text{(άτοπο, λόγω της 1)}$$

2ος τρόπος. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 2$, που είναι και μοναδική. Πράγματι, η εξίσωση γράφεται:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ είναι **γνησίως φθίνουσα**, ενώ η $g(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ είναι **γνησίως αύξουσα.** Επομένως:

- Αν $x<2$, τότε $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 > \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{25}{16}$, ενώ $\left(\frac{5}{4}\right)^x < \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

Άρα $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 > \left(\frac{5}{4}\right)^x$ και επομένως δεν υπαρχει ρίζα της (1) μικρότερη του 2.

- Αν $x>2$, τότε $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 < \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{25}{16}$, ενώ $\left(\frac{5}{4}\right)^x > \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

Άρα $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 < \left(\frac{5}{4}\right)^x$ και επομένως δεν υπάρχει ρίζα της (1) μεγαλύτερη του 2.

Επομένως η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $\mathbf{x = 2}$.

7. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $\mathbf{x = 1}$. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3}$ είναι **γνησίως φθίνουσα,** ενώ η συνάρτηση $g(x) = 2^x$ είναι **γνησίως αύξουσα,** αν εργασθούμε όπως στην προηγούμενη άσκηση αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη λύση.

8. Η εξίσωση ορίζεται εφόσον

$$x+3>0 \quad \text{και} \quad \alpha x>0.$$

Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε:

$$\begin{aligned} 2\log(x+3) = \log(\alpha x) &\Leftrightarrow \log(x+3)^2 = \log(\alpha x) \\ &\Leftrightarrow (x+3)^2 = \alpha x \\ &\Leftrightarrow x^2 - (\alpha-6)x + 9 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Η διακρίνουσα της (1) ισούται με

$\Delta = (\alpha-6)^2 - 36 = \alpha^2 - 12\alpha = \alpha(\alpha-12)$

και το πρόσημό της περιγράφεται από τον επόμενο πίνακα:

α	$-\infty$		0		12		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

Επομένως:

• Αν **α<0**, τότε η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες αρνητικές, αφού $x_1 \cdot x_2 = 9>0$ και $x_1+x_2 = \alpha-6<0$

Επειδή για το τριώνυμο $f(x) = x^2-(\alpha-6)x+9$ ισχύει

$$f(-3) = (-3)^2 - (\alpha-6)(-3)+9 = 3(\alpha-6)<0$$

το -3 θα βρίσκεται μεταξύ τών ριζών x_1, x_2 της (1). Επομένως θα ισχύει:

$$x_1<-3<x_2<0$$

Επειδή ομως α<0, λόγω της (*), η αρχική εξίσωση ορίζεται εφόσον $-3<x<0$. Επομένως από τις παραπάνω ρίζες x_1, x_2 δεκτή είναι μόνο μία η x_2.

Άρα για α<0 η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα.

• Αν **α = 0** δεν ορίζεται ο log(αx)

• Αν **0<α<12** η εξίσωση (1), άρα και η αρχική, είναι αδύνατη.

• Αν **α = 12** η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια ρίζα, την x=3, που είναι και ρίζα της αρχικής αφού, λόγω της (*), πρέπει x>0.

• Τέλος αν **α>12** η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες θετικές, αφού

$$x_1 \cdot x_2 = 9>0 \text{ και } x_1+x_2 = \alpha-6>0$$

Επειδή όμως α>12, λόγω της (4), η αρχική εξίσωση ορίζεται εφόσον x>0. Επομένως και οι δύο ρίζες x_1, x_2 της (1) είναι δεκτές. Άρα για α>12 η αρχική εξίσωση έχει δύο ρίζες.

Αν τώρα λάβουε υπόψη όλα τα προηγουμενα συμπεραίνουμε ότι η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση μόνο αν **α<0 ή α=12.**

9. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x=\frac{\pi}{4}$. Για να αποδείξουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική εργαζόμαστε ως εξής:

Η εξίσωση γράφεται:

$$\log_{\pi/4} x = 2-\sigma\varphi x$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\log_{\pi/4} x$ είναι **γνησίως φθίνουσα,** ενώ η $g(x) = 2-\sigma\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \pi)$. Επομένως:

• Αν $\mathbf{x<\frac{\pi}{4}}$, τότε $\log_{\pi/4} x>\log_{\pi/4}\frac{\pi}{4} = 1$, ενώ $2-\sigma\varphi x<2-\sigma\varphi\frac{\pi}{4} = 1$

Άρα $\log_{\pi/4} x>2-\sigma\varphi x$ και επομένως η εξίσωση (1) **δεν** έχει λύση στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{4})$.

• Αν $\mathbf{x>\frac{\pi}{4}}$, τότε $\log_{\pi/4} x<\log_{\pi/4}\frac{\pi}{4}=1$, ενώ $2-\sigma\varphi x>2-\sigma\varphi\frac{\pi}{4}=1$

Άρα $\log_{\pi/4} x<2-\sigma\varphi x$ και επομένως η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο διάστημα $(\frac{\pi}{4},\pi)$.

Επομένως η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $\mathbf{x=\frac{\pi}{4}}$.

10. Η ανίσωση ορίζεται εφόσον:

$$16^x-2\cdot 12^x>0 \Leftrightarrow 16^x>2\cdot 12^x \Leftrightarrow \left(\frac{16}{12}\right)^x>2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x>2 \qquad (1)$$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\log_3(16^x-2\cdot 12^x)\le 2x+1 \Leftrightarrow \log_3(16^x-2\cdot 12^x)\le \log_3 3^{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 16^x-2\cdot 12^x\le 3^{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 4^{2x}-2\cdot 3^x\cdot 4^x\le 3\cdot 3^{2x} \quad [\text{διαιρούμε με } 3^{2x}]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-2\left(\frac{4}{3}\right)^x-3\le 0 \qquad (2)$$

Αν θέσουμε $\left(\frac{4}{3}\right)^x=t$, τότε η (2) γράφεται:

$$t^2-2t-3\le 0 \Leftrightarrow -1\le t\le 3$$

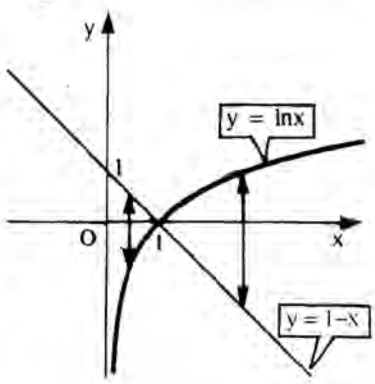
[αφού οι ρίζες της: $t^2-2t-3=0$ είναι $t_1=3$ και $t_2=-1$]

Επομένως, λόγω του μετασχηματισμού: $\left(\frac{4}{3}\right)^x=t$, και λόγω της (1), έχουμε:

$$2\le\left(\frac{4}{3}\right)^x\le 3 \Leftrightarrow \log 2<x\log\frac{4}{3}\le\log 3 \Leftrightarrow \log 2<x(\log 4-\log 3)\le\log 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log 2}{\log 4-\log 3}<x\le\frac{\log 3}{\log 4-\log 3} \Leftrightarrow \mathbf{2,4094<x\le 3,8188}$$

11. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δίνονται στο διπλανό σχήμα.



Η ανίσωση $\ln x\le 1-x$, που ορίζεται εφόσον $x>0$, αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $f(x)\le g(x)$. Όπως φαίνεται στο σχήμα, αυτό συμβαίνει αν $0<x\le 1$ και αποδεικνύεται ως εξής:

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως:

• Αν **$0<x\le 1$**, τότε $f(x)\le f(1)$

ή $\ln x\le 0$, ενώ $g(x)\ge g(1)$ ή $1-x\ge 0$, οπότε $\ln x\le 1-x$.

Άρα κάθε $x\in(0, 1]$ είναι λύση της ανίσωσης $\ln x\le 1-x$.

• Αν **$x>1$**, τότε $f(x)>f(1)$ ή $\ln x>0$, ενώ $g(x)<g(1)$ ή $1-x<0$, οπότε $\ln x>1-x$.

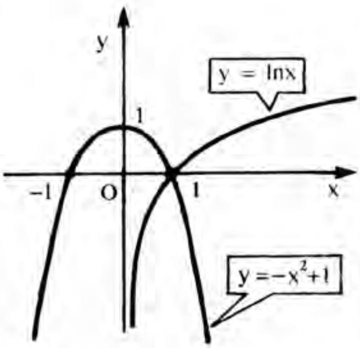
Άρα κανένα $x\in(1, +\infty)$ δεν επαληθεύει την $\ln x\le 1-x$.
Επομένως η ανίσωση αληθεύει για καθε $x\in(0, 1]$.

2ος τρόπος

• Αν **$0<x\le 1$**, τότε $\ln x\le 0$ και $1-x\ge 0$, οπότε $\ln x\le 1-x$,

• Αν **$x>1$**, τότε $\ln x>0$ και $1-x<0$, οπότε $\ln x>1-x$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(0,1]$.



ii) Αν εργασθούμε όπως στο (i) ερώτημα βρίσκουμε ότι η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in[1, +\infty)$

12. Αν θέσουμε $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}=\lambda$, έχουμε

$\alpha=\lambda\eta\mu A$, $\quad\beta=\lambda\eta\mu B\quad$ και $\quad\gamma=\lambda\eta\mu\Gamma$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A &= \lambda^2\eta\mu^2B+\lambda^2\eta\mu^2\Gamma-2\lambda\eta\mu B\cdot\lambda\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A\\
&= \lambda^2(\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma-2\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A)\\
&= \lambda^2[\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)] \quad (\text{αφού } A+B+\Gamma=\pi)\\
&= \lambda^2[\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\eta\mu\Gamma(\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu B\eta\mu\Gamma)]\\
&= \lambda^2[\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma-2\eta\mu^2B\eta\mu^2\Gamma]\\
&= \lambda^2[\eta\mu^2B-\eta\mu^2B\eta\mu^2\Gamma+\eta\mu^2\Gamma-\eta\mu^2B\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma]\\
&= \lambda^2[\eta\mu^2B(1-\eta\mu^2\Gamma)+\eta\mu^2\Gamma(1-\eta\mu^2B)+2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma]\\
&= \lambda^2(\eta\mu^2B\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+\sigma\upsilon\nu^2B\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma)\\
&= \lambda^2(\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma)^2\\
&= \lambda^2\eta\mu^2(B+\Gamma)\\
&= \lambda^2\eta\mu^2A\\
&= \alpha^2
\end{aligned}$$

13. Ισχύει $\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$

οπότε
$$\frac{\eta\mu A}{\alpha} = \frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 A}}{\alpha} = \frac{\sqrt{(2\beta\gamma)^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2}}{2\beta\gamma\alpha} = \frac{\sqrt{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}}{2\alpha\beta\gamma} = \varrho$$

Το δεύτερο μέλος είναι συμμετρικό ως προς α,β,γ άρα και τα πηλίκα $\dfrac{\eta\mu B}{\beta}$, $\dfrac{\eta\mu \Gamma}{\gamma}$ είναι ίσα προς αυτό.

Για να αποδείξουμε ότι $A+B+\Gamma = \pi$ αρκεί να δείξουμε ότι:
$$\eta\mu(A+B) = \eta\mu\Gamma \text{ και } \sigma\upsilon\nu(A+B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$
Είναι:

- $$\begin{aligned}\eta\mu(A+B) &= \eta\mu A\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B\\ &= \varrho\alpha\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} + \varrho\beta\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} && \left(\text{Επειδή } \frac{\eta\mu A}{\alpha} = \frac{\eta\mu B}{\beta} = \varrho\right)\\ &= \varrho\frac{2\gamma^2}{2\gamma} = \varrho\gamma = \eta\mu\Gamma && \left(\text{Επειδή } \frac{\eta\mu\Gamma}{\gamma} = \varrho\right)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu(A+B) &= \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B - \eta\mu A\eta\mu B\\ &= \frac{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)}{4\gamma^2\alpha\beta} - \varrho^2\alpha\beta\\ &= \frac{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)}{4\gamma^2\alpha\beta} - \frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{4\gamma^2\alpha\beta}\\ &= \frac{-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2+2\gamma^4}{4\gamma^2\alpha\beta}\\ &= -\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} = -\sigma\upsilon\nu\Gamma\end{aligned}$$

14. Αρκεί να δείξουμε ότι: $\alpha<\beta+\gamma$ και $\beta<\alpha+\gamma$ και $\gamma<\alpha+\beta$

Αν θέσουμε $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = \lambda$ έχουμε:

$\alpha = \lambda\eta\mu A$, $\quad\beta = \lambda\eta\mu B$, $\quad\gamma = \lambda\eta\mu\Gamma$

Επομένως

$$\begin{aligned}\alpha<\beta+\gamma &\Leftrightarrow \lambda\eta\mu A<\lambda\eta\mu B+\lambda\eta\mu\Gamma\\ &\Leftrightarrow \eta\mu A<\eta\mu B+\eta\mu\Gamma\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ ημ(Β+Γ)<ημΒ+ημΓ
$\Leftrightarrow$ ημΒσυνΓ+συνΒημΓ<ημΒ+ημΓ
$\Leftrightarrow$ 0<ημΒ(1-συνΓ)+ημΓ(1-συνΒ) που ισχύει

Ομοια αποδεικνύουμε και τις β<α+γ, γ<α+β.
Αρα υπάρχει τρίγωνο ΚΛΜ με (ΛΜ)=α, (ΚΜ)=β, (ΚΛ)=γ.
Από την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι:

$$συνA = συνK = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$συνB = συν\Lambda = \frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}$$

$$συν\Gamma = συνM = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$$

Αρα Α=Κ, Β=Λ, Γ=Μ.

Σχόλιο. Η άσκηση 14 μας δείχνει ότι το θεώρημα των συνημιτόνων, προκύπτει από το θεώρημα των ημιτόνων και την σχέση Α+Β+Γ = 180^o αλγεβρικά χωρίς άλλη αναφορά στην γεωμετρία του τριγώνου. Η άσκηση 20, μας λέει παραπέρα ότι το θεώρημα των ημιτόνων και η σχέση Α+Β+Γ = 180^o περιέχουν όλες τις πληροφορίες που αφορούν τις πλευρές και γωνίες ενός τριγώνου, οι οποίες ισχύουν γενικά για όλα τα τρίγωνα.

15. Είναι συνδυασμός των ασκήσεων 13 και 14.

Σχόλιο. Η προηγούμενη άσκηση δείχνει ότι οι τρεις σχέσεις του θεωρήματος των συνημιτόνων περικλείουν όλες τις πληροφορίες που αφορούν γωνίες και πλευρές ενός τυχαίου τριγώνου.

Κωδικός Βιβλίου: 0-22-0208

ISBN 978-960-06-3293-4

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 22 0208 2