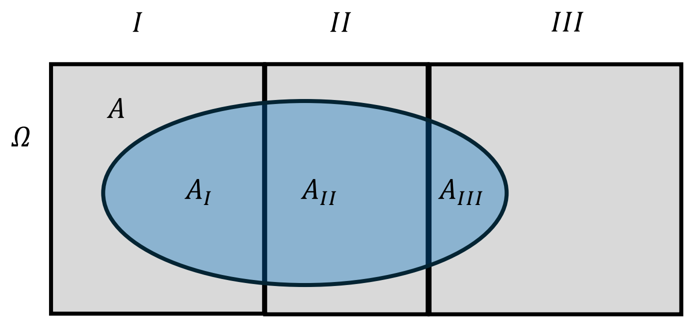
Θεώρημα ολικής πιθανότητας

Εάν ο δειγματοχώρος μου αποτελείται από ξένα μεταξύ τους συμπληρωματικά σύνολα, π.χ. όπως οι I, II και III στο σχήμα ώστε $\Omega = I \cup II \cup III$ και A ένα γεγονός το οποίο έχει επικάλυψη με όλες αυτές τις διαμερίσεις του Ω, τότε ισχύει το θεώρημα της ολικής πιθανότητας



$$P(A) = P(I)P(A|I) + P(II)P(A|II) + P(III)P(A|III)$$

<u>Παράδειγμα</u>:

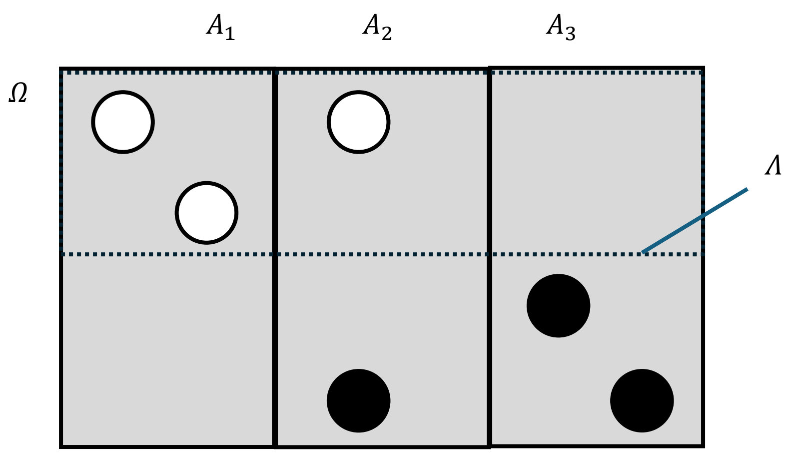
Έστω 3 κάλπες A_1, A_2, A_3 οι οποίες περιέχουν σφαίρες, η πρώτη δύο λευκές η δεύτερη μία μαύρη και μία λευκή και η τρίτη δύο μαύρες. Επιλέγουμε τυχαία μία κάλπη και στη συνέχεια επιλέγουμε από αυτήν τυχαία μία σφαίρα. Ποια η πιθανότητα η σφαίρα που θα επιλέξουμε να είναι λευκή;

<u>Λύση</u>:

Έχουμε δυο γεγονότα:

Α: Επιλογή κάλπης

Λ: Επιλογή λευκής σφαίρας.



Το Λ είναι το οριζόντιο ορθογώνιο με διακεκομμένη γραμμή

$$P(\Lambda) = P(A_1)P(\Lambda|A_1) + P(A_2)P(\Lambda|A_2) + P(A_3)P(\Lambda|A_3)$$

Ισοπίθανες κάλπες $P(A_i) = 1/3$ για $i = 1,2,3$

Η πρώτη κάλπη έχει μόνο λευκές σφαίρες και έτσι

$$P(Λ|A_1) = \frac{2}{2} = 1$$

Η δεύτερη κάλπη έχει μία και η τρίτη καμία

$$P(Λ|A_2) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P(Λ|A_3) = \frac{0}{2} = 0$$

$$P(Λ) = \frac{1}{3}(1 + 0.5 + 0) = 0.5$$

Παράδειγμα: Στο προηγούμενο παράδειγμα, έστω ότι επέλεξα λευκή σφαίρα. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει προέλθει από τη πρώτη κάλπη;

Λύση: Γνωρίζω σίγουρα ότι έχω λευκή μέρα στα χέρια μου άρα πρόκειται για δεσμευμένη πιθανότητα

$$P(A_1|Λ)$$

Γνωρίζω το αντίστροφο $P(Λ|A_1) = 1$ Και άρα εφαρμόζω το θεώρημα Bayes

$$P(A_1|Λ) = \frac{P(Λ|A_1)P(A_1)}{P(Λ)} = \frac{1 \times 1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Συνδυάζοντας τους 2 τύπους, δηλαδή το θεώρημα του Bayes και την ολική πιθανότητα, καμιά φορά η παραπάνω πιθανότητα γράφεται και ως

$$P(A_1|Λ) = \frac{P(Λ|A_1)P(A_1)}{P(A_1)P(Λ|A_1) + P(A_2)P(Λ|A_2) + P(A_3)P(Λ|A_3)}$$

ΚΕΦ 3 Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Υπάρχουν δυο ειδών τυχαίων μεταβλητών, οι διακριτές και η συνεχείς. Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε τις διακριτές. Αλλά τι είναι οι τυχαίες μεταβλητές;

Θεωρήστε το παράδειγμα όπου ρίχνουμε κορώνα γράμματα δύο φορές. Ο δειγματοχώρος είναι ο εξής

$$Ω = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$$

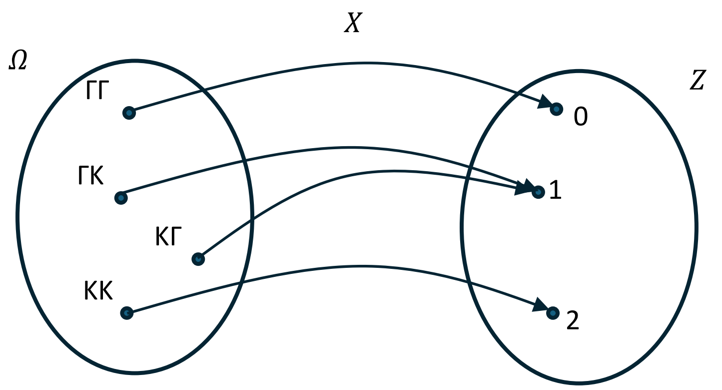
Μπορώ να ορίσω μια συνάρτηση η οποία σε κάθε γεγονός του δειγματοχώρου να μου δίνει έναν ακέραιο αριθμό ή πραγματικό αριθμό. Για παράδειγμα μπορώ να ορίσω τη συνάρτηση "αριθμός κεφαλών". Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται τυχαία μεταβλητή X, για διακριτές

$$X: \Omega \rightarrow Z$$

ενώ για συνεχείς

$$X: \Omega \rightarrow R$$

Η απεικόνιση αυτής της συνάρτησης είναι η παρακάτω



Οι τιμές της X συμβολίζονται με μικρά γράμματα, εδώ π.χ. $x = 0,1,2$

Ορίζω και τη συνάρτηση πιθανότητας P_X Η οποία αντιστοιχεί στην κάθε μεταβλητή x και μια τιμή πιθανότητας μέσα στο διάστημα [0,1] και πρέπει

$$\sum_x P_X(x) = 1$$

Π.χ. Η πιθανότητα να έρθει καμία κεφαλή, δηλαδή $x = 0$ είναι η πιθανότητα να έρθει το γεγονός $ΓΓ$, δηλαδή $P_X(0) = P(ΓΓ) = 1/4$

Η πιθανότητα να έρθει μία κεφαλή, δηλαδή $x = 1$ είναι η πιθανότητα να έρθει το γεγονός $ΚΓ$ ή $ΓΚ$, δηλαδή $P_X(1) = P(ΚΓ \cup ΓΚ) = P(ΚΓ) + P(ΓΚ) = 1/2$

Η πιθανότητα να έρθουν δυο κεφαλές, δηλαδή $x = 2$ είναι η πιθανότητα να έρθει το γεγονός $ΚΚ$, δηλαδή $P_X(2) = P(ΚΚ) = 1/4$

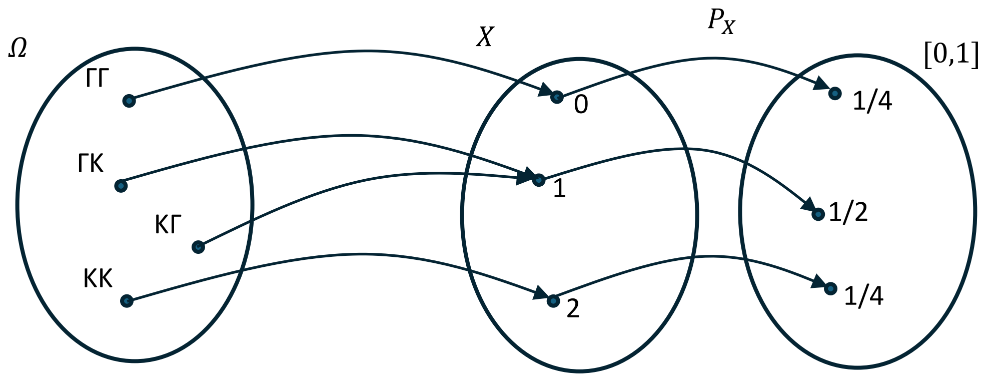
Επομένως η συνάρτηση $P_X(x)$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/4 & για\ x = 0 \\ 1/2 & για\ x = 1 \\ 1/4 & για\ x = 2 \end{cases}$$

πληροί τα κριτήρια πιθανότητας αφού για κάθε x ισχύει $0 \leq P_X(x) \leq 1$ και επιπλέον

$$\sum_x P_X(x) = P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) = 1$$

Σαν απεικόνιση, η συνάρτηση X φαίνεται παρακάτω



<u>Παράδειγμα</u>: Η διαδοχή ρίψη ενός ζαριού 2 φορές. Έχουμε ξαναδεί το δειγματοχώρο

Ζάρι 1:	1	2	3	4	5	6
Ζάρι 2:						
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Ορίζω την τυχαία συνάρτηση Δημήτρης η οποία είναι ο αριθμός των τεσσαριών στις 2 ρίψεις

X: «αριθμός των τεσσαριών»

$$x = 0,1,2$$

Από τον πίνακα

$$P_X(1) = 10/36$$

$$P_X(2) = 1/36$$

ενώ από τις ιδιότητες της πιθανότητας

$$P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) = 1$$

$$P_X(0) = 1 - \frac{10}{36} - \frac{1}{36} = \frac{25}{36}$$

Οι ίδιοι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν με τη βοήθεια των τύπων που ξέρουμε μέχρι τώρα. Έστω τα παρακάτω 2 γεγονότα

A1: « να έρθει 4 στην πρώτη ρίψη»

A2: « να έρθει 4 στη δεύτερη ρίψη»

$$P_X(2) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Ζάρι 1:	1	2	3	4	5	6
Ζάρι 2:						
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66