Γεγονός Β|Α: "Πραγματοποίηση του γεγονότος Β αφού έχει πραγματοποιηθεί το γεγονός Α"

Για ανεξάρτητα γεγονότα,

$$P(B|A) = P(B)$$

Ζάρι 1:	1	2	3	4	5	6
Ζάρι 2:						
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Απλό γεγονός Α1: «να φέρω 4 στην 1η ρίψη», $P(A_1) = 1/6$

Απλό γεγονός Α2: «να φέρω 4 στην 2η ρίψη, δεδομένου του Α1 στην 1η ρίψη» $P(A_2|A_1) = 1/6$

Σύνθετο γεγονός Κ: «να φέρω 4 και 4»

$$P(K) = \frac{1}{36} = P(A_1)P(A_2|A_1)$$

Το Κ είναι η τομή των A_1 και A_2

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$$

Για ανεξάρτητα γεγονότα, έχουμε το εξής:

$$P(A_2|A_1) = P(A_2)$$

και άρα $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

Για μη ανεξάρτητα γεγονότα, έχουμε το εξής:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$$

Παράδειγμα: Έχω κληρωτίδα με έξι σφαίρες 1,2,3,4,5,6

Τραβώ χωρίς να βλέπω μια σφαίρα και έρχεται το 2 με πιθανότητα $P(2) = 1/6$

Εάν δεν επανατοποθετήσω την σφαίρα 2 στην κληρωτίδα, ποια είναι η πιθανότητα σε νέο τράβηγμα να φέρω 3 ; Τώρα ο νέος δειγματοχώρος είναι ο

$$\Omega_2 = \{1,3,4,5,6\}$$

και άρα $P(3|2) = 1/5$

Ποια η πιθανότητα του Κ: να τραβήξω 2-3 διαδοχικά;

$$P(K) = P(2)P(3|2) = \frac{1}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

Αλλάζουν οι πιθανότητες

$$P(3|3) = 0$$

Για τον δειγματοχώρο τράπουλα, σύνθετο γεγονός

Κ: Να έρθει κούπα-φιγούρα. Δυο διαφορετικά πειράματα:

(α) Επιλέγεις από όλη την τράπουλα ένα φύλλο

(β) Χωρίζω την τράπουλα σε 4 πακέτα σειρές, επιλέγεις ένα πακέτο, Α: να επιλεγούν κούπες, και ακολούθως επιλέγεις από το πακέτο ένα φύλλο

♣		Α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Β	Ν	Π
♥		Α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Β	Ν	Π
♠		Α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Β	Ν	Π
♦		Α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Β	Ν	Π

(α) Πλήθος Κ είναι 3 επί συνόλου 52 φύλλων

$$P(K) = \frac{n(K)}{n(\Omega)} = \frac{3}{52}$$

(β) Τέσσερα πακέτα, επιλέγω το ένα

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Άπαξ επιλέξουμε το πακέτο με τις κούπες, που είναι η δεύτερη σειρά, τότε ο δειγματοχώρος αλλάζει από τον Ω στον $\tilde{\Omega}$ που είναι σχηματικά ο εξής:

♥	Α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Β	Ν	Π

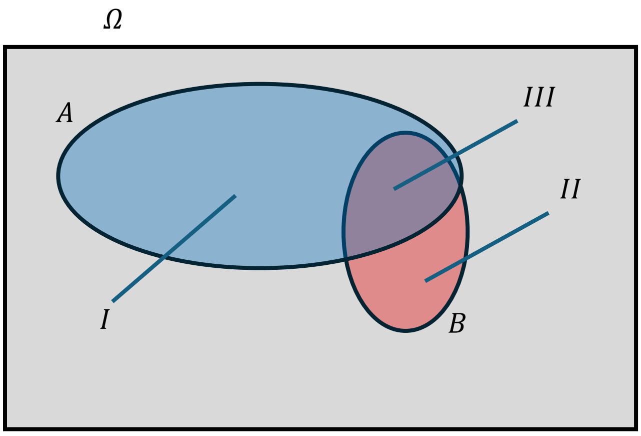
Μένουν 13 φύλλα, θέλω τις τρεις φιγούρες, αλλάζει ο δειγματοχώρος => αλλάζει το πλήθος του $n(\tilde{\Omega}) = 13$

$$P(B|A) = \frac{n(B)}{n(\tilde{\Omega})} = \frac{3}{13}$$

Σύνθετο γεγονός Κ είναι η τομή

$$P(K) = P(B|A)P(A) = \frac{3}{13}\frac{1}{4} = \frac{3}{52}$$

Με την βοήθεια των διαγραμμάτων Venn να αποδείξουμε τον παραπάνω τύπο



Κατά τα γνωστά

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Αλλάζει τώρα ο δειγματοχώρος $\Omega \to A$ και έτσι

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Παίρνω γινόμενο

$$P(B|A)P(A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} =>$$

$$P(B|A)P(A) = P(A \cap B)$$

Εάν αλλάξουμε την φορά $A \leftrightarrows B$ τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$P(A|B)P(B) = P(B \cap A)$$

Λόγω όμως αντιμεταθετικότητας της τομής, ισχύει $A \cap B = B \cap A$ και έτσι τα δεύτερα μέλη είναι ίσα => και τα πρώτα

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

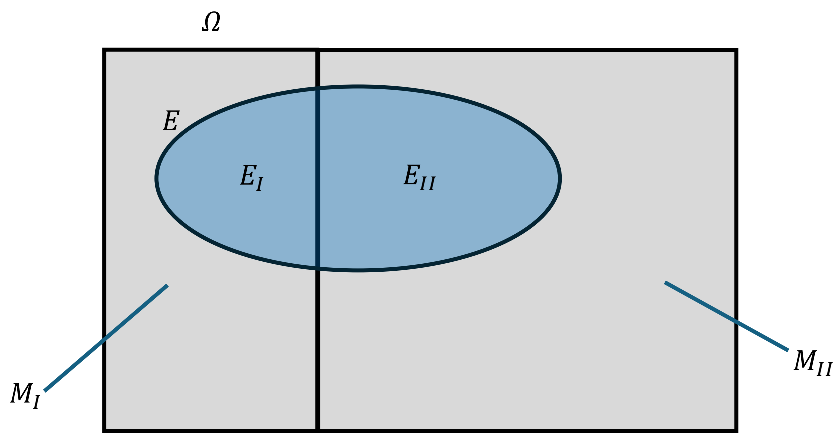
ή

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Θεώρημα Bayes, μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά από $A \to B$ σε $B \to A$.

<u>Παράδειγμα</u>: Σε μία βιομηχανία η μηχανή M_I παράγει το 60% των ανταλλακτικών και η μηχανή M_{II} το 40%. Η πιθανότητα το ανταλλακτικό να είναι ελαττωματικό είναι 5% και 10% για τις μηχανές M_I και M_{II} αντίστοιχα. Ποια η πιθανότητα ένα ανταλλακτικό να είναι ελαττωματικό;

Λύση: Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τον δειγματοχώρο του προβλήματος. Το M_I είναι τα ανταλλακτικά που φτιάχνει η πρώτη μηχανή, έστω π.χ. σε ένα μήνα, και M_{II} είναι τα ανταλλακτικά που φτιάχνει η δεύτερη μηχανή, στο ίδιο προφανώς χρονικό διάστημα. Το σύνολο E είναι το σύνολο των ελαττωματικών ανταλλακτικών το οποίο χωρίζεται στο σύνολο E_I των ελαττωματικών ανταλλακτικών μόνο της M_I και E_{II} αντίστοιχα της M_{II}. Προσέξτε ότι αυτά τα δυο σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους.



Από τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε

$$P(M_I) = 0.6$$

$$P(M_{II}) = 0.4$$

$$P(E|M_I) = 0.05$$

$$P(E|M_{II}) = 0.10$$

Αφού τα E_I και E_{II} είναι ξένα μεταξύ τους, ισχύει ο απλός νόμος της ένωσης:

$$P(E) = P(E_I) + P(E_{II})$$

Τα E_I και E_{II} είναι τομές του E με τα M_I και M_{II} αντίστοιχα, οπότε ισχύει για αυτά οι παραπάνω κανόνες της τομής:

$$P(E_I) = P(E|M_I)P(M_I)$$

και

$$P(E_{II}) = P(E|M_{II})P(M_{II})$$

Συνδυάζοντας

$$P(E) = P(E|M_I)P(M_I) + P(E|M_{II})P(M_{II})$$

Ο παραπάνω τύπος είναι γνωστός ως ο <u>κανόνας της ολικής πιθανότητας</u>. Αντικαθιστώντας

$$P(E) = 0.05 \times 0.6 + 0.10 \times 0.4 = 0.07$$

(Προσέξτε ότι στους υπολογισμούς δεν βάζουμε αριθμούς % αλλά κανονικοποιημένα νούμερα στο 1)