

Μεταθέσεις με πολλαπλότητα

A,A,A,Π,Π, δηλαδή το A εμφανίζεται τρεις φορές και το Π δυο

ΠΠΑΑΑ, ΠΑΠΑΑ, ΠΑΑΠΑ, ΠΑΑΑΠ, ΑΠΠΑΑ, ΑΠΑΠΑ, ΑΠΑΑΠ, ΑΑΠΠΑ, ΑΑΠΑΠ, ΑΑΑΠΠ

Γενικά εάν έχω n_1 όμοια αντικείμενα, n_2 άλλα όμοια αντικείμενα ... n_M άλλα όμοια αντικείμενα,

έτσι ώστε $n_1 + n_2 + \dots + n_M = n$

Πλήθος

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_M!}$$

Π.χ. στο παραπάνω παράδειγμα

$$\frac{5!}{3! 2!} = 10$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ – ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

Έστω δυο γεγονότα A και B με χρονολογική σειρά, τότε η πιθανότητα να συμβεί το B δεδομένου ότι έχει ήδη συμβεί το A, συμβολίζεται ως

$$P(B|A)$$

και ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα.

Παράδειγμα: Έχω ένα σακί με δυο γαλάζιες Γ και μια κόκκινη Κ σφαίρες και τοποθετώ το χέρι μου μέσα στο σακί δυο φορές και εξετάζω τα γεγονότα A: να έρθει γαλάζια στην πρώτη φορά και B: να έρθει γαλάζια στην δεύτερη φορά εάν έχει έρθει και την πρώτη. Μπορώ να εκτελέσω το πείραμα με δυο διαφορετικούς τρόπους (α) με επανατοποθέτηση της πρώτης σφαίρας ξανά πίσω στο σακί και (β) Χωρίς επανατοποθέτηση.

(α) Αφού ο δειγματοχώρος της πρώτης φοράς είναι ο $\Omega_1 = \{ΓΓΛ\}$ τότε έχω πιθανότητα $2/3$ για το A. Εφόσον επανατοποθετώ μέσα στο σακί την πρώτη σφαίρα, ο δειγματοχώρος της δεύτερης φοράς είναι πάλι ο $\Omega_2 = \{ΓΓΛ\}$ και άρα έχω και πάλι πιθανότητα $2/3$ για το B.

Σε αυτή την περίπτωση

$$P(B|A) = P(B)$$

δηλαδή το A δεν επηρεάζει το B και τα δυο γεγονότα λέγονται ανεξάρτητα.

(β) Σε αυτή την περίπτωση ο δεύτερος δειγματοχώρος αλλάζει σε και επομένως αλλάζουν και οι αντίστοιχες πιθανότητες, δηλαδή τώρα έχω $\Omega_2 = \{ΓΛ\}$, και επομένως η πιθανότητα $P(B|A) = 1/2$ αντί για $1/3$ που είχα στο α παραπάνω. Σε αυτή την περίπτωση

$$P(B|A) \neq P(B)$$

και το A επηρεάζει το B και τα δυο γεγονότα λέγονται μη ανεξάρτητα.

Παράδειγμα ανεξάρτητων γεγονότων: Διαδοχικοί ρίψη ίδιου ζαριού 2 φορές, ίδιος δειγματοχώρος $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$ ανά ρίψη. Γεγονός

A να έρθει 4

B να έρθει 4

Σύνθετο γεγονός να έρθει 4-4, δειγματοχώρος

Ζάρι 1:	1	2	3	4	5	6
Ζάρι 2:						
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Τα γεγονότα A (λαχανί στήλη) και B (λαχανί γραμμή) είναι ανεξάρτητα (αλλά όχι ξένα αφού έχουν τομή)

Αντιπαράδειγμα, χωρίζω την τράπουλα σε 4 πακέτα των 13 φύλλων ανά είδος (Κούπες, Καρό, Μπαστούνια και Σπαθιά) και γεγονός

A: Να επιλεγθεί το πακέτο Κούπες

B: Να επιλεγεί φιγούρα εάν έχουν επιλεγθεί οι κούπες στο A

Αρχικός δειγματοχώρος

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	B	N	Π
	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	B	N	Π
	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	B	N	Π
	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	B	N	Π

Υπάρχουν 13 κούπες επί συνόλου 52 φύλλων και έτσι

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Μόλις έχω επιλέξει τις κούπες, αλλάζει ο δειγματοχώρος σε

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	B	N	Π
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	---

και έχω 3 φιγούρες σε σύνολο 13 φύλλων και άρα η δεσμευμένη πιθανότητα είναι η

$$P(B|A) = \frac{3}{13}$$