Διάταξη $n$ αντικειμένων ανά $m$ με επανάληψη

Πλήθος: $n^m$

Παράδειγμα: Πόσες λέξεις των 4 γραμμάτων (ίσως χωρίς νόημα) μπορούμε να φτιάξουμε από τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, Ε με επανάληψη;

Εδώ $m = 4$ και $n = 5$ οπότε $m < n$ όπως και στις διατάξεις χωρίς επανάληψη

Έχουμε συνολικό πλήθος

$$n(\Omega) = 5^4 = 625$$

Παράδειγμα:

Ποια η πιθανότητα μια τέτοια επιλεγμένη λέξη:

(i) Να μην περιέχει φωνήεν

(ii) Να περιέχει το Α

(iii) Να περιέχει ένα τουλάχιστον από τα Α ή Β

(iv) Να περιέχει ακριβώς ένα Α και ένα Β

(v) Να περιέχει ακριβώς το ΑΒ

(vi) Να περιέχει τα Α, Β διαδοχικά;

Λύση:

(i) Γεγονός $M$: Να μην περιέχει φωνήεν, δηλαδή Θέλω τις λέξεις 4 γραμμάτων από τα υπόλοιπα 3 γράμματα Β, Γ, Δ με επανάληψη

$$n(M) = 3^4 = 81$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι η

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(\Omega)} = \frac{81}{625} = 0.129$$

(ii) Γεγονός $M$: Να περιέχει το Α

Γεγονός $M'$: Να ΜΗΝ περιέχει το Α

Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα έτσι και εδώ εύκολα μπορούμε να βρούμε το πλήθος του $M'$ απλά πετάω από το σύνολο των 5 γραμμάτων το Α και έχω 4 γράμματα, με τα οποία πρέπει να φτιάξω λέξεις 4 γραμμάτων άρα

$$n(M') = 4^4 = 256$$

Οι υπόλοιπες λέξεις περιέχουν το Α και έτσι

$$n(M) = n(\Omega) - n(M') = 625 - 256 = 369$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι η

$$P(M) = \frac{369}{625} = 0.590$$

Θα μπορούσαμε κάπως και πιο δύσκολα να υπολογίσουμε απευθείας το πλήθος του $M$ ως εξής

Έχω τις εξής οικογένειες γραμμάτων

Axxx, xAxx, xxAx, xxxA (με ένα Α)

AAxx, AxAx, AxxA, xAAx, xAxA, xxAA (με δυο Α)

AAAx, AAxA, AxAA, xAAA (με τρια Α)

AAAA (με τέσσερα Α)

<u>Πλήθος</u>:

με ένα Α: Τα xxx είναι λέξεις 3 γραμμάτων και έχουμε διαθέσιμα 4 γράμματα (τα αρχικά μείον το Α) και έτσι συνολικά $4^3 = 64$ επί 4 ομάδες = 256

με δυο Α: Τα xx είναι λέξεις 2 γραμμάτων και έχουμε διαθέσιμα 4 γράμματα (τα αρχικά μείον το Α) και έτσι συνολικά $4^2 = 16$ επί 6 ομάδες = 96

με τρια Α: Περισσεύει ένα γράμμα το x για το οποίο έχουμε μόνο 4 επιλογές και άρα 4 περιπτώσεις επί 4 ομάδες ίσον 16

με τέσσερα Α, μόνο 1 λέξη

Συνολικά $n(M) = 256 + 96 + 16 + 1 = 369$

Ακριβώς το ίδιο !!!

(iii) Γεγονός $M$: Να περιέχει Α ή Β

Γεγονός $M'$: Να ΜΗΝ περιέχει Α, Β

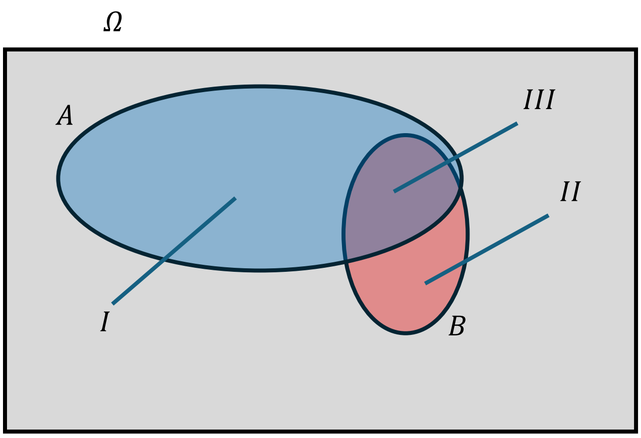
Το δεύτερο γεγονός μοιάζει με την περίπτωση i όπου είχαμε αφαιρέσει τα 2 φωνήεντα, εδώ τώρα αφαιρούμε τα Α και Β και επειδή τα γράμματα είναι ισοδύναμα, περιμένουμε το ίδιο πλήθος $n(M') = 81$ και άρα

$$n(M) = n(\Omega) - n(M') = 625 - 81 = 544$$

με αντίστοιχη πιθανότητα

$$P(M) = \frac{544}{625} = 0.87$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας το $n(M)$ με την βοήθεια των διαγραμμάτων Venn




α. Μπορούμε να το λύσουμε και με τη βοήθεια του τύπου της ένωσης

β μπορούμε επίσης να το λύσουμε καταμετρώντας ξεχωριστά τα σύνολα $I$, $II$ και $III$ στο διάγραμμα

α. Ο τύπος της ένωσης μου λέει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Πως μεταφράζεται σε πλήθη

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

Είδαμε $n(A) = 369$ αλλά επειδή τα γράμματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, περιμένω επίσης $n(B) = 369$

Μου λείπει το $n(A \cap B)$, αντίστοιχο γεγονός:

$A \cap B$: Να υπάρχει στην λέξη και το A και το B. Έχω τις εξής οικογένειες:

1) με ένα A και ένα B

ABxx, AxBx, AxxB, xABx, xAxB, xxAB και επί 2 για A⇋B

Καταμέτρηση: 6 ομάδες $\times 3^2 \times 2 = 108$

2) με δυο A και ένα B

AABx, AAxB, AxAB, ABAx, ABxA, AxBA, xAAB, BAAx, xABA, BAxA, xBAA, BxAA

και επί 2 για A⇋B

Καταμέτρηση: 12 ομάδες $\times 3 \times 2 = 72$

3) με δυο A και δυο B

AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA, πλήθος 6

4) με τρία A και ένα B

AAAB, AABA, ABAA, BAAA και επί 2 για A⇋B

Καταμέτρηση: 4 λέξεις $\times$ 2=8

ΣΥΝΟΛΙΚΑ $n(A \cap B) = 108 + 72 + 6 + 8 = 194$

Έτσι, ο τύπος της ένωσης δίνει

$$P(M) = P(A \cup B) = \frac{369}{625} + \frac{369}{625} - \frac{194}{625} = \frac{544}{625} = 0.87$$

ακριβώς όπως και την πρώτη μέθοδο με το $M'$