Μεταθέσεις n αντικειμένων

Από μια λίστα με n αντικείμενα, τα διαλέγω όλα, τα μεταθέτω παίρνοντας όλους τους συνδυασμούς όπου η σειρά έχει σημασία, δεν επιτρέπονται επαναλήψεις

Π.χ. ΜΑΔ, ΜΔΑ, ΔΜΑ, ΔΑΜ, ΑΔΜ, ΑΜΔ

Πλήθος $n! = 1 \cdot 2 \ \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$, στο παράδειγμα $3! = 6$ μεταθέσεις

Διατάξεις n αντικειμένων ανά $m < n$

από μια λίστα με n αντικείμενα, διαλέγω τα m, τα μεταθέτω παίρνοντας όλους τους συνδυασμούς ανά m όπου η σειρά έχει σημασία, δεν επιτρέπονται επαναλήψεις

Π.χ. Ο,Λ,Α,Σ, πόσες λέξεις με τρία γράμματα – χωρίς επαναλήψεις

Ένα χρήσιμο εργαλείο στην καταμέτρηση στις διατάξεις, είναι το διάγραμμα δέντρου. Ξεκινάμε με τα μεγάλα κλαδιά του δέντρου που είναι τα 4 γράμματα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και μετά επειδή δεν επιτρέπονται επαναλήψεις έχουμε για επιλογή μόνο 3 γράμματα => 3 ενδιάμεσα κλαδιά. Και τέλος μου μένουν μόνο 2 γράμματα => τα μικρότερα κλαδιά είναι μόνο 2

Πλήθος $4 \cdot 3 \cdot 2$

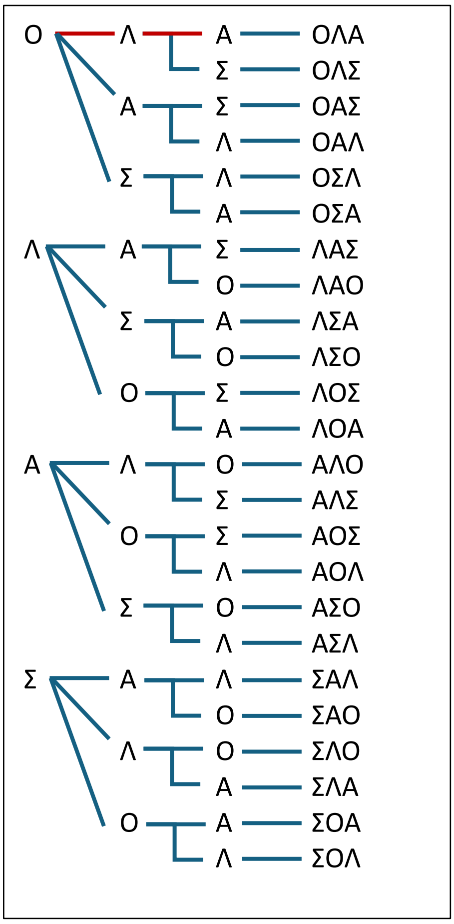
Ομοίως αν είχα διατάξεις 5 ανά 3 θα είχα πλήθος

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Γενικεύω, σε διατάξεις n ανά m το πλήθος το οποίο συμβολίζεται με Δ_m^n δίνεται από τον τύπο

$$\Delta_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Διάγραμμα δέντρου:



<u>Συνδυασμούς</u> n αντικειμένων ανά $m < n$

από μια λίστα με n αντικείμενα, <u>διαλέγω τα m</u>, παίρνοντας όλους τους συνδυασμούς ανά m όπου η σειρά ΔΕΝ έχει σημασία, δεν επιτρέπονται επαναλήψεις

Π.χ. Ο,Λ,Α,Σ αρχικά ονομάτων εξεταστών Όλγα, Λευθέρης, Αρίστη, Σωκράτης πόσες τριάδες; 4 οι εξής:

ΟΛΑ=ΑΛΟ=ΛΑΟ=ΛΟΑ=ΟΑΛ=ΑΟΛ (ισοδύναμα όλα, η ίδια επιτροπή 1)

ΣΛΑ=ΑΛΣ=ΛΑΣ=ΛΣΑ=ΣΑΛ=ΑΣΛ (επιτροπή 2)

ΟΣΑ=ΑΣΟ=ΣΑΟ=ΣΟΑ=ΟΑΣ=ΑΟΣ (επιτροπή 3)

ΟΛΣ=ΣΛΟ=ΛΣΟ=ΛΟΣ=ΟΣΛ=ΣΟΛ (επιτροπή 4)

Πλήθος συμβολίζεται με C_m^n ή

$$\binom{n}{m}$$

και ισούται με

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Παραδείγματος χάριν από 6 εθελοντές πόσες τριμελείς επιτροπές μπορώ να φτιάξω;

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$$

Σημείωση: Οι παραπάνω συντελεστές λέγονται και διωνυμικοί γιατί εμφανίζονται στο ανάπτυγμα του διωνύμου, για παράδειγμα

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

<u>Παράδειγμα</u>:

(α) Πόσες λέξεις (ίσως χωρίς νόημα) των 3 γραμμάτων φτιάχνονται με τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Θ χωρίς επανάληψη;

Κλασική περίπτωση διατάξεις 7 αντικειμένων ανά 3

$$\Delta_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210$$

Αυτό το σύνολο των λέξεων θα θεωρήσω ότι είναι ο δειγματοχώρος μου Ω και άρα $n(\Omega) = 210$

(β) Ποια η πιθανότητα μια τέτοια επιλεγμένη λέξη:

(i) Να μην περιέχει φωνήεν

Έχω το γεγονός Τ: «λέξη με 3 γράμματα χωρίς το Α και Ε». Προφανώς είναι υποσύνολο του Ω και τώρα έχω να επιλέξω 3 από μόνο 5 γράμματα και έτσι το πλήθος των λέξεων ειναι

$$n(T) = \Delta_3^5 = \frac{5!}{2!} = 60$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι η

$$P(T) = \frac{n(T)}{n(\Omega)} = \frac{60}{210} = 0.285$$

(ii) Να περιέχει το Α

Γεγονός Μ: «<u>να</u> περιέχει το Α»

Γεγονός Μ’: «να <u>μην</u> περιέχει το Α»

$$P(M) = 1 - P(M')$$

Εάν πετάξω το Α έξω από τη λίστα έχω μόνο 6 αντικείμενα και πρέπει να επιλέξω τα 3 από αυτά και άρα έχω διατάξεις 6 ανά 3

$$n(M') = \Delta_3^6 = \frac{6!}{3!} = 120$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι η

$$P(M') = \frac{n(M')}{n(\Omega)} = \frac{120}{210} = 0.571$$

Θέλω

$$P(M) = 1 - P(M') = 0.429$$

(iii) Να περιέχει ένα τουλάχιστον από τα Α ή Β

Γεγονός Μ: «να περιέχει το Α»

Γεγονός Ν: «να περιέχει το Β»

Το διαζευκτικό ή σημαίνει ένωση => θέλω το $M \cup N$

Δυο τρόποι επίλυσης. Η με συμπληρωματικό όπως έκανα και στο προηγούμενο υποερώτημα, ή μέσω του τύπου της ένωσης

Θυμίζω: Για το συμπληρωματικό ισχύει

$$(M \cup N)' = M' \cap N'$$

ενώ για τον τύπο της ένωσης

$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

Θα το δούμε στην επόμενη διάλεξη! Για τώρα σκεφτείτε τα παρακάτω

(γ) Ποια η πιθανότητα μια τυχαία επιλεγμένη λέξη 5 γραμμάτων από τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Θ χωρίς επανάληψη:

(i) Να περιέχει τα Α, Β διαδοχικά

(ii) Να περιέχει το Α και το Β