Οι νόμοι των πιθανοτήτων

Είδαμε

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) Για A, B ξένα ισχύει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

για μη ξένα

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3) $P(\Omega) = 1$

4) $P(A') = 1 - P(A)$

5) $P(\emptyset) = 0$

Σήμερα θα δούμε

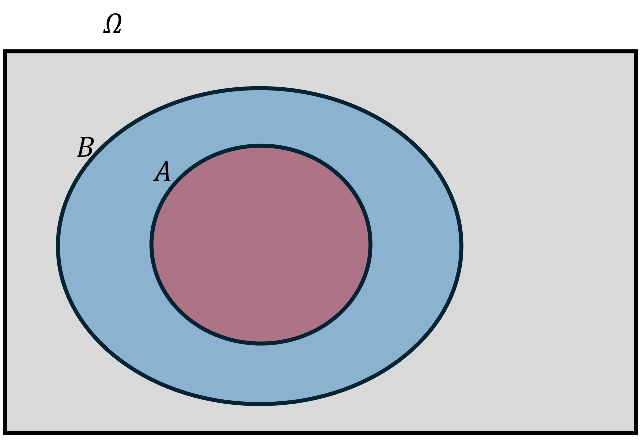
6) $A \subseteq B => P(A) \leq P(B)$

Για δειγματοχώρο με ισοδύναμα απλά γεγονότα, όπως το ζάρι $A \subseteq B => n(A) \leq n(B)$

$$\frac{n(A)}{n(\Omega\,)} \leq \frac{n(B)}{n(\Omega\,)}$$

$$P(A) \leq P(B)$$

Για δείγμα το χώρο με μη ισοδύναμα απλά γεγονότα, αυτό μπορεί να το δείξουμε εύκολα με τα διαγράμματα Venn



μπορώ να γράψω το B σαν ένωση του A και του δακτυλίου γύρω του δηλαδή

$$B = A \cup (B - A)$$

όμως αυτά τα δυο σύνολα A και $B - A$ είναι ξένα μεταξύ τους και άρα μπορώ να εφαρμόσω τον απλό κανόνα της ένωσης

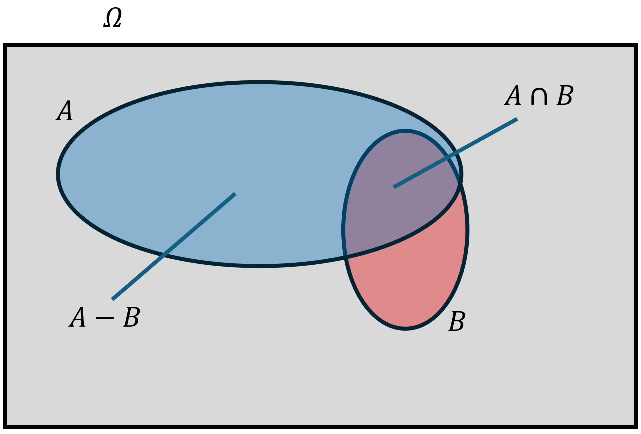
$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

Αφού όλες οι πιθανότητες είναι θετικοί αριθμοί, τότε

$$P(B - A) \geq 0$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο

7) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

Στο 2^o μέλος, τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

Προκύπτει το ζητούμενο

Επίσης <u>συνθήκες</u>, είδαμε:

έστω ότι προέκυψε ένα γεγονός $\omega \in \Omega$

1) Πραγματοποιείται το γεγονός A =>

$$\omega \in A$$

2) Δεν πραγματοποιείται το γεγονός A =>

$$\omega \in A'$$

3) Πραγματοποιείται το A "ή" το B =>

$$\omega \in (A \cup B)$$

4) Πραγματοποιείται το A " και το " B =>

$$\omega \in (A \cap B)$$

5) Δεν πραγματοποιείται ούτε το A ούτε το B =>

Το αντίστοιχο σύνολο είναι το

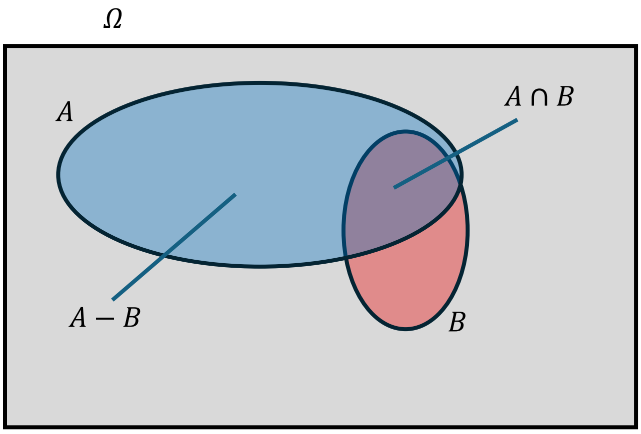
$$\Omega - (A \cup B) = (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$\omega \in (A \cup B)'$$

6) Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A ή B =>

Το αντίστοιχο σύνολο είναι το

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$



$$\omega \in (A - B) \cup (B - A)$$

<u>Παράδειγμα</u>: Ρίψη δυο ζαριών, πιθανότητα να έρθει

i) Ασσόδυο

ii) Τριάρες

iii) Άθροισμα 8

iv) Άθροισμα > 9

v) Διπλές

vi) Να διαφέρουν κατά δυο

Δειγματοχώρος:

Ζάρι 1: / Ζάρι 2:	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Συνολικά $n(\Omega) = 6 \times 6 = 36$ απλά γεγονότα, θεωρούμε ισοδύναμε οπότε έχουμε για τα ζητούμενα:

i) Ασσόδυο

Υπάρχουν δυο συνδυασμοί 12 και 21 οπότε $n(A) = 2$ και

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 5.5\ \%$$

ii) Τριάρες

Υπάρχει μόνο ένας συνδυασμός 33 οπότε $n(A) = 1$ και

$$P(A) = \frac{1}{36} = 2.75\ \%$$

iii) Άθροισμα 8: Υπάρχουν οι ακόλουθοι 5 συνδυασμοί οπότε

$$P(A) = \frac{5}{36} = 13.9\ \%$$

Ζάρι 1: / Ζάρι 2:	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

iv) Άθροισμα > 9: Όπως και προηγουμένως, φέρουμε την πράσινη διαγώνια γραμμή η οποία αντιστοιχεί στη συνθήκη "άθροισμα = 9". Οτιδήποτε κάτω και δεξιά από αυτή, δηλαδή τα πορτοκαλί κουτιά, αντιστοιχούν σε άθροισμα μεγαλύτερο του 9 και έτσι έχουμε 6 περιπτώσεις οπότε

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 16.7\ \%$$

Ζάρι 1:	1	2	3	4	5	6
Ζάρι 2:						
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

v) Διπλές: Όπως Φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχουμε την περίπτωση της διαγωνίου με συνολικά 6 περιπτώσεις οπότε

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 16.7\ \%$$

Ζάρι 1:	1	2	3	4	5	6
Ζάρι 2:						
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

vi) Να διαφέρουν κατά δυο: Όπως Φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, συνολικά 8 περιπτώσεις οπότε

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 22.2\ \%$$

Ζάρι 1:	1	2	3	4	5	6
Ζάρι 2:						
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Άσκηση:

Τραβάμε στην τύχη ένα χαρτί από μια συνηθισμένη τράπουλα των 52 χαρτιών. Να βρεθεί η πιθανότητα να είναι το χαρτί αυτό α) άσσος, (β) βαλές κούπα, γ) 3 σπαθί ή 6 καρό, δ) κούπα, ε) όχι κούπα, στ) 10 ή μπαστούνι, ζ) ούτε 4 ούτε σπαθί

2.4 Μέθοδοι Απαρίθμησης – Συνδυαστική

Η συνδυαστική απαντάει ερωτήματα του στυλ

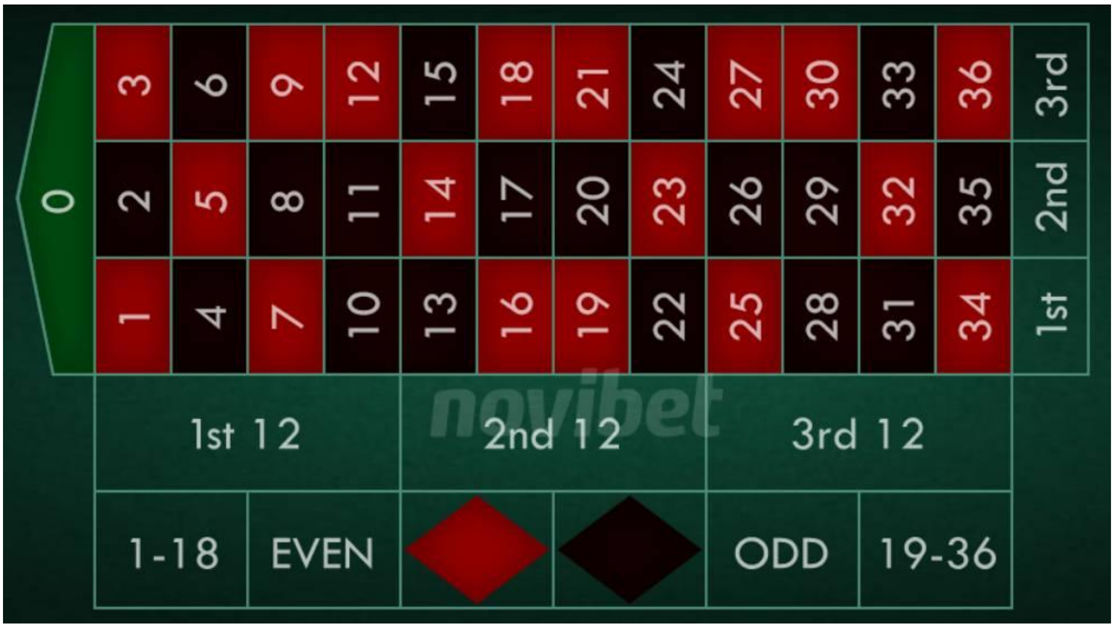
Από τέσσερις διαφορετικούς κριτές όπως Β,Σ,Γ,Δ πόσες επιτροπές μπορούμε να φτιάξουμε με τρία άτομα;

Από τέσσερις διαφορετικούς κριτές όπως Β,Σ,Γ,Δ πόσες επιτροπές μπορούμε να φτιάξουμε με τρία άτομα πρόεδρο - ταμία - γραμματέα;

διάγραμμα δέντρου

<u>Άσκηση</u>:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το τραπέζι μιας κλασικής ρουλέτας με συνολικά 36 νούμερα τα οποία κατατάσσονται σε διάφορες ομάδες. Καταρχάς υπάρχει το χρώμα και έτσι τα μισά νούμερα είναι κόκκινα ενώ τα άλλα μισά είναι μαύρα. Μια άλλη ομάδα είναι οι δωδεκάδες δηλαδή υπάρχουν σε μια ομάδα τα νούμερα από 1 ως 12 (1st 12), από 13 έως 24 (2nd 12) και από 24 ως και 36 (3rd 12). Επίσης υπάρχουν και οι 3 στήλες (1st, 2nd, 3rd) στις οποίες οι αριθμοί αυξάνουν ανά 3, με την πρώτη στήλη να ξεκινάει από το 1 (1,4,7…), τη δεύτερη το 2 (2,5,8…) και την τρίτη το 3 (3,6,9 …). Επίσης μπορούμε να χωρίσουμε το τραπέζι σε ζυγούς και άρτιους (ODD-EVEN, δεν φαίνονται ως ξεχωριστή ομάδα στο τραπέζι) και στους μισούς και πάνω και μισούς και κάτω (1-18, 19-36).



Όταν γυρίσει η ρουλέτα η μπίλια θα καθίσει σε ένα από τα νούμερα το οποίο ανήκει σε κάποιες από τις παραπάνω ομάδες αλλά εσείς μπορείτε να ποντάρετε σε όποια από τις ομάδες πιστεύετε ότι θα βγει, βάζοντας μια μάρκα επάνω στην αντίστοιχη ένδειξη, π.χ. εάν βάλετε μια μάρκα στο νούμερο 25 και ταυτόχρονα στο EVEN, τότε θα κερδίσετε αν έρθει το 25 ή κάποιος ζυγός αριθμός (όχι βέβαια το ίδιο ποσό).

I. Να βρεθεί πιθανότητα, το νούμερο στο οποίο θα καθίσει η μπίλια να είναι:

α) 13, β) μαύρο, γ) ζυγός, δ) στους δεύτερους μισούς, ε) στην $3^{η}$ δωδεκάδα

II. Βάσει των παραπάνω, αποφανθείτε α) εάν σε μια βραδιά "πέσουν" στο τραπέζι 2160 μάρκες επάνω στα νούμερα, στατιστικώς πόσες από αυτές θα είναι επάνω στο 13. β) Πόσες από αυτές θα είναι στα δεύτερα μισά νούμερα. γ) Πόσες από αυτές θα είναι στην $3^{η}$ δωδεκάδα

III. Έστω ότι η μπίλια σε ένα γύρο έρχεται 13. Βάσει των παραπάνω, εάν ήσασταν εσείς ο διοργανωτής, ποιο είναι το μέγιστο ποσό σε μάρκες που θα δίνατε α) στον νικητή του νούμερου 13; β) σε αυτόν που πόνταρε μαύρο; γ) σε αυτόν που πόνταρε μονό; δ) σε αυτόν που πόνταρε δεύτερη δωδεκάδα; δ) σε αυτόν που πόνταρε στους πρώτους μισούς;

IV. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει πρώτη **ή** η τρίτη στήλη; ποια είναι η πιθανότητα να έρθει η πρώτη στήλη **ή** η δεύτερη δωδεκάδα; ποια είναι η πιθανότητα να έρθει η πρώτη στήλη **και** η δεύτερη δωδεκάδα;