Είδαμε ότι εάν ένας δειγματοχώρος Ω αποτελείται από $n(\Omega)$ ισοδύναμα απλά γεγονότα ω, τότε η πιθανότητα εμφάνισης ενός από αυτά είναι

$$P_1 = \frac{1}{n(\Omega)}$$

Παράδειγμα ζάρι, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και άρα $n(\Omega) = 6$ απλά γεγονότα και έτσι η πιθανότητα εμφάνισης π.χ. του 4 είναι

$$P(4) = \frac{1}{6}$$

Με την βοήθεια της σχέσης $P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma)$ για δυο ξένα σύνολα, και δεδομένου ότι τα απλά δεδομένα είναι πάντα ξένα, έχουμε ότι για ένα σύνολο A με $n(A)$ απλά γεγονότα, η πιθανότητα εμφάνισης του αντίστοιχου γεγονότος θα είναι ίση με

$$P(A) = n(A)P_1 = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Για παράδειγμα το γεγονός A να έρθει μόνο ο αριθμός στο ζάρι έχει 3 στοιχεία $A = \{1,3,5\}$ και επομένως $n(A) = 3$. Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι η

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = 0.5$$

και βέβαια

$$P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$$

<u>Παράδειγμα</u>:

Έστω τα γεγονότα

A: να έρθουν οι δυο μικρότεροι αριθμοί στο ζάρι, δηλαδή $A = \{1,2\}$

B: να έρθουν οι δυο μεγαλύτεροι αριθμοί στο ζάρι, δηλαδή $B = \{5,6\}$

τότε η ένωση δυο συνόλων, εκφράζεται με το διαζευκτικό "ή", δηλαδή το γεγονός

Γ: να έρθουν (οι δυο μικρότεροι αριθμοί) ή (να έρθουν οι δυο μεγαλύτεροι αριθμοί), δηλαδή $\Gamma = \{1,2,5,6\}$

Να βρεθούν οι αντίστοιχες πιθανότητες των A, B και Γ

<u>Λύση</u>:

$$P(A) = P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\Gamma) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Προφανώς ισχύει

$$P(\Gamma) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

<u>Παράδειγμα</u>:

Στο προηγούμενο παράδειγμα έστω Δ το γεγονός μονός ή μικρός (A). Να υπολογιστεί η πιθανότητα του και να σχολιαστεί αν ισχύει η σχέση της ένωσης των πιθανοτήτων

<u>Λύση</u>:

$$\Delta = \{1,2,3,5\}$$

$$n(\Delta) = 4$$

$$P(\Delta) = \frac{n(\Delta)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Δοκιμάζω τον τύπο της ένωσης. Έστω $M = \{1,3,5\}$ το γεγονός να είναι μονός.

$$P(\Delta) = P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{3} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Προφανώς δεν ισχύει επειδή δεν είναι ξένα τα A και M

$$A \cap M = \{1\}$$

Όταν δεν είναι ξένα, ο τύπος γενικεύεται στον

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Οι νόμοι των πιθανοτήτων

Είδαμε

1) $0 \le P(A) \le 1$

2) Για ξένα A, B ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3) $P(\Omega) = 1$

4) $P(A') = 1 - P(A)$

5) Θα δείξουμε επιπλέον

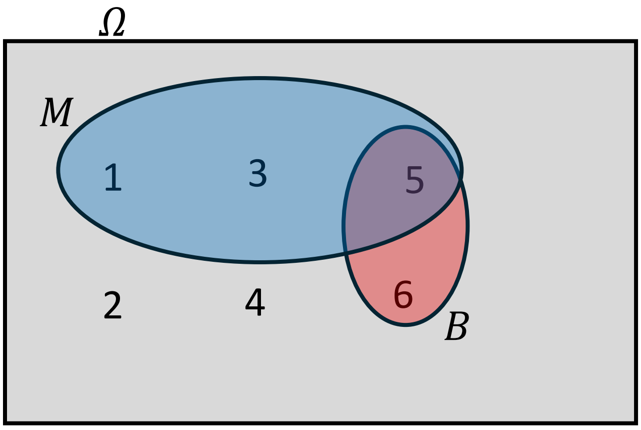
$$P(\emptyset) = 0$$

Απόδειξη: Εάν $A = \emptyset$ => $A' = \Omega$ οπότε με βάση τον προηγούμενο τύπο

$$P(\emptyset) = P(A) = 1 - P(A') = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

5) $A \subseteq B => P(A) \leq P(B)$

6) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



$$M - B = \{1,3\} = M - M \cap B$$

<u>Συνθήκες</u>: έστω ότι προέκυψε το γεγονός $\omega \in \Omega$

Πραγματοποιείται το γεγονός A => $\omega \in A$

Δεν πραγματοποιείται το γεγονός A => $\omega \in A'$

Πραγματοποιείται το A "ή" το B => $\omega \in (A \cup B)$

Πραγματοποιείται το A " και το " B => $\omega \in (A \cap B)$

Δεν πραγματοποιείται ούτε το A ούτε το B => $\omega \in (A \cup B)'$

Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A ή B =>

<u>Άσκηση</u>: Ρίψη δυο ζαριών, πιθανότητα να έρθει

i) Ασσόδυο

ii) Τριάρες

iii) Άθροισμα 8

iv) Άθροισμα > 9

v) Διπλές

vi) Να διαφέρουν κατά δυο