ΜΑΘΗΜΑ:

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ:

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ

kouzoudi@upatras.gr

ΓΡΑΦΕΙΟ: 2ος ΟΡΟΦΟΣ, ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΚΤΗΡΙΟ, αντίθετα από Γραμματεία στο διάδρομο

ΩΡΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 1 – 2 μμ

ΠΕΜΠΤΗ 9 – 11 πμ

2 ώρες Θεωρία + 1 Φροντιστήριο

ΠΛΑΤΦΟΡΜΑ ECLASS

Στατιστική για Μηχανικούς 2026

(Ανοικτό https://eclass.upatras.gr -> Μαθήματα -> Χημικών Μηχανικών -> Προπτυχιακό)

(όχι " Στατιστική για Μηχανικούς", παλαιότερο)

Γιατί Στατιστική ;

Η επιστήμη είναι είτε "ντετερμινιστικής" είτε "στατιστικής" φύσεως

Ντετερμινιστική -> Εάν κρατήσουμε σταθερές τις παραμέτρους του πειράματος, τότε θα πάρουμε ένα και μόνο ένα συγκεκριμένο και προκαθορισμένο αποτέλεσμα

Π.χ. ταχύτητα αντίδρασης:

$$u = k[A]^n[B]^m$$

k εξαρτάται από θερμοκρασία T και πίεση P οπότε εάν κρατήσουμε T, P, $[A]$, $[B]$ σταθερά => θα μετράμε για πάντα την ίδια τιμή -> αυτή που προβλέπει η παραπάνω εξίσωση.

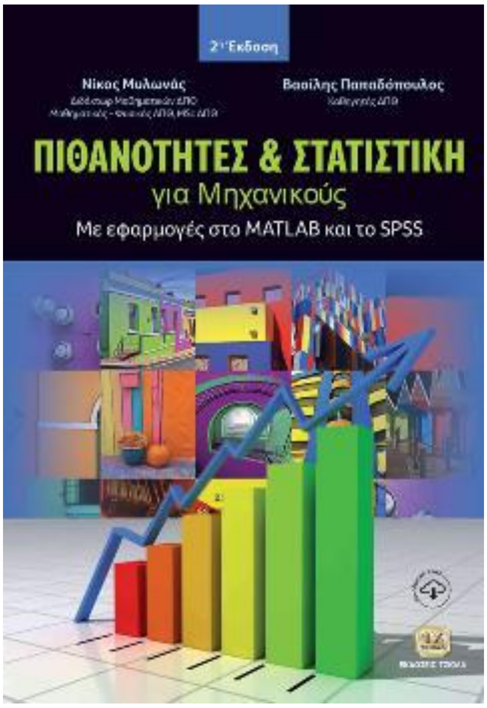
Στατιστική -> Ακόμη και εάν κρατήσουμε σταθερές τις παραμέτρους του πειράματος, τότε θα πάρουμε γενικά μια γκάμα από ενδεχόμενα, ένα την φορά

Π.χ. Ρίψη ζαριού

Στην πράξη μπαίνει και η στατιστική στο πείραμα είτε το θέλουμε είτε όχι επειδή:

- Υπάρχουν αστάθμητοι παράγοντες που δεν μπορούμε να κρατήσουμε σταθερούς, π.χ. στην ταχύτητα αντίδρασης, επηρεάζει και η υγρασία του περιβάλλοντος για ανοικτές διεργασίες, η παρουσία CO_2 στην ατμόσφαιρα εάν το ένα προϊόν είναι CO_2, η ακτινοβολία ως καταλύτης κ.λ.π. Αυτή είναι και η πηγή του σφάλματος στο εργαστήριο.
- Υπάρχουν πειράματα με πολύ μεγάλο αριθμό παραμέτρων που είναι αδύνατον να ρυθμιστούν, όπως η μέτρηση της βροχόπτωσης ανά ημέρα, η οποία προφανώς έχει να κάνει με τον καιρό ο οποίος είναι πολυπαραγοντικός, π.χ. επηρεάζεται από πίεση, θερμοκρασία, υγρασία, ακτινοβολία, υψόμετρο, σκόνη, τοπική μορφολογία όπως παράκτιες περιοχές, κλειστές περιοχές, μόλυνση περιβάλλοντος, τρύπα του όζοντος, πλανητικές θέσεις, μαγνητικές καταιγίδες, ανέμους κ.α.
- Υπάρχουν στατιστικές διεργασίες και στην φύση, π.χ. πυκνότητα του αέρα (κενά αέρος), κβαντική πιθανότητα κ.λ.π. Βασικά η θερμοδυναμική είναι η μακροσκοπική επιστήμη που προκύπτει από την μικροσκοπική άθροιση μεγάλου αριθμού σωματιδίων σε στατιστικά τυχαίες τροχιές.

2η Έκδοση



Μυλωνάς Νίκος - Παπαδόπουλος Βασίλειος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΣΥΝΟΛΑ

1.1 Βασικές έννοιες

Σύνολο: Μια συλλογή διακεκριμένων και διάφορων μεταξύ τους αντικειμένων a, β, γ, δ …με κοινά χαρακτηριστικά (η σειρά δεν παίζει ρόλο, δηλαδή δεν πρόκειται για διατεταγμένα σύνολα). Συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα και τοποθετούμε τα αντικείμενα που περιέχουν μέσα σε αγκύλες, π.χ.

$$A = \{a, \beta\}$$

$$B = \{a, \gamma, \delta\}$$

Το πιο ευρύ σύνολο που περιέχει όλα τα αντικείμενα με κοινά χαρακτηριστικά, ονομάζεται **βασικό σύνολο** ή **σύνολο αναφοράς** και συμβολίζεται με το γράμμα Ω, π.χ.

Το σύνολο που περιέχει τα γράμματα του Ελληνικού αλφάβητου

$$\Omega_{AB} = \{a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots, \chi, \psi, \omega\}$$

Το σύνολο που περιέχει το αποτέλεσμα ρίψης ζαριού

$$\Omega_Z = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Το σύνολο των βασικών χρωμάτων

Ω_{XP} ={κόκκινο, κίτρινο, μπλε}

Το σύνολο των φυσικών αριθμών

$$\Omega_N = N = \{1,2,3,4 \dots.\}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: Βλέπουμε ότι τα σύνολα μπορεί να περιέχουν και μη αριθμητικά δεδομένα όπως το σύνολο με τα χρώματα και επίσης μπορούν να περιέχουν και άπειρο πλήθος αντικειμένων όπως το N.

Υποσύνολα του Ω: Κάθε σύνολο A το οποίο αντλεί στοιχεία από το Ω αλλά έχει λιγότερα στοιχεία από αυτό, ονομάζεται υποσύνολο του. Συμβολίζουμε την ιδιότητα του υποσυνόλου ως

$$A \subset \Omega$$

ή και

$$A \subseteq \Omega$$

όταν το A είναι υποσύνολο ή ίσο με το Ω. Για παράδειγμα το σύνολο των φωνηέντων

$$A = \{a, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$$

και το σύνολο των διπλών γραμμάτων

$$B = \{\xi, \psi\}$$

είναι και τα δυο υποσύνολα του Ω_{AB}, δηλαδή $A \subset \Omega_{AB}$ και $B \subset \Omega_{AB}$. Επίσης το σύνολο των ζυγών φυσικών αριθμών

$$A = \{2,4,6 \dots\}$$

και το σύνολο των πρώτων αριθμών

$$B = \{2,3,5,7 \dots\}$$

είναι και τα δυο υποσύνολα του Ω_N, δηλαδή $A \subset \Omega_N$ και $B \subset \Omega_N$. Η έννοια του υποσυνόλου επεκτείνεται και στα μικρότερα, μη βασικά σύνολα δηλαδή έστω το υποσύνολο

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

του N. Τότε το

$$B = \{2,4,6,8\}$$

είναι υποσύνολο του A, δηλαδή

$$B \subset A$$

Τα σύνολα γράφονται με τα στοιχεία τους αναλυτικά, όπως τα A και τα B παραπάνω. Τότε λέμε ότι τα σύνολα είναι γραμμένα με **αναγραφή**. Υπάρχει όμως και η αυστηρή **μαθηματική γραφή**, π.χ. το A γράφεται ως

$$A = \{a \ \in N \mid a \leq 9\}$$

Δηλαδή τα στοιχεία a του A είναι τα στοιχεία εκείνα του N τα οποία είναι μικρότερα ή ίσα του 9. Επίσης

$$B = \{b \ \in N \mid b = 2n, n \leq 4\}$$

Για τα στοιχεία a του A και τα στοιχεία b του B γράφουμε

$a \in A$ και $b \in B$, δηλαδή χρησιμοποιούμε τον τελεστή "ανήκει" $\in$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή αυτό για να περιγράψουμε το γεγονός ότι το B είναι υποσύνολο του A, δηλαδή ότι $B \subset A$, ως εξής:

$$\forall \ b \in B => b \in A$$

δηλαδή με απλή περιγραφή, κάθε στοιχείο b που ανήκει στο B, τότε αναγκαστικά αυτό το ίδιο στοιχείο ανήκει και στο A.

Συμπληρωματικό σύνολο A' (εναλλακτικός συμβολισμός $\bar{A}$) ενός συνόλου A ως προς το Ω, είναι το σύνολο με τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A. Για παράδειγμα έστω το υποσύνολο των φωνηέντων

$$A = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$$

του Ω_{AB}, έχει ως συμπληρωματικό το υποσύνολο των συμφώνων:

$$A' = \{\beta, \gamma, \delta, \zeta, \theta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi, \rho, \sigma, \tau, \varphi, \chi, \psi\}$$

Πράξεις συνόλων. Υπάρχουν δυο βασικές πράξεις μεταξύ συνόλων, η **ένωση** που συμβολίζεται με το σύμβολο "∪", και η **τομή** που συμβολίζεται με το σύμβολο "∩".

Η **ένωση** δυο συνόλων, είναι ένα νέο σύνολο το οποίο περιέχει τα στοιχεία <u>και των δυο</u> συνόλων. Για παράδειγμα εάν

$$A = \{\kappa, o, \upsilon, \zeta\}$$

και

$$B = \{\delta, \eta, \mu\}$$

τότε

$$A \cup B = \{\kappa, o, \upsilon, \zeta, \delta, \eta, \mu\}$$

Επίσης, εάν

$$A = \{\kappa, o, \upsilon, \zeta\}$$

και

$$B = \{o, \upsilon, \delta, \eta, \varsigma\}$$

τότε

$$A \cup B = \{\kappa, o, \upsilon, \zeta, \delta, \eta, \varsigma\}$$

Με μαθηματική γραφή

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \ \underline{\text{ή}}\ x \in B$$

Η **τομή** δυο συνόλων, είναι ένα νέο σύνολο το οποίο περιέχει τα <u>κοινά</u> στοιχεία των δυο συνόλων. Για παράδειγμα εάν

$$A = \{\kappa, o, \upsilon, \zeta\}$$

και

$$B = \{o, \upsilon, \delta, \eta, \varsigma\}$$

τότε

$$A \cap B = \{o, \upsilon\}$$

Με μαθηματική γραφή

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \ \underline{\text{και}}\ x \in B$$

Τι γίνεται εάν δεν υπάρχουν κοινά στοιχεία όπως στην περίπτωση

$$A = \{\kappa, o, \upsilon, \zeta\}$$

και

$$B = \{\delta, \eta, \mu\}$$

Τότε ορίζουμε το λεγόμενο **κενό σύνολο** $\emptyset$, το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο, κάτι σαν το μηδέν της αριθμητικής. Έτσι γράφουμε σε αυτήν την περίπτωση

$$A \cap B = \emptyset$$

Τα σύνολα για τα οποία ισχύει η παραπάνω σχέση, δηλαδή που δεν έχουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους, λέγονται **ξένα σύνολα**.

Προφανώς

$$A \cup A' = \Omega$$

και

$$A \cap A' = \emptyset$$

Μια άλλη χρήσιμη πράξη είναι η **διαφορά** δυο συνόλων $A - B$ το οποίο είναι ένα νέο σύνολο με στοιχεία του A που <u>δεν περιέχονται</u> στο B. Για παράδειγμα εάν

$$A = \{\kappa, o, \upsilon, \zeta, o, \upsilon, \delta, \eta, \varsigma\}$$

και

$$B = \{o, \upsilon\}$$

τότε

$$A - B = \{\kappa, \zeta, \delta, \eta, \varsigma\}$$

Επίσης εάν

$$A = \{\kappa, o, \upsilon, \zeta, o, \upsilon, \delta, \eta, \varsigma\}$$

και

$$B = \{o, \upsilon, \eta, \chi, \psi\}$$

τότε

$$A - B = \{\kappa, \zeta, \delta, \varsigma\}$$

Με μαθηματική γραφή

$$x \in A - B \Rightarrow x \in A \ \underline{\text{και}}\ x \notin B$$

Προφανώς

$$A' = \Omega - A$$

Ιδιότητες των πράξεων, ένωση:

$A \cup B = B \cup A$ Αντιμεταθετική

$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ Προσεταιριστική

$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ Ουδέτερο στοιχείο

Για κάθε A υπάρχει το A' τέτοιο ώστε $A \cup A' = A' \cup A = \Omega$

Εάν $A \cup B = A => B \subseteq A$

Ιδιότητες των πράξεων, τομή:

$A \cap B = B \cap A$ Αντιμεταθετική

$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ Προσεταιριστική, δείτε παρακάτω άσκηση

$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$ (κάτι σαν πολλαπλασιασμός με 0)

Για κάθε A υπάρχει το A' τέτοιο ώστε $A \cap A' = A' \cap A = \emptyset$

Εάν $A \cap B = B => B \subseteq A$

Προφανώς η τομή είναι αντιμεταθετική $A \cap B = B \cap A$

Για τις άλλες, θα τις δούμε ως άσκηση:

Άσκηση 1: Πάρτε τα εξής υποσύνολα του Αλφαβήτου:

A: τα πρώτα τέσσερα διαφορετικά γράμματα του ονόματός σας

B: τα πρώτα τέσσερα διαφορετικά γράμματα του επιθέτου σας

Γ: το σύνολο $\{\alpha, \eta, o\}$

Αποφανθήτε το εξής:

Είναι η τομή ∩ Προσεταιριστική;

Άσκηση 2: Με τα σύνολα της προηγούμενης άσκησης, αποφανθείτε εάν ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα:

$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ Προσεταιριστική της τομής ως προς ένωση

$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$ Προσεταιριστική της ένωσης ως προς τομή