

ΧΗΜΙΚΗ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

1

Γραμμομοριακές & Μερικές Γραμμομοριακές Ιδιότητες

1^η Διάλεξη: Δευτέρα 19.02.2024, 09.15 – 11.00

2^η Διάλεξη: Δευτέρα 11.03.2024, 09.15 – 10.00

Γραμμομοριακές & Μερικές Γραμμομοριακές Ιδιότητες



U, S, V, H, A, G ←

Αναφέρονται/αντιστοιχούν στο συνολικό Σύστημα

Αναζητούμε τη **συνεισφορά** του καθενός συστατικού στη Συνολική Ιδιότητα

Γραμμομοριακές & Μερικές Γραμμομοριακές Ιδιότητες



U, S, V, H, A, G

Αναφέρονται/αντιστοιχούν στο συνολικό Σύστημα

Αναζητούμε τη **συνεισφορά** του καθενός συστατικού στη Συνολική Ιδιότητα

ενός mole κάθε συστατικού

Έτσι, σε Συστήματα με ένα συστατικό: $dU = TdS - pdV + \sum_{i=1}^n \mu_i dn_i \Rightarrow$

$$dU = TdS - pdV + \mu dn \quad (1)$$

Γραμμομοριακές & Μερικές Γραμμομοριακές Ιδιότητες

 U, S, V, H, A, G


Αναφέρονται/αντιστοιχούν στο συνολικό Σύστημα

Αναζητούμε τη **συνεισφορά** του καθενός συστατικού στη Συνολική Ιδιότητα
ενός mole κάθε συστατικού

Έτσι, σε Συστήματα με ένα συστατικό:

$$dU = TdS - pdV + \mu dn \quad (1)$$

Γραμμομοριακή Ιδιότητα:	$u = \frac{U}{n}, s = \frac{S}{n}, v = \frac{V}{n}$	κλπ
-------------------------	---	-----

Άρα, (1)  $ndu + udn = Tnds + Tsdn - pndv - pvdn + \mu dn$

$$\Rightarrow ndu = Tnds - pndv + \underbrace{(\mu - u + Ts - pv)}_{=0} dn \Rightarrow \boxed{du = Tds - pdv}$$

Ανάλογα:

$$du = Tds - p dv$$

$$dh = Tds + v dp$$

$$da = -s dT - p dv$$

$$dg = -s dT + v dp$$

Οι γραμμομοριακές ιδιότητες δεν εξαρτώνται από το μέγεθος του Συστήματος. Είναι Εντατικές Ιδιότητες

Μερικές γραμμομοριακές ιδιότητες



Αναφέρονται σε πολυσυστατικά συστήματα



Ζητάμε τώρα ανάλογες ιδιότητες, πχ. \bar{u}_i
για να εκφράσουμε τις Ολικές Ιδιότητες του Συστήματος, πχ U
σαν *άθροισμα συνεισφορών από κάθε συστατικό, i* .

Δηλ.:

$$U = \sum n_i \bar{u}_i$$

Και γενικά:

$$Y = \sum n_i \bar{y}_i$$

Ορίζουμε τη μερική γραμμομοριακή ιδιότητα του συστατικού i , ως:

$$\bar{y}_i \equiv \left(\frac{\partial Y}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j} \quad Y = \sum n_i \bar{y}_i$$

Γενικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$Y = Y(p, T, n_1, n_2, \dots) \Rightarrow dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial p} \right)_{T, n_i} dp + \left(\frac{\partial Y}{\partial T} \right)_{p, n_i} dT + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial n_i} \right)_{p, T, n_j} dn_i$$

Θα ολοκληρώσουμε τώρα υπό $p, T : \text{constant}$

Γενικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$Y = Y(p, T, n_1, n_2, \dots) \Rightarrow dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial p} \right)_{T, n_i} dp + \left(\frac{\partial Y}{\partial T} \right)_{p, n_i} dT + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial n_i} \right)_{p, T, n_j} dn_i$$

Θα ολοκληρώσουμε τώρα υπό p, T : constant

$$dY = \sum \bar{y}_i dn_i$$



Τέχνασμα «ολοκλήρωσης»:

Η Y είναι **εκτατική** ιδιότητα. Άρα, αν το Σύστημα μεγαλώσει k φορές, η Y θα γίνει: kY και τα n_i θα γίνουν kn_i

Γενικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$Y = Y(p, T, n_1, n_2, \dots) \Rightarrow dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial p} \right)_{T, n_i} dp + \left(\frac{\partial Y}{\partial T} \right)_{p, n_i} dT + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial n_i} \right)_{p, T, n_j} dn_i$$

Θα ολοκληρώσουμε τώρα υπό p, T : constant

$$dY = \sum \bar{y}_i dn_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Τέχνασμα «ολοκλήρωσης»:\\ \text{Η } Y \text{ είναι } \mathbf{εκτατική} \text{ ιδιότητα. Άρα, αν το} \\ \text{Σύστημα μεγαλώσει } k \text{ φορές, η } Y \text{ θα γίνει: } kY \\ \text{και τα } n_i \text{ θα γίνουν } kn_i \end{array} \right.$$



$$\Delta Y = \sum \bar{y}_i \Delta n_i \Rightarrow (k - 1)Y = \sum \bar{y}_i (k - 1)n_i \Rightarrow Y = \sum n_i \bar{y}_i$$

Άρα, πράγματι ο ορισμός που δώσαμε εξασφαλίζει ότι η Y μπορεί να εκφραστεί σε όρους που δηλώνουν τη συνεισφορά κάθε συστατικού στην Ολική ιδιότητα του συστήματος

$$\bar{v}_i \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j}$$

$$V = \sum n_i \bar{v}_i$$

$$\bar{u}_i \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j}$$

$$U = \sum n_i \bar{u}_i$$

$$\bar{h}_i \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j}$$

$$H = \sum n_i \bar{h}_i$$

$$\bar{s}_i \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j}$$

$$S = \sum n_i \bar{s}_i$$

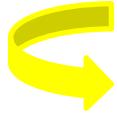
$$\bar{a}_i \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j}$$

$$A = \sum n_i \bar{a}_i$$

$$\bar{g}_i \equiv \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j} = \mu_i$$

$$G = \sum n_i \bar{g}_i = \sum n_i \mu_i$$

Σχέσεις μεταξύ μερικών γραμμομοριακών ιδιοτήτων.



Ίδιες με αυτές μεταξύ των ολικών ιδιοτήτων του Συστήματος

Πχ $H = U + pV$ Παραγωγίζουμε ως προς n_i υπό 'σταθερά p, T και n_j :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{T, p, n_j} = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{T, p, n_j} + p \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} \right)_{T, p, n_j} \Rightarrow$$
$$\bar{h}_i = \bar{u}_i + p\bar{v}_i$$

Σχέσεις μεταξύ μερικών γραμμομοριακών ιδιοτήτων.

Ίδιες με αυτές μεταξύ των ολικών ιδιοτήτων του Συστήματος

Πχ $H = U + pV$ Παραγωγίζουμε ως προς n_i υπό 'σταθερά p, T και n_j :

$$\bar{h}_i = \bar{u}_i + p\bar{v}_i$$

$$G = H - TS$$

Όμοια:

$$\bar{a}_i = \bar{u}_i - T\bar{s}_i$$

και

$$\mu_i = \bar{g}_i = \bar{h}_i - T\bar{s}_i \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, p, n_j}$$

Μερικές παράγωγοι του χημικού δυναμικού, μ_i

Αφετηρία:

$$dG = -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dn_i$$

Επιλεγμένες σχέσεις Maxwell :

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p, n_i, n_j} = - \left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_j} = -\bar{s}_i$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p}\right)_{T, n_i, n_j} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_j} = \bar{v}_i$$



Handwritten derivation of the first Maxwell relation:

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{n_i, p, n_j} = - \left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_j} = -\bar{s}_i$$

The right-hand side of the equation is circled in blue, with a blue arrow pointing to the symbol \bar{s}_i written above it.

$$dU = TdS - pdV + \sum \mu_i dn_i$$

$$dH = TdS + vdp + \sum \mu_i dn_i$$

$$dA = -SdT - pdV + \sum \mu_i dn_i$$

$$dG = -SdT + vdp + \sum \mu_i dn_i \quad \leftarrow$$

Επιλεγμένες σχέσεις Maxwell :

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p, n_i, n_j} = -\left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_j} = -\bar{s}_i$$
$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p}\right)_{T, n_i, n_j} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_j} = \bar{v}_i$$

$$(1) \quad \mu_i = \bar{h}_i - T\bar{s}_i \Rightarrow$$

Συνδυασμός με την (1):

$$\mu_i = \bar{h}_i + T \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p, n_i, n_j}$$

και με αναδιάταξη:

$$\left(\frac{\partial \mu_i / T}{\partial T}\right)_{p, n_i, n_j} = -\frac{\bar{h}_i}{T^2}$$

Για συστατικό μείγματος

Αντίστοιχες σχέσεις έχουμε δει για Συστήματα ενός συστατικού

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_p = -s_i$$

Για καθαρό συστατικό

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p}\right)_T = v_i$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i / T}{\partial T}\right)_p = -\frac{h_i}{T^2}$$

$\mu = \mu(T, p)$
για
καθαρό
συστατικό

$$\mu_i = \bar{h}_i + T \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T} \right)_{p, n_i, n_j} \Rightarrow -\bar{h}_i = -\mu_i + T \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T} \right)_{p, n_i, n_j}$$

$$\Rightarrow -\frac{\bar{h}_i}{T^2} = -\frac{\mu_i}{T^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T} \right)_{p, n_i, n_j} \Rightarrow$$

$$-\frac{\bar{h}_i}{T^2} = \left(\frac{\partial \mu_i / T}{\partial T} \right)_{p, n_i, n_j}$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T} \right)_{p, n_i, n_j} = -\bar{s}_i$$

"Εργαλειοθήκη"

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p} \right)_{T, n_i, n_j} = \bar{v}_i$$

$$\mu_i = \bar{h}_i - T\bar{s}_i$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i / T}{\partial T} \right)_{p, n_i, n_j} = -\frac{\bar{h}_i}{T^2}$$

Εξίσωση Gibbs-Duhem

Διαφορίζοντας την $G = \sum n_i \mu_i \rightarrow dG = \sum \mu_i dn_i + \sum n_i d\mu_i$

Εξίσωση Gibbs-Duhem

Διαφορίζοντας την $G = \sum n_i \mu_i \rightarrow dG = \sum \mu_i dn_i + \sum n_i d\mu_i$

Συνδυασμός με: $dG = -SdT + Vdp + \sum \mu_i dn_i$



$$-SdT + Vdp - \sum n_i d\mu_i = 0$$

$$SdT - Vdp + \sum n_i d\mu_i = 0$$

The bartender problem 1/5

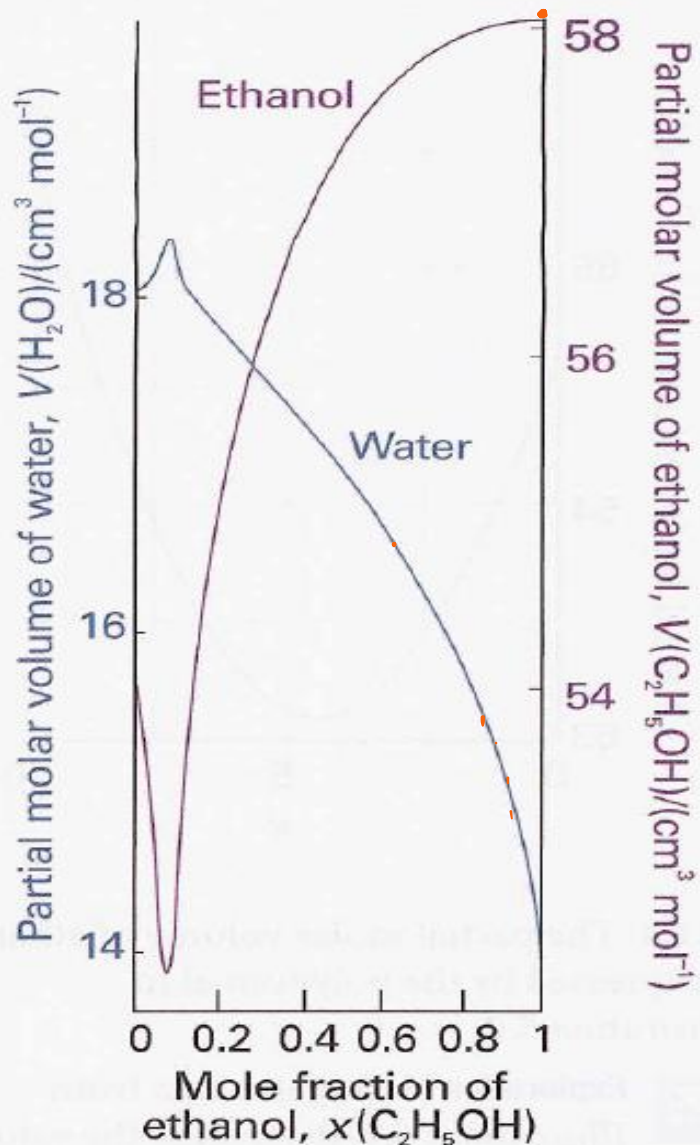


Fig. 5.1 The partial molar volumes of water and ethanol at 25°C. Note the different scales (water on the left, ethanol on the right).

Ένας μπουφειτζής θέλει να φτιάξει 100 cm³ ενός ποτού αναμειγνύοντας 30 cm³ αιθανόλη και 70 cm³ νερό στους 25°C. Θα τα καταφέρει;

Το διάγραμμα δίνει τους μερικούς γραμμομοριακούς όγκους της αιθανόλης και του νερού στα μεταξύ τους μείγματα στους 25°C. Επιπλέον δίνονται οι πυκνότητες στους 25°C:
Πυκνότητα αιθανόλης: 0.789 g cm⁻³
Πυκνότητα νερού: 0.997 g cm⁻³

$$x_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad x_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

Λύση:

- $n(\text{H}_2\text{O}) = (70 \text{ cm}^3) \times (0.997 \text{ g cm}^{-3}) / (18.02 \text{ g mol}^{-1}) = 3.873 \text{ mol}$

- $n(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}) = (30 \text{ cm}^3) \times (0.789 \text{ g cm}^{-3}) / (46 \text{ g mol}^{-1}) = 0.514 \text{ mol}$

Λύση:

$$- n(\text{H}_2\text{O}) = (70 \text{ cm}^3) \times (0.997 \text{ g cm}^{-3}) / (18.02 \text{ g mol}^{-1}) = 3.873 \text{ mol}$$

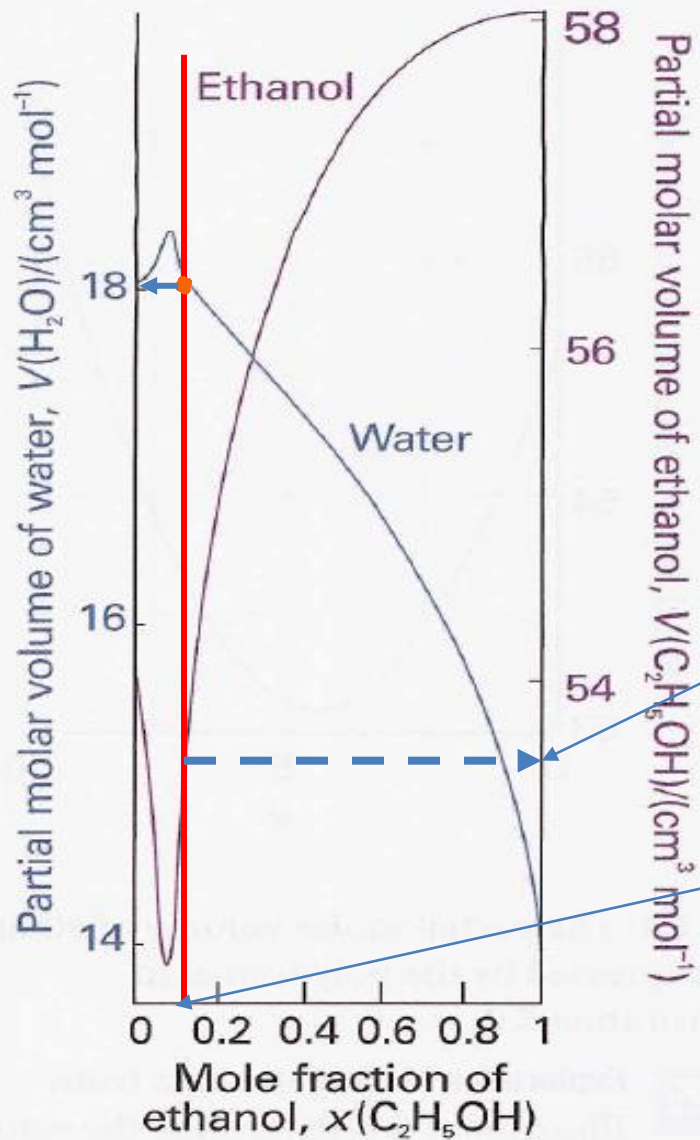
$$- n(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}) = (30 \text{ cm}^3) \times (0.789 \text{ g cm}^{-3}) / (46 \text{ g mol}^{-1}) = 0.514 \text{ mol}$$

$$\text{και } \sum n_i = 4.387 \text{ moles} \quad \text{Άρα, } x_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{3.873}{4.387} = 0.883 \quad x_{\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}} = 0.117$$

Από το Διάγραμμα των πειραματικών δεδομένων, βρίσκουμε τους μερικούς γραμμομοριακούς όγκους των δύο ουσιών για

$$x_{\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}} = 0.117$$

The bartender problem 4/5



$$\bar{v}_{H_2O} = 18 \text{ cm}^3 \text{mol}^{-1}$$

$$\bar{v}_{CH_3CH_2OH} = 53.6 \text{ cm}^3 \text{mol}^{-1}$$

$$x_{CH_3CH_2OH} = 0.117$$

Fig. 5.1 The partial molar volumes of water and ethanol at 25°C. Note the different scales (water on the left, ethanol on the right).

Άρα, ο Συνολικός Όγκος είναι:

$$V = \sum n_i \bar{v}_i = n_1 \bar{v}_1 + n_2 \bar{v}_2$$

$$V = (3.873 \text{ mol}) \times (18 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}) + (0.514 \text{ mol}) \times (53.6 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}) = 97.3 \text{ cm}^3$$

Η Εξίσωση Gibbs-Duhem για Μερικές Γραμμομοριακές Ιδιότητες

$$-SdT + Vdp - \sum n_i d\mu_i = 0$$


$$-\frac{S}{\sum n_i} dT + \frac{V}{\sum n_i} dp - \frac{\sum n_i d\mu_i}{\sum n_i} = 0 \quad \longrightarrow \quad -sdT + vdp - \sum x_i d\mu_i = 0$$

$$\sum x_i d\mu_i = 0$$

υπό (p, T) : σταθ

Και γενικά:

$$\sum x_i d\bar{y}_i = 0$$

υπό (p, T) : σταθ

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

Για Σύστημα με πολλά συστατικά, ο υπολογισμός γίνεται με τη βοήθεια υπολογιστικού κώδικα.

Για Σύστημα με 2 συστατικά, ο προσδιορισμός γίνεται με χρήση διαγράμματος και τη **Μέθοδο των Εφαπτομένων**.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

Για Σύστημα με πολλά συστατικά, ο υπολογισμός γίνεται με τη βοήθεια υπολογιστικού κώδικα.

Για Σύστημα με 2 συστατικά, ο προσδιορισμός γίνεται με χρήση διαγράμματος και τη **Μέθοδο των Εφαπτομένων**.

Απαιτούνται Πειραματικά
Δεδομένα

Μετρήσεις της μέσης ιδιότητας,
 y , ως προς τη σύσταση, x

Y : ολική ιδιότητα

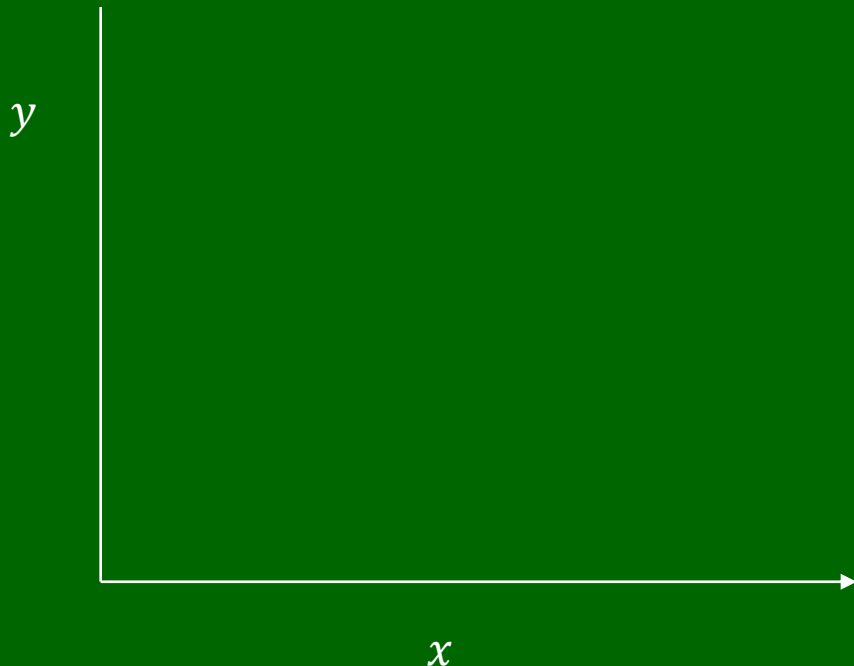
$$\frac{Y}{\sum n_i} = y \quad , \quad x_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$$

$\sum x_i = 1$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

Για Σύστημα με πολλά συστατικά, ο υπολογισμός γίνεται με τη βοήθεια υπολογιστικού κώδικα.

Για Σύστημα με 2 συστατικά, ο προσδιορισμός γίνεται με χρήση διαγράμματος και τη **Μέθοδο των Εφαπτομένων**.



Απαιτούνται Πειραματικά
Δεδομένα

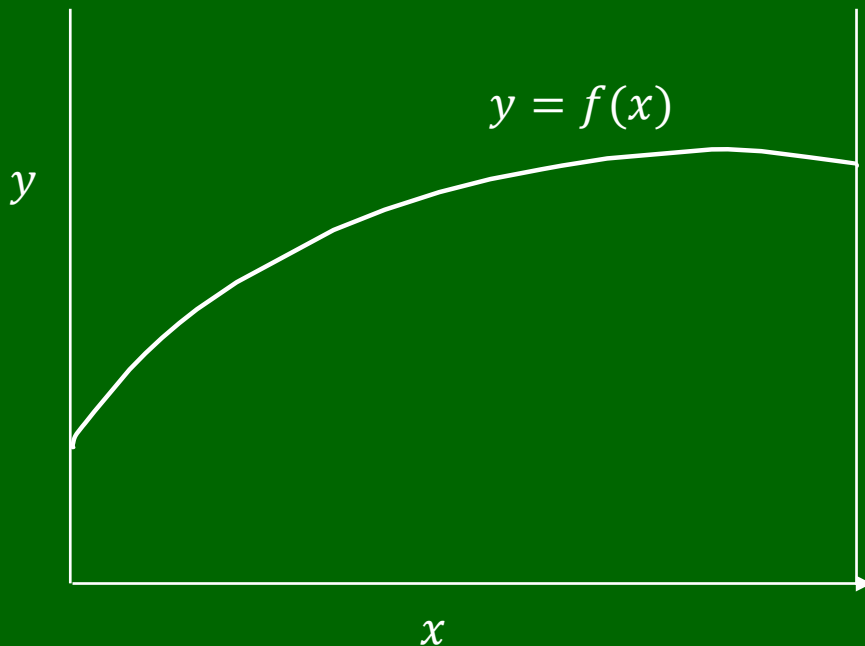
Μετρήσεις της μέσης ιδιότητας,
 y , ως προς τη σύσταση, x

$$\frac{Y}{\sum n_i} = y$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

Για Σύστημα με πολλά συστατικά, ο υπολογισμός γίνεται με τη βοήθεια υπολογιστικού κώδικα.

Για Σύστημα με 2 συστατικά, ο προσδιορισμός γίνεται με χρήση διαγράμματος και τη **Μέθοδο των Εφαπτομένων**.

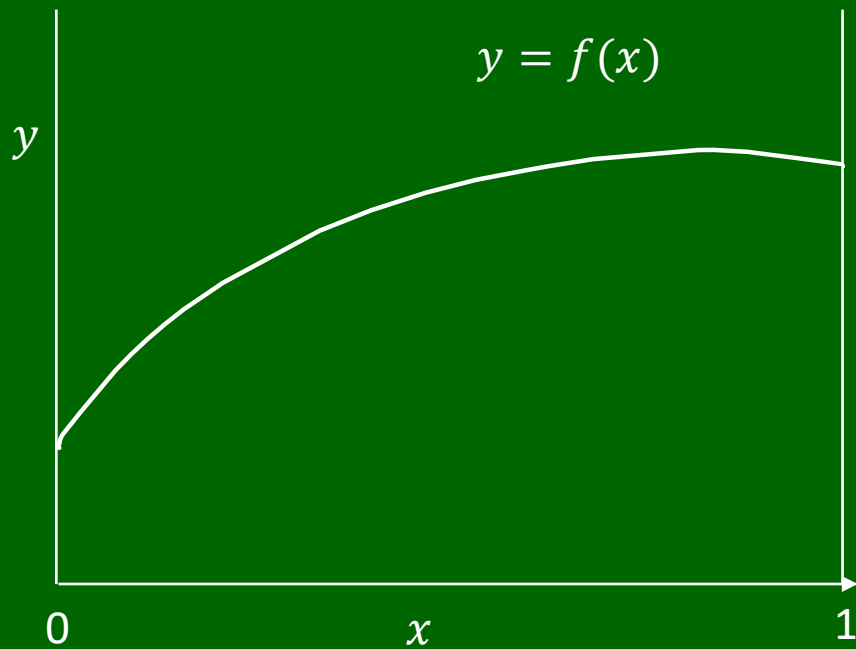


Απαιτούνται Πειραματικά
Δεδομένα

Μετρήσεις της μέσης ιδιότητας,
 y , ως προς τη σύσταση, x

$$\frac{\sum y_i}{\sum n_i} = y$$

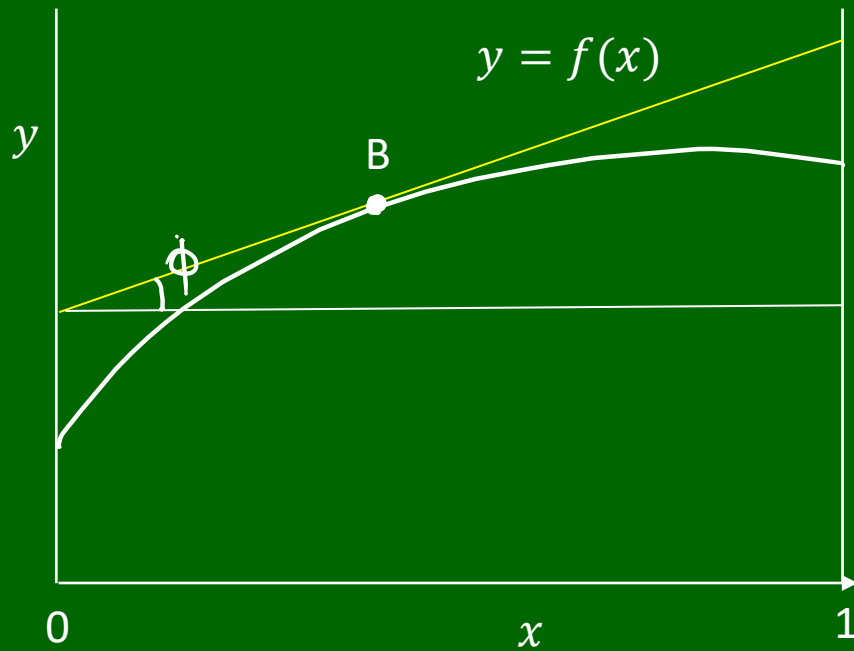
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ



$$\sum x_i d\bar{y}_i = 0$$

υπό (p, T) : σταθ

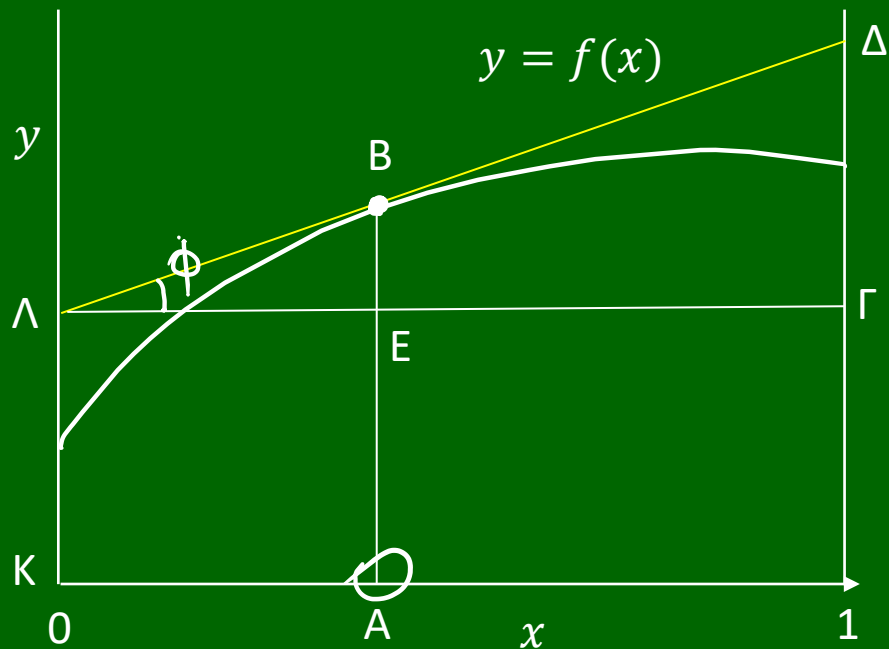
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ



$$\sum x_i d\bar{y}_i = 0$$

υπό (p, T) : σταθ

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ



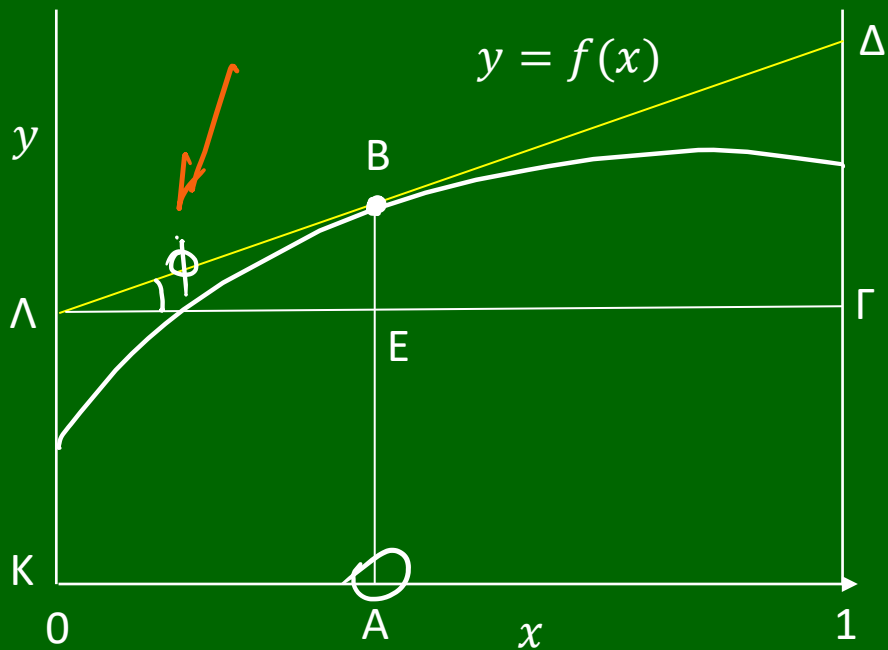
$$\sum x_i d\bar{y}_i = 0 \quad \text{G-D}$$

υπό (p, T) : σταθ

$$Y = \sum n_i \bar{y}_i = n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2$$

$$\stackrel{\sum n_i}{\Rightarrow} y = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ



$$\sum x_i d\bar{y}_i = 0 \quad \text{G-D}$$

υπό (p, T) : σταθ

$$Y = \sum n_i \bar{y}_i = n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2$$

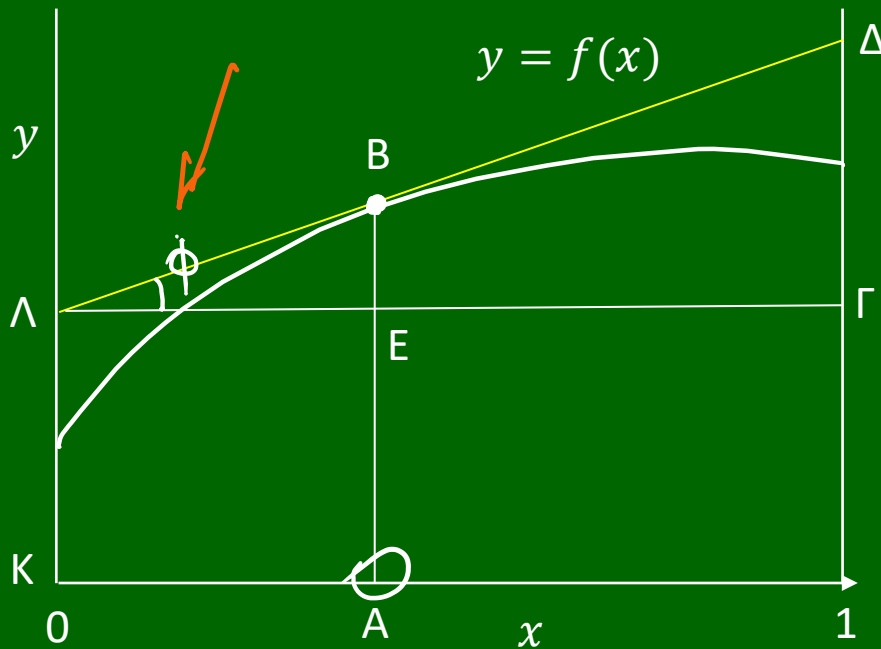
$$\Rightarrow y = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 &= x \\ x_2 &= 1 - x \end{aligned}$$

Αρα: $y = x \bar{y}_1 + (1-x) \bar{y}_2 \quad (1)$

↳ $y = x(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + \bar{y}_2 \quad (1b)$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ



$$\sum x_i d\bar{y}_i = 0 \quad \text{G-D}$$

υπό (p, T) : σταθ

$$Y = \sum n_i \bar{y}_i = n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2$$

$$\Rightarrow y = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$$

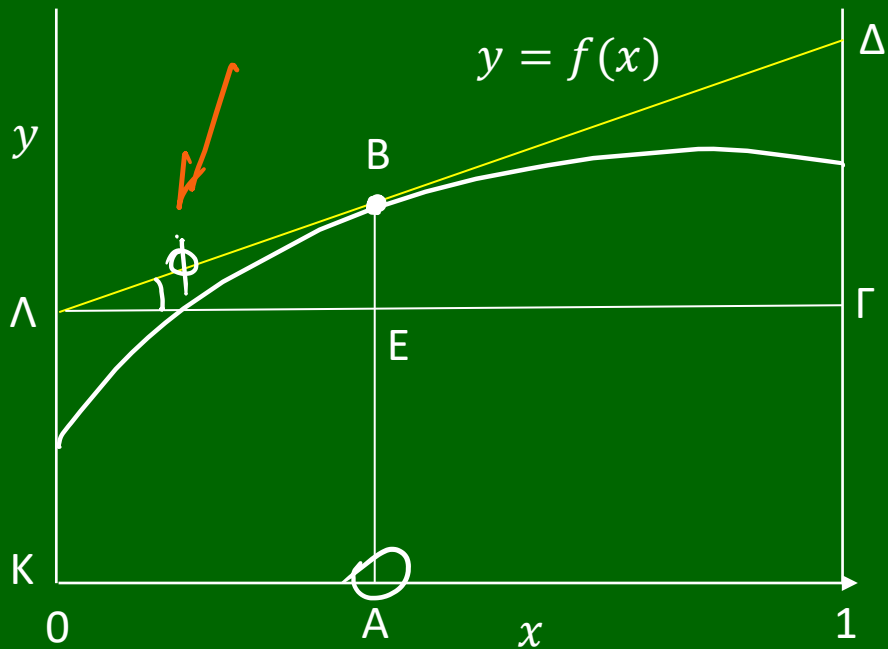
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 &= x \\ x_2 &= 1 - x \end{aligned}$$

Αρα: $y = x \bar{y}_1 + (1-x) \bar{y}_2 \quad (1)$

$\hookrightarrow y = x(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + \bar{y}_2 \quad (1b)$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \bar{y}_1 + x \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x} - \bar{y}_2 + (1-x) \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial x}$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ



$$\sum x_i d\bar{y}_i = 0 \quad \text{G-D}$$

υπό (p, T): σταθ

$$Y = \sum n_i \bar{y}_i = n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2$$

$$\stackrel{\sum n_i}{\Rightarrow} y = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 &= x \\ x_2 &= 1 - x \end{aligned}$$

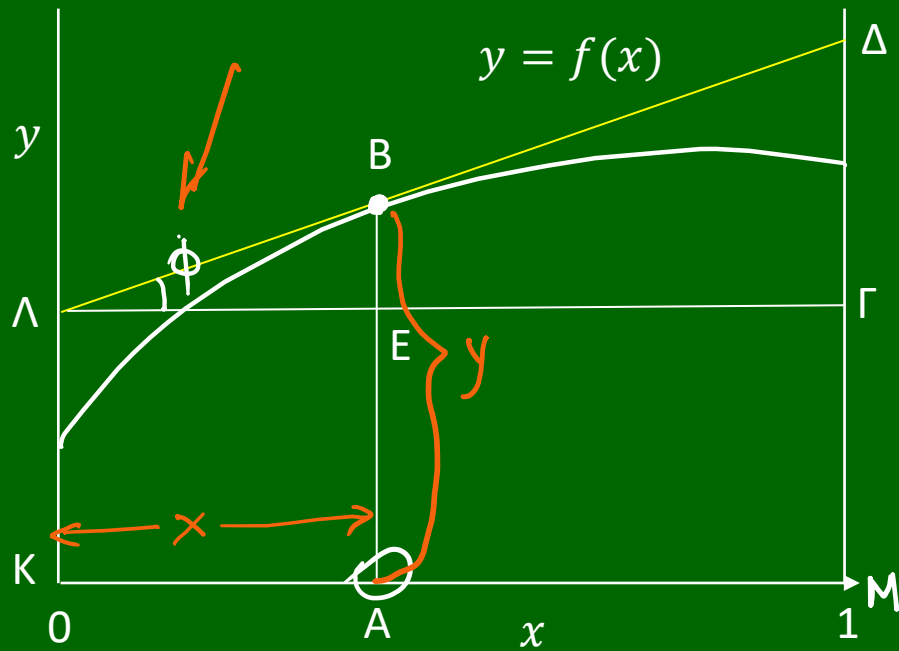
Αρα: $y = x \bar{y}_1 + (1-x) \bar{y}_2 \quad (1)$

↳ $y = x(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + \bar{y}_2 \quad (1b)$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \bar{y}_1 + \underbrace{x \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x} - \bar{y}_2 + (1-x) \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial x}}_{\text{G-D}}$$

Αρα: $y = x\bar{y}_1 + (1-x)\bar{y}_2$ (1)

↳ $y = x(\underbrace{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}) + \bar{y}_2$ (1b) ✓



Και (βλ. προηγ. διαφάνεια)



$\frac{\partial y}{\partial x} = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$ (2) ✓

?

Άρα: $y = x\bar{y}_1 + (1-x)\bar{y}_2$ (1)

↳ $y = x(\underbrace{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}) + \bar{y}_2$ (1b) ✓

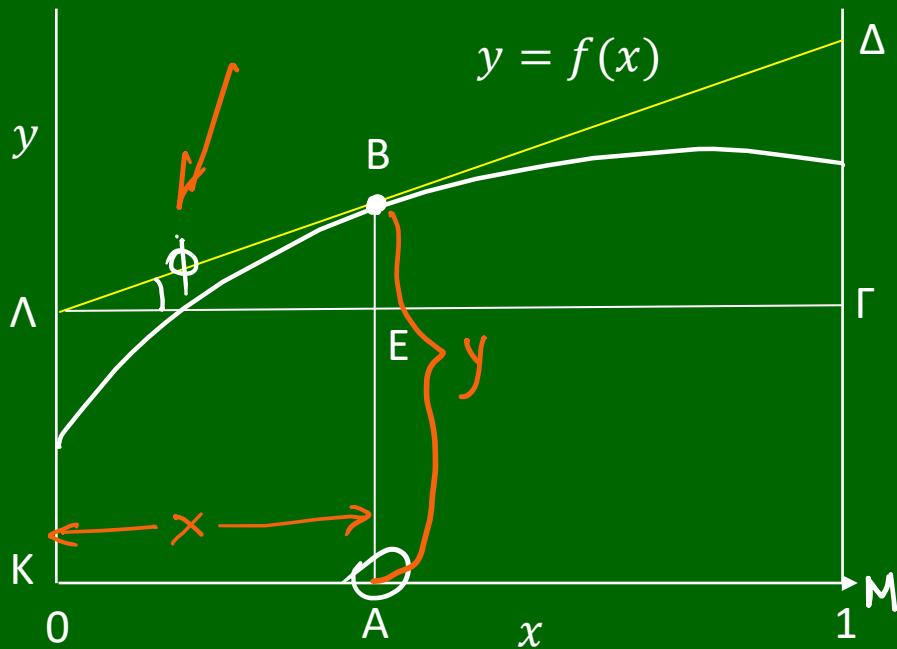
Και (βλ. προηγ. διαφάνεια)



$\frac{\partial y}{\partial x} = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$ (2) ✓



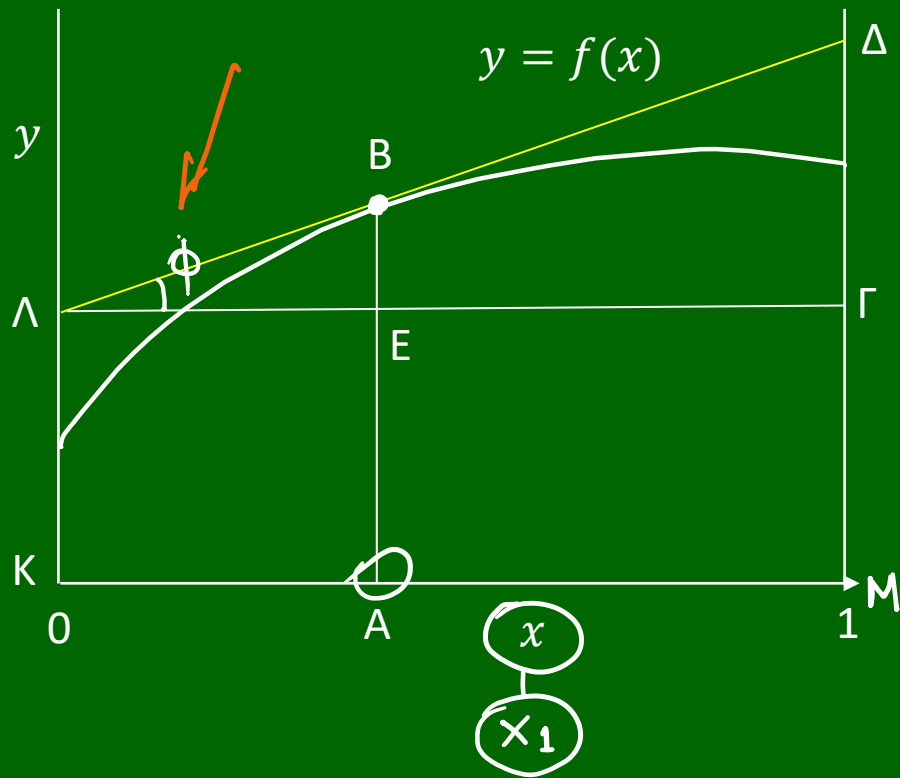
(1b), (2) $\Rightarrow y = x \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] + \bar{y}_2$



Άρα κατά μήκος έχουμε: $y = x \tan \phi + \bar{y}_2$

Από το Διάγραμμα έχουμε: $y = (AB)$
 $x \tan \phi = (BE)$

$\Rightarrow \bar{y}_2 = (EA) = (K\Lambda)$



Είδαμε δηλ.:

$$(κλ) = \bar{y}_2$$

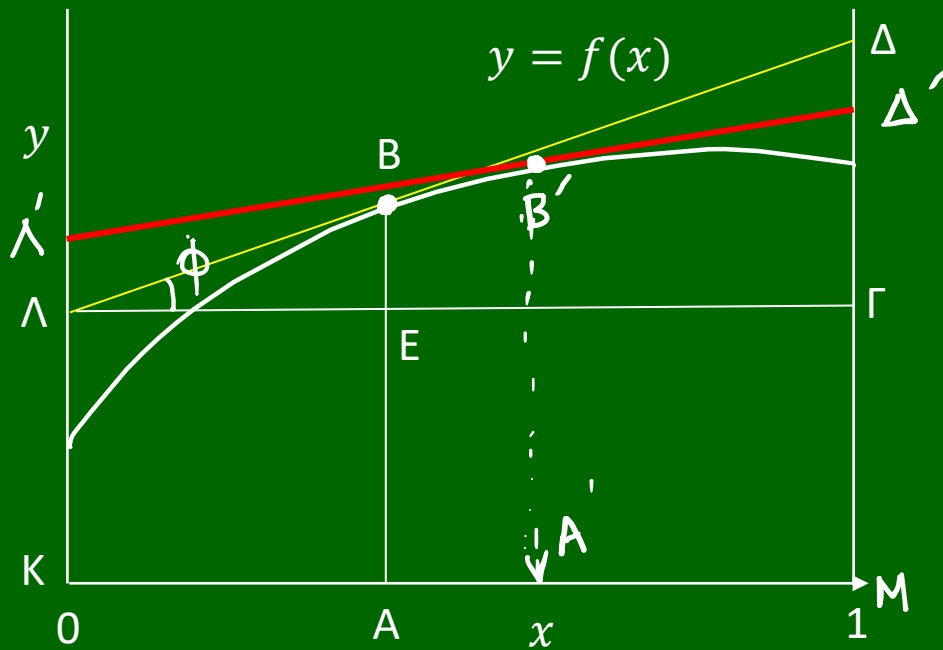
Βλέπουμε τώρα!

$$\tan \phi = \frac{(\Delta \Gamma)}{(\Lambda \Gamma)} = \frac{(\Delta \Gamma)}{1}$$

Από το
τριγωνίο
ΛΔΓ

Αλλά! (2): $\tan \phi = \bar{y}_1, -\bar{y}_2$ } $\Rightarrow \bar{y}_1 = (\Delta M)$

Ομως: $\tan \phi = (\Gamma \Delta)$
 $\bar{y}_2 = (κλ) = (M \Gamma)$



Σύνοψη:

Άρα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τις \bar{Y}_1 και \bar{Y}_2 σε κάποια σύσταση του μείγματος, φέρνουμε την εφαπτομένη στην καμπύλη $y = f(x)$ στη σύσταση που μας ενδιαφέρει (πχ B ή B') και βρίσκουμε τις \bar{Y}_1 και \bar{Y}_2 από τις αποτέμνουσες στους κάθετους άξονες

$$(κλ) = \bar{Y}_2 \quad (\text{σύσταση } A)$$

$$(κλ') = \bar{Y}_2' \quad (\text{σύσταση } A')$$

$$(μΔ) = \bar{Y}_1 \quad (\text{σύσταση } A)$$

$$(μΔ') = \bar{Y}_1' \quad (\text{σύσταση } A')$$