ΧΗΜΙΚΗ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

1
Γραμμομοριακές & Μερικές Γραμμομοριακές Ιδιότητες

1η Διάλεξη: Δευτέρα 16.02.2026, 09.15 – 11.00
2η Διάλεξη: ΄Πέμπτη 19.02.2026, 11.15 – 12.00

Γραμμομοριακές & Μερικές Γραμμομοριακές Ιδιότητες

U, S, V, H, A, G

Αναφέρονται/αντιστοιχούν στο **συνολικό** Σύστημα

Αναζητούμε τη **συνεισφορά** του *καθενός συστατικού* στη **Συνολική** Ιδιότητα

Γραμμομοριακές & Μερικές Γραμμομοριακές Ιδιότητες

U, S, V, H, A, G

Αναφέρονται/αντιστοιχούν στο **συνολικό** Σύστημα

Αναζητούμε τη **συνεισφορά** του $\underbrace{\textit{καθενός συστατικού}}_{\text{ενός mole κάθε συστατικού}}$ στη **Συνολική** Ιδιότητα

Έτσι, σε Συστήματα με ένα συστατικό: $dU = TdS - pdV + \sum_{i=1}^{n} \mu_i dn_i \Rightarrow$

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}n \qquad (1)$$

Γραμμομοριακές & Μερικές Γραμμομοριακές Ιδιότητες

U, S, V, H, A, G

Αναφέρονται/αντιστοιχούν στο **<u>συνολικό</u>** Σύστημα

Αναζητούμε τη **συνεισφορά** του $\underbrace{\textit{καθενός συστατικού}}_{\text{ενός mole κάθε συστατικού}}$ στη **<u>Συνολική</u>** Ιδιότητα

Έτσι, σε Συστήματα με <u>ένα</u> συστατικό:

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}n \qquad (1)$$

$$\boxed{\text{Γραμμομοριακή Ιδιότητα:} \quad u = \frac{U}{n},\ s = \frac{S}{n},\ \upsilon = \frac{V}{n} \quad \text{κλπ}}$$

Άρα, (1) $\Rightarrow$ $n\mathrm{d}u + u\mathrm{d}n = Tn\mathrm{d}s + Ts\mathrm{d}n - pn\mathrm{d}\upsilon - p\upsilon\mathrm{d}n + \mu\mathrm{d}n$

$$\Rightarrow n\mathrm{d}u = Tn\mathrm{d}s - pn\mathrm{d}\upsilon + \underbrace{\cancel{(\mu - u + Ts - p\upsilon)}}_{=0}\mathrm{d}n \Rightarrow \boxed{\mathrm{d}u = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}\upsilon}$$

Ανάλογα:

$$\mathrm{d}u = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p$$

$$\mathrm{d}a = -s\mathrm{d}T - p\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}g = -s\mathrm{d}T + v\mathrm{d}p$$

Οι γραμμομοριακές ιδιότητες δεν εξαρτώνται από το μέγεθος του Συστήματος. Είναι Εντατικές Ιδιότητες

Μερικές γραμμομοριακές ιδιότητες

Αναφέρονται σε *πολυσυστατικά* Συστήματα

Ζητάμε τώρα ανάλογες ιδιότητες, πχ. $\bar{u}_i$
για να εκφράσουμε τις <u>Ολικές Ιδιότητες του Συστήματος,</u> πχ U
σαν *άθροισμα συνεισφορών* από κάθε συστατικό, i.
Δηλ.:

$$U = \sum n_i \bar{u}_i$$

Και γενικά: $$\boxed{Y = \sum n_i \bar{y}_i}$$

Ορίζουμε τη μερική γραμμομοριακή ιδιότητα του συστατικού i, ως:

$$\bar{y}_i \equiv \left(\frac{\partial Y}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} \qquad Y = \sum n_i \bar{y}_i$$

Γενικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$Y = Y(p, T, n_1, n_2, \ldots) \Rightarrow dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)_{T,n_i} \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_{p,n_i} \mathrm{d}T + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial n_i}\right)_{p,T,n_j} \mathrm{d}n_i$$

Θα ολοκληρώσουμε τώρα υπό *p,T* : constant

Γενικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$Y = Y(p, T, n_1, n_2, \ldots) \Rightarrow dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)_{T,n_i} \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_{p,n_i} \mathrm{d}T + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial n_i}\right)_{p,T,n_j} \mathrm{d}n_i$$

Θα ολοκληρώσουμε τώρα υπό *p,T* : constant

$$dY = \sum \bar{y}_i \mathrm{d}n_i$$

<u>Τέχνασμα «ολοκλήρωσης»:</u>

Η Y είναι **εκτατική** ιδιότητα. Άρα, αν το Σύστημα μεγαλώσει k φορές, η Y θα γίνει: kY και τα n_i θα γίνουν kn_i

Γενικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$Y = Y(p, T, n_1, n_2, \dots) \Rightarrow dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)_{T,n_i} \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_{p,n_i} \mathrm{d}T + \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial n_i}\right)_{p,T,n_j} \mathrm{d}n_i$$

Θα ολοκληρώσουμε τώρα υπό *p,T* : constant

$$dY = \sum \bar{y}_i \mathrm{d}n_i$$

Τέχνασμα «ολοκλήρωσης»:
Η Y είναι **εκτατική** ιδιότητα. Άρα, αν το Σύστημα μεγαλώσει k φορές, η Y θα γίνει: kY και τα n_i θα γίνουν kn_i

$$\Delta Y = \sum \bar{y}_i \Delta n_i \Rightarrow (k-1)Y = \sum \bar{y}_i (k-1) n_i \Rightarrow \; Y = \sum n_i \bar{y}_i$$

Άρα, πράγματι ο ορισμός που δώσαμε εξασφαλίζει ότι η Y μπορεί να εκφραστεί σε όρους που δηλώνουν τη *συνεισφορά* κάθε συστατικού στην Ολική ιδιότητα του Συστήματος

$$\bar{\upsilon}_i \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} \qquad V = \sum n_i \bar{\upsilon}_i$$

$$\bar{u}_i \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} \qquad U = \sum n_i \bar{u}_i$$

$$\bar{h}_i \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} \qquad H = \sum n_i \bar{h}_i$$

$$\bar{s}_i \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} \qquad S = \sum n_i \bar{s}_i$$

$$\bar{a}_i \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} \qquad A = \sum n_i \bar{a}_i$$

$$\bar{g}_i \equiv \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} = \mu_i \qquad G = \sum n_i \bar{g}_i = \sum n_i \mu_i$$

Σχέσεις μεταξύ μερικών γραμμομοριακών ιδιοτήτων.

Ίδιες με αυτές μεταξύ των ολικών ιδιοτήτων του Συστήματος

Πχ $H = U + pV$ Παραγωγίζουμε ως προς n_i υπό ΄σταθερά p, T και n_j:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} + p\left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} \Rightarrow$$

$$\bar{h}_i = \bar{u}_i + p\bar{v}_i$$

Σχέσεις μεταξύ μερικών γραμμομοριακών ιδιοτήτων.

Ίδιες με αυτές μεταξύ των ολικών ιδιοτήτων του Συστήματος

Πχ $H = U + pV$ Παραγωγίζουμε ως προς n_i υπό ΄σταθερά p, T και n_j:

$$\overline{h}_i = \overline{u}_i + p\overline{\upsilon}_i$$

$G = H - TS$

Όμοια:

$$\overline{a}_i = \overline{u}_i - T\overline{s}_i$$

και

$$\boxed{\mu_i = \bar{g}_i = \bar{h}_i - T\bar{s}_i \qquad (1)}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j}$$

Μερικές παράγωγοι του χημικού δυναμικού, μ_i

Αφετηρία:

$$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \sum_i \mu_i \mathrm{d}n_i$$

Επιλεγμένες σχέσεις Maxwell :

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p,n_i,n_j} &= -\left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} = -\bar{s}_i \\ \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p}\right)_{T,n_i,n_j} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} = \bar{v}_i \end{aligned}}$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{n_i,p,n_j} = -\overbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j}}^{\bar{s}_i}$$

$$dU = TdS - pdV + \sum \mu_i dn_i$$

$$dH = TdS + vdp + \sum \mu_i dn_i$$

$$dA = -SdT - pdV + \sum \mu_i dn_i$$

$$dG = -SdT + vdp + \sum \mu_i dn_i$$

Επιλεγμένες σχέσεις Maxwell :

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p,n_i,n_j} = -\left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} = -\bar{s}_i$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p}\right)_{T,n_i,n_j} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} = \bar{v}_i$$

(1) $\mu_i = \bar{h}_i - T\bar{s}_i \Rightarrow$

Συνδυασμός με την (1):

$$\mu_i = \bar{h}_i + T\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p,n_i,n_j}$$

και με αναδιάταξη:

$$\left(\frac{\partial \mu_i/T}{\partial T}\right)_{p,n_i,n_j} = -\frac{\bar{h}_i}{T^2}$$

Για συστατικό **<u>μείγματος</u>**

Αντίστοιχες σχέσεις έχουμε δει για Συστήματα **<u>ενός</u>** συστατικού

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_p = -s_i$$

Για καθαρό συστατικό

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p}\right)_T = v_i \qquad \left(\frac{\partial \mu_i/T}{\partial T}\right)_p = -\frac{h_i}{T^2}$$

$\mu = \mu(T,p)$ για καθαρό συστατικό

$$\mu_i = \bar{h}_i + T\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p,n_i,n_j} \Rightarrow -\bar{h}_i = -\mu_i + T\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p,n_i,n_j}$$

$$\Rightarrow -\frac{\bar{h}_i}{T^2} = -\frac{\mu_i}{T^2} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p,n_i,n_j} \Rightarrow$$

$$-\frac{\bar{h}_i}{T^2} = \left(\frac{\partial\, \mu_i/T}{\partial T}\right)_{p,n_i,n_j}$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p,n_i,n_j} = -\bar{s}_i$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p}\right)_{T,n_i,n_j} = \bar{v}_i$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i/T}{\partial T}\right)_{p,n_i,n_j} = -\frac{\bar{h}_i}{T^2}$$

"Εργαλειοθήκη"

$$\mu_i = \bar{h}_i - T\bar{s}_i$$

Εξίσωση Gibbs-Duhem

Διαφορίζοντας την $G = \sum n_i \mu_i$ ⇒ $\mathrm{dG} = \sum \mu_i \mathrm{dn_i} + \sum n_i \mathrm{d}\mu_\mathrm{i}$

Εξίσωση Gibbs-Duhem

Διαφορίζοντας την $G = \sum n_i \mu_i$ $\Rightarrow$ $$\mathrm{dG} = \sum \mu_i \mathrm{dn_i} + \sum n_i \mathrm{d}\mu_\mathrm{i}$$

Συνδυασμός με: $$\mathrm{dG} = -S\mathrm{dT} + V\mathrm{dp} + \sum \mu_i \mathrm{dn_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{-S\mathrm{dT} + V\mathrm{dp} - \sum n_i \mathrm{d}\mu_\mathrm{i} = 0}$$

$$SdT - Vdp + \sum n_i d\mu_i = 0$$

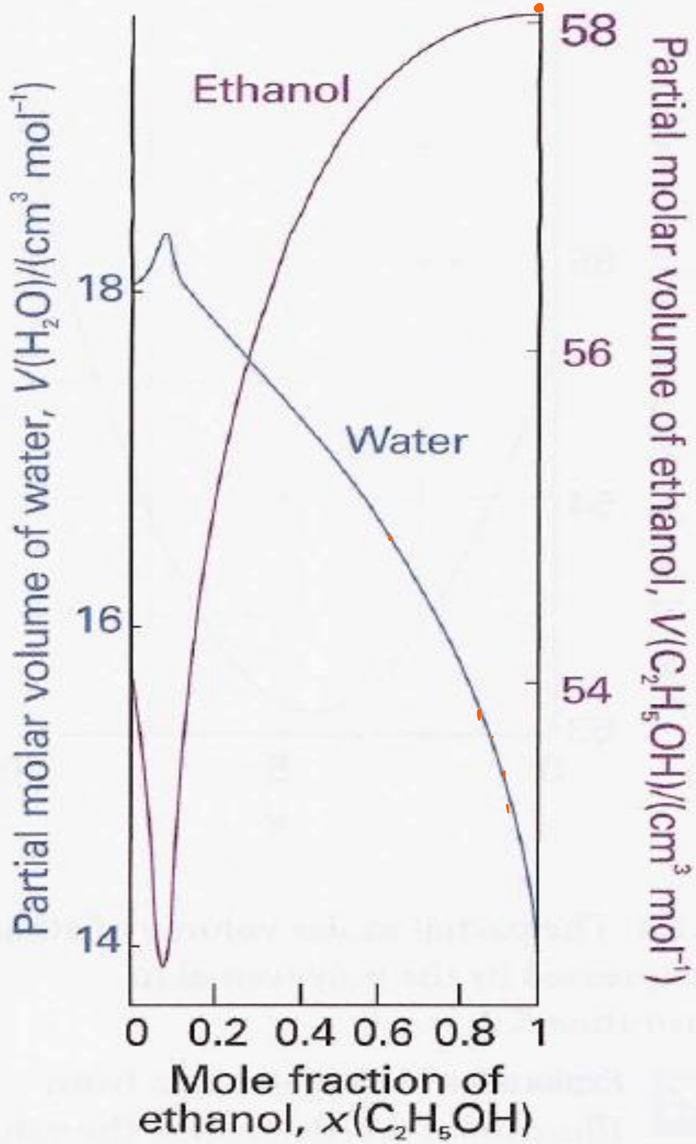


Fig. 5.1 The partial molar volumes of water and ethanol at 25°C. Note the different scales (water on the left, ethanol on the right).

The bartender problem 1/5

Ένας μπουφετζής θέλει να φτιάξει 100 cm^3 ενός ποτού αναμειγνύοντας 30 cm^3 αιθανόλη και 70 cm^3 νερό στους 25°C. Θα τα καταφέρει;

Το διάγραμμα δίνει τους μερικούς γραμμομοριακούς όγκους της αιθανόλης και του νερού στα μεταξύ τους μείγματα στους 25°C. Επιπλέον δίνονται οι πυκνότητες στους 25°C:
Πυκνότητα αιθανόλης: 0.789 g cm^{-3}
Πυκνότητα νερού: 0.997 g cm^{-3}

$$x_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \qquad x_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$$

$x_1 + x_2 = 1$

Λύση:

- $n(H_2O) = (70\ cm^3) \times (0.997\ g\ cm^{-3})/(18.02\ g\ mol^{-1}) = 3.873\ mol$

- $n(CH_3CH_2OH) = (30\ cm^3) \times (0.789\ g\ cm^{-3})/(46\ g\ mol^{-1}) = 0.514\ mol$

Λύση:

- $n(H_2O)$ = (70 cm^3) × (0.997 g cm^{-3})/(18.02 g mol^{-1}) = 3.873 mol
- $n(CH_3CH_2OH)$ = (30 cm^3) × (0.789 g cm^{-3})/(46 g mol^{-1}) = 0.514 mol

και $\sum \mathrm{n_i} = 4.387 moles$ Άρα , $x_{H_2O} = \dfrac{3.873}{4.387} = 0.883$ $x_{CH_3CH_2OH} = 0.117$

Από το Διάγραμμα των πειραματικών δεδομένων, βρίσκουμε τους μερικούς γραμμομοριακούς όγκους των δύο ουσιών για $x_{CH_3CH_2OH} = 0.117$

The bartender problem 4/5

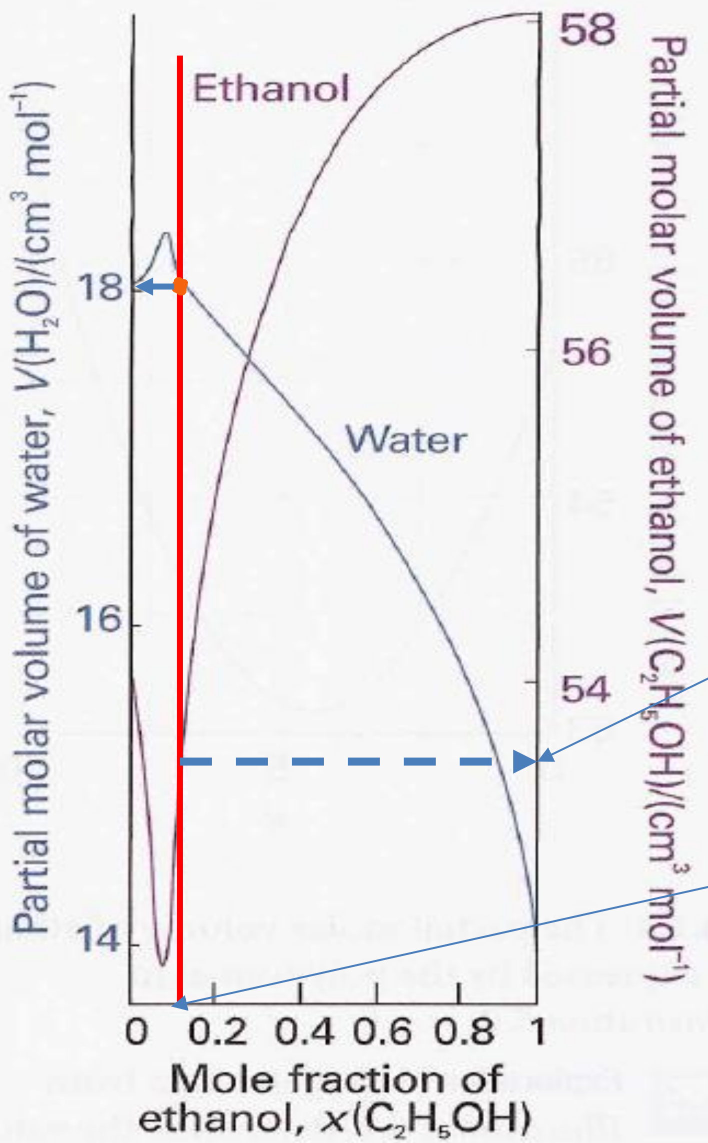


Fig. 5.1 The partial molar volumes of water and ethanol at 25°C. Note the different scales (water on the left, ethanol on the right).

$$\bar{v}_{H_2O} = 18\ cm^3 mol^{-1}$$

$$\bar{v}_{CH_3CH_2OH} = 53.6\ cm^3 mol^{-1}$$

$$x_{CH_3CH_2OH} = 0.117$$

Άρα, ο Συνολικός ΄Ογκος είναι: $V = \sum n_i \bar{v}_i$ $= n_1\bar{v}_1 + n_2\bar{v}_2$

V =(3.873 mol)×(18 cm^3 mol^{-1}) + (0.514 mol)×(53.6 cm^3 mol^{-1}) = 97.3 cm^3

Η Εξίσωση Gibbs-Duhem για Μερικές Γραμμομοριακές Ιδιότητες

$$\boxed{-S\mathrm{dT} + V\mathrm{dp} - \sum n_i \mathrm{d}\mu_\mathrm{i} = 0}$$

$$-\frac{S}{\sum n_i}\mathrm{dT} + \frac{V}{\sum n_i}\mathrm{dp} - \frac{\sum n_i \mathrm{d}\mu_\mathrm{i}}{\sum n_i} = 0 \Rightarrow -s\mathrm{dT} + \upsilon\mathrm{dp} - \sum x_i \mathrm{d}\mu_\mathrm{i} = 0$$

$$\sum x_i \mathrm{d}\mu_\mathrm{i} = 0$$

υπό (p, T): $\sigma\tau\alpha\theta$

Και γενικά:

$$\sum x_i \mathrm{d}\bar{y}_i = 0$$

υπό (p, T): $\sigma\tau\alpha\theta$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

Για Σύστημα με πολλά συστατικά, ο υπολογισμός γίνεται με τη βοήθεια υπολογιστικού κώδικα.
Για Σύστημα με 2 συστατικά, ο προσδιορισμός γίνεται με χρήση διαγράμματος και τη **Μέθοδο των Εφαπτομένων**.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

Για Σύστημα με πολλά συστατικά, ο υπολογισμός γίνεται με τη βοήθεια υπολογιστικού κώδικα.

Για Σύστημα με 2 συστατικά, ο προσδιορισμός γίνεται με χρήση διαγράμματος και τη **Μέθοδο των Εφαπτομένων**.

Απαιτούνται Πειραματικά Δεδομένα

Μετρήσεις της μέσης ιδιότητας, y, ως προς τη σύσταση, x

Y: ολική ιδιότητα

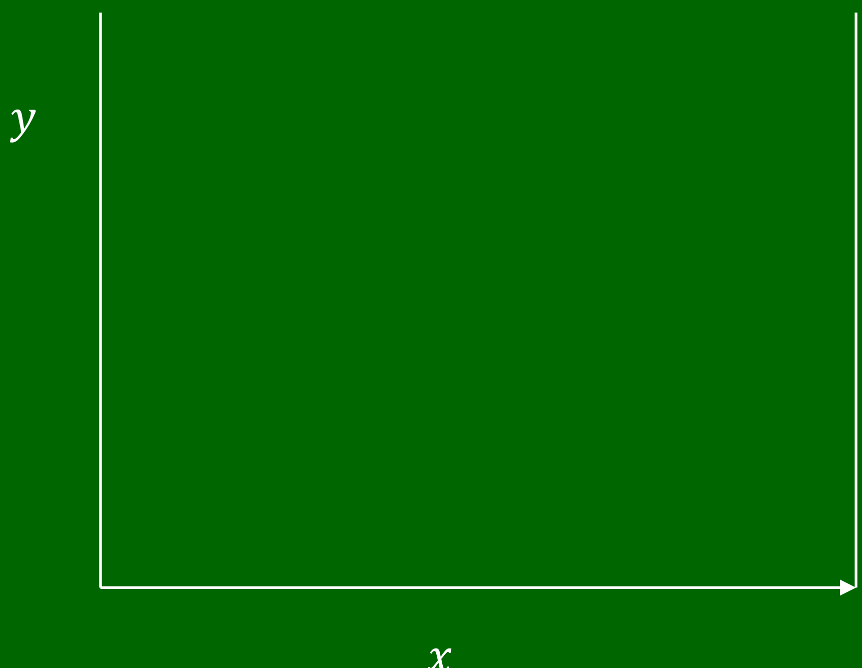
$$\frac{Y}{\sum n_i} = y \quad , \quad x_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$$

$$\sum x_i = 1$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

Για Σύστημα με πολλά συστατικά, ο υπολογισμός γίνεται με τη βοήθεια υπολογιστικού κώδικα.

Για Σύστημα με 2 συστατικά, ο προσδιορισμός γίνεται με χρήση διαγράμματος και τη **Μέθοδο των Εφαπτομένων**.



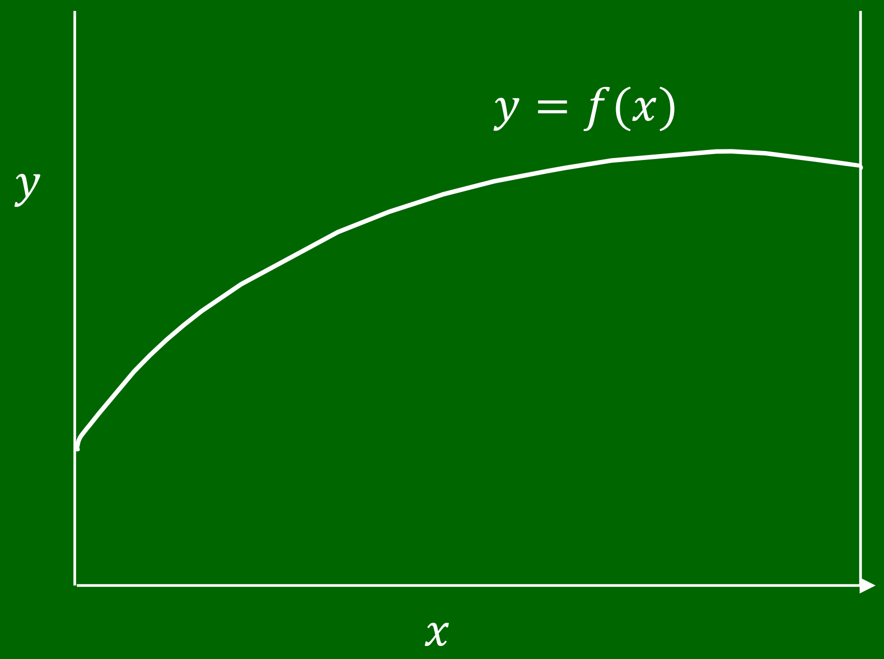
Απαιτούνται Πειραματικά Δεδομένα

Μετρήσεις της μέσης ιδιότητας, y, ως προς τη σύσταση, x

$$\frac{Y}{\sum n_i} = y$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

Για Σύστημα με πολλά συστατικά, ο υπολογισμός γίνεται με τη βοήθεια υπολογιστικού κώδικα.
Για Σύστημα με 2 συστατικά, ο προσδιορισμός γίνεται με χρήση διαγράμματος και τη **Μέθοδο των Εφαπτομένων**.

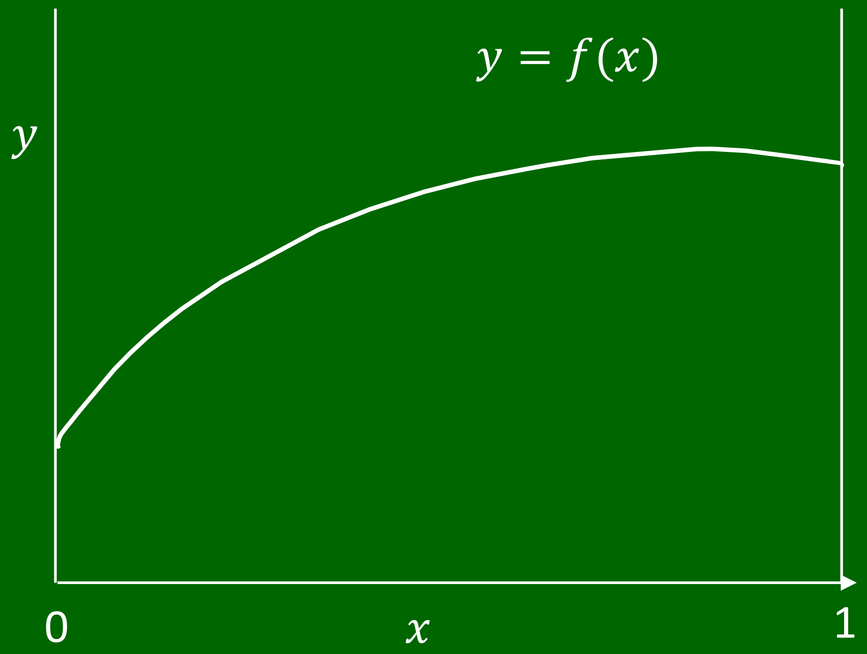


Απαιτούνται Πειραματικά Δεδομένα

Μετρήσεις της μέσης ιδιότητας, y, ως προς τη σύσταση, x

$$\frac{Y}{\Sigma n_i} = y$$

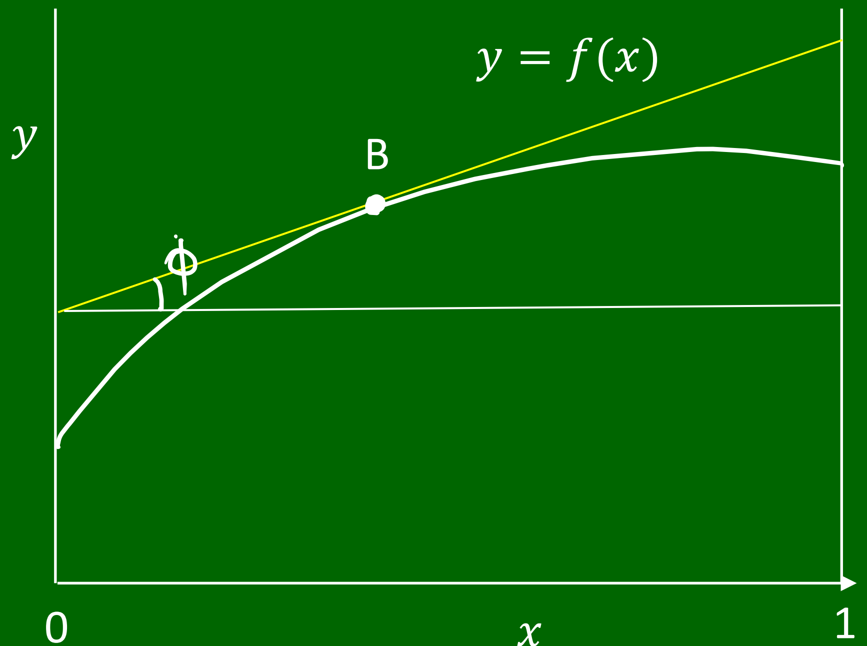
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ



$$\sum x_i \mathrm{d}\bar{y}_i = 0$$

υπό (p,T): $σταθ$

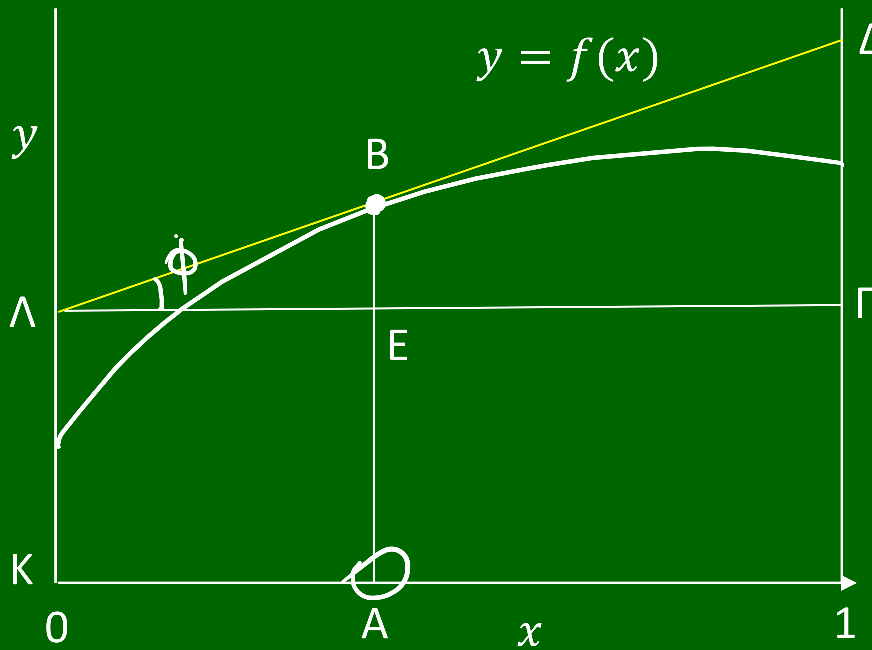
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ . ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ



$$\sum x_i \mathrm{d}\bar{y}_i = 0$$

υπό (p, T): $\sigma\tau\alpha\theta$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ .
ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ



$$\sum x_i \mathrm{d}\bar{y}_i = 0$$ G-D

υπό (p, T): $\sigma\tau\alpha\theta$

$$Y = \sum n_i \bar{y}_i = n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2$$

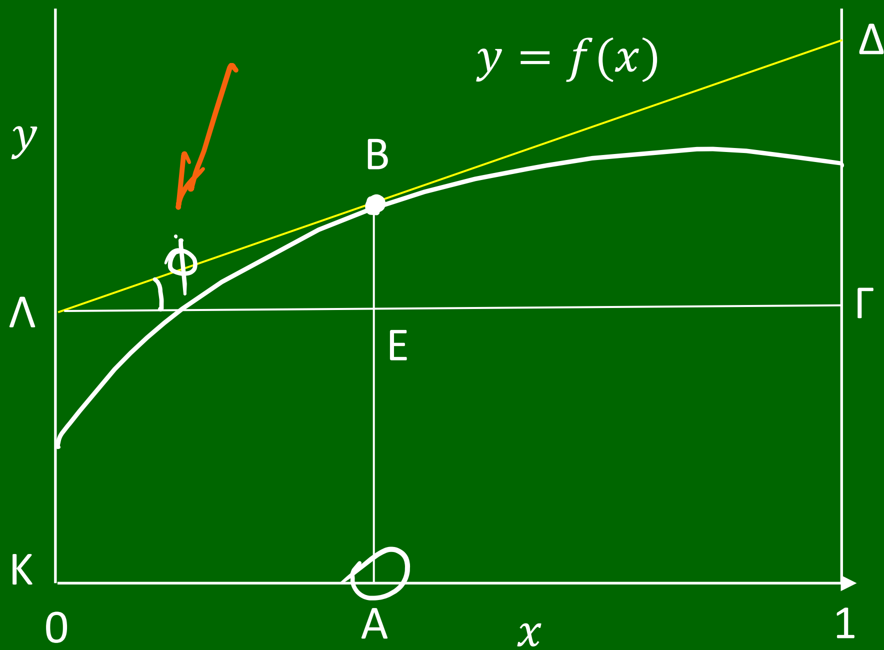
$: \sum n_i$

$$\Longrightarrow \quad y = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ .
ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

$$\sum x_i \mathrm{d}\bar{y}_i = 0 \quad \text{G-D}$$

υπό (p, T): $\sigma\tau\alpha\theta$



$$Y = \sum n_i \bar{y}_i = n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2$$

$: \sum n_i$

$$\Longrightarrow \quad y = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$$

$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 = x$
$x_2 = 1 - x$

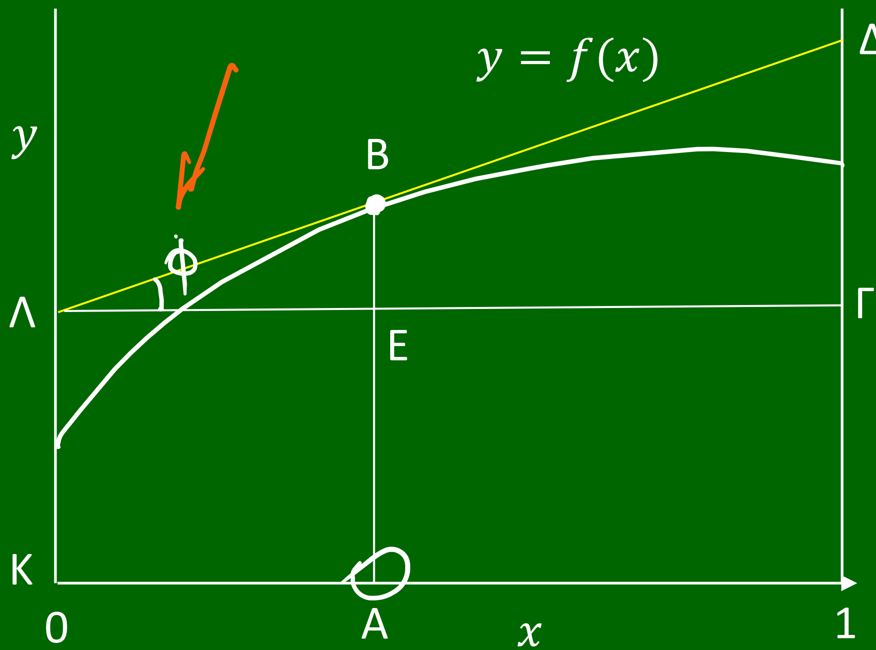
άρα: $y = x\bar{y}_1 + (1-x)\bar{y}_2 \quad (1)$

ή $y = x(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + \bar{y}_2 \quad (1b)$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ .
ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

$$\sum x_i \mathrm{d}\bar{y}_i = 0$$ G-D

υπό (p, T): $\sigma\tau\alpha\theta$



$$Y = \sum n_i \bar{y}_i = n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2$$

$: \sum n_i$

$$\Longrightarrow \quad y = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$$

$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 = x$
$x_2 = 1 - x$

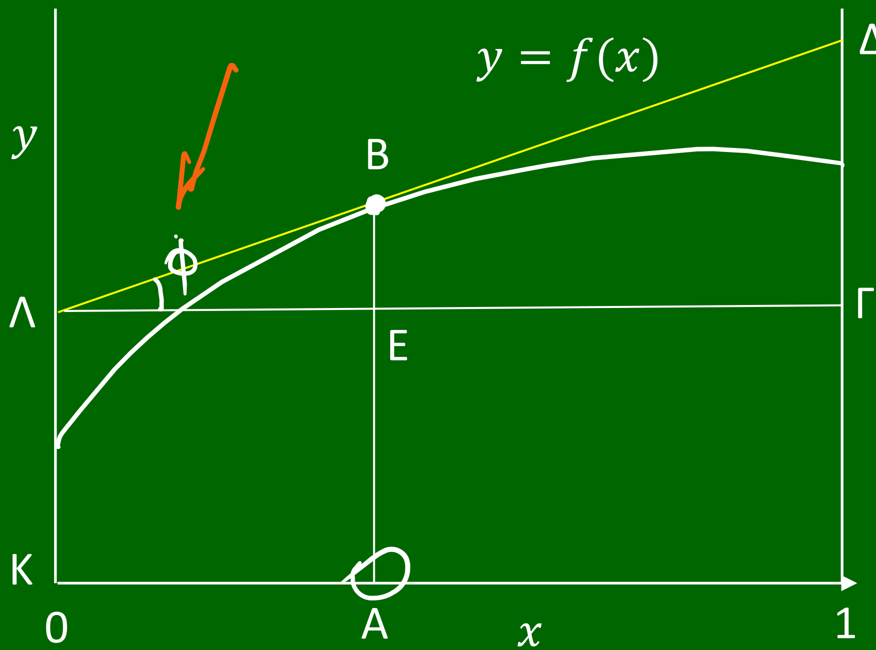
Άρα: $$y = x\bar{y}_1 + (1-x)\bar{y}_2 \quad (1) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \bar{y}_1 + x\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x} - \bar{y}_2 + (1-x)\frac{\partial \bar{y}_2}{\partial x}$$

$$y = x(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + \bar{y}_2 \quad (1b)$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ .
ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

$$\sum x_i \mathrm{d}\bar{y}_i = 0 \quad \text{G-D}$$

υπό (p, T): $\sigma\tau\alpha\theta$



$$Y = \sum n_i \bar{y}_i = n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2$$

$$\xRightarrow{:\sum n_i} y = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$$

$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 = x$
$x_2 = 1 - x$

Άρα: $y = x\bar{y}_1 + (1-x)\bar{y}_2 \quad (1)$

ή $y = x(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + \bar{y}_2 \quad (1b)$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \bar{y}_1 + \underbrace{\cancel{x\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x}} - \bar{y}_2 + \cancel{(1-x)\frac{\partial \bar{y}_2}{\partial x}}}_{\text{G-D}}$$

Άρα: $y = x\bar{y}_1 + (1-x)\bar{y}_2$ (1)

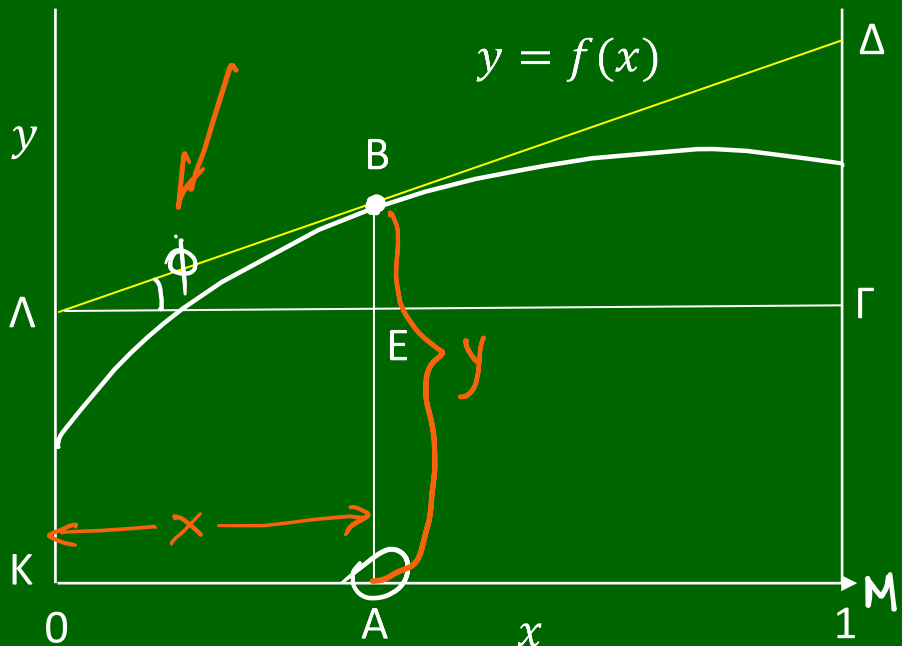
ή $y = x\underbrace{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)} + \bar{y}_2$ (1b) ✓

Και (βλ. προηγ. διαφάνεια)

$\Downarrow$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \quad (2)$$ ✓

?



Άρα: $y = x\bar{y}_1 + (1-x)\bar{y}_2 \quad (1)$

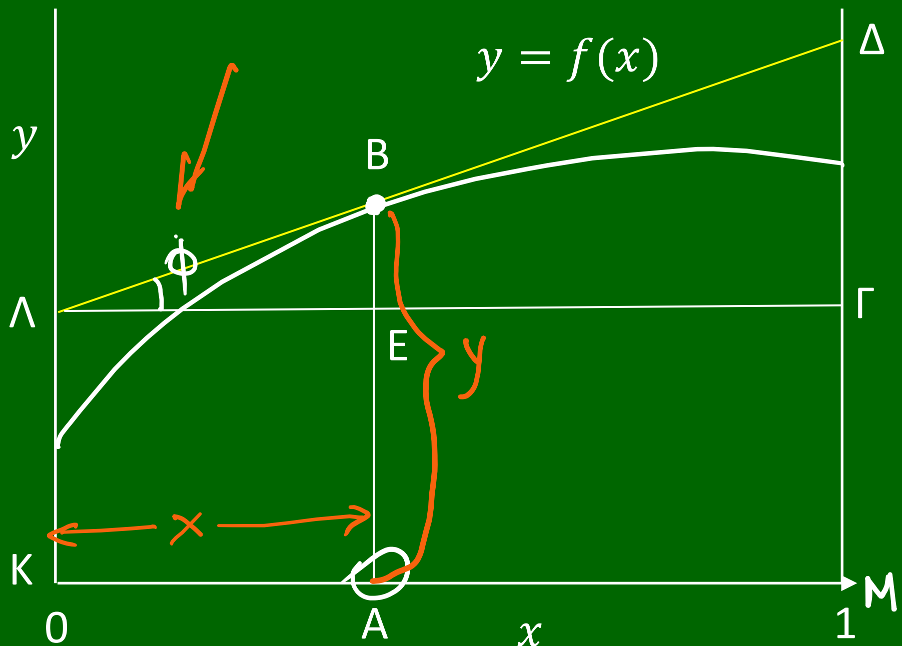
ή $y = x\underbrace{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)} + \bar{y}_2 \quad (1b)$ ✓

Και (βλ. προηγ. διαφάνεια)

$\Downarrow$

$\frac{\partial y}{\partial x} = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \quad (2)$ ✓

tanφ



tanφ

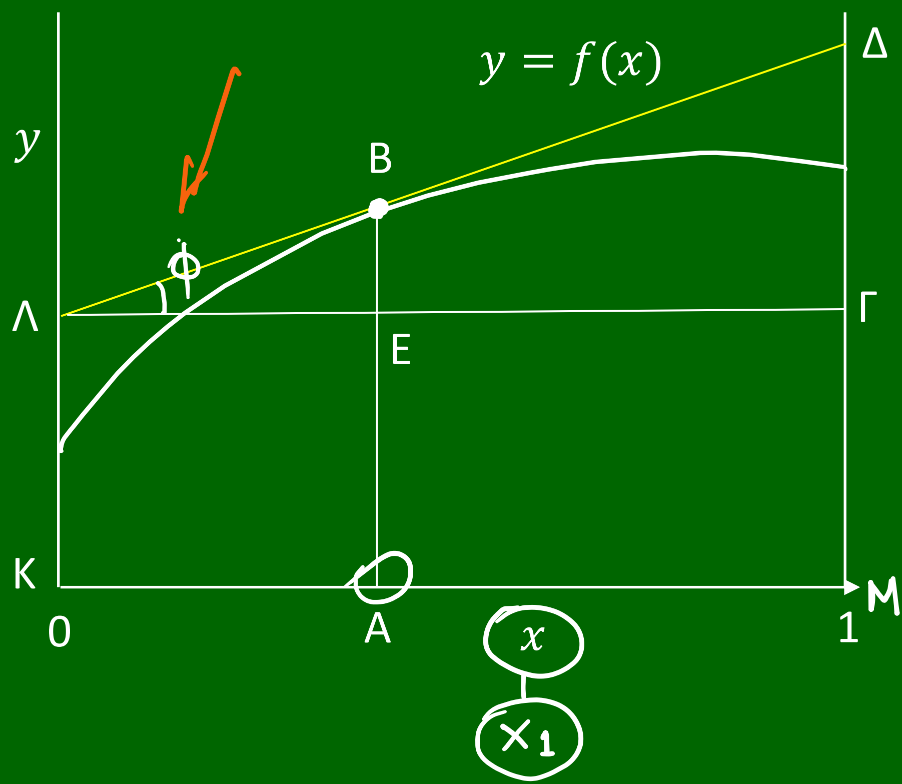
$(1b), (2) \Rightarrow y = x\boxed{\frac{\partial y}{\partial x}} + \bar{y}_2$

Άρα καταλήγουμε: $y = x\tan\phi + \bar{y}_2$

Από το Διάγραμμα: $y = (AB)$

$x\tan\phi = (BE)$

$\Big\} \Rightarrow \bar{y}_2 = (EA) = (K\Lambda)$



Ειδαμε δηλ.:

$(K\Lambda) = \bar{y}_2$

Βλέπουμε τώρα!

$\tan\phi = \frac{(\Delta\Gamma)}{(\Lambda\Gamma)} = \frac{(\Delta\Gamma)}{1}$

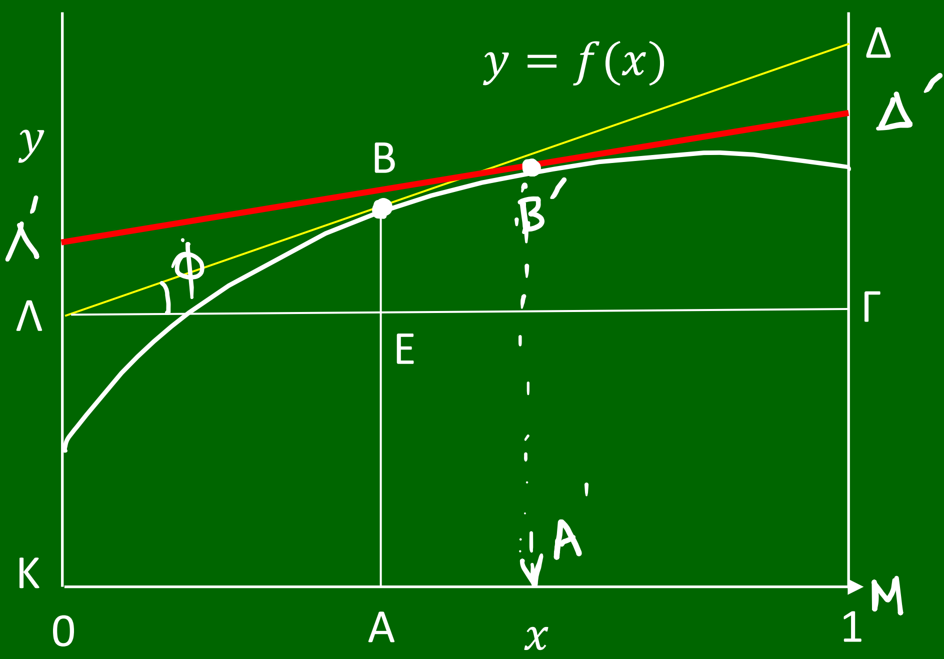
Απο το τρίγωνο ΛΔΓ

Αλλά! (2): $\tan\phi = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$

Ομως: $\tan\phi = (\Gamma\Delta)$

$\bar{y}_2 = (K\Lambda) = (M\Gamma)$

$\Rightarrow \bar{y}_1 = (\Delta M)$



Σύνοψη:

Άρα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τις $\bar{y}_1$ και $\bar{y}_2$ σε κάποια σύσταση του μείγματος , φέρνουμε την εφαπτομένη στην καμπύλη $y=f(x)$ στη σύσταση που μας ενδιαφέρει (πχ Β ή Β') και βρίσκουμε τις $\bar{y}_1$ και $\bar{y}_2$ από τις αποτέμνουσες στους κάθετους άξονες

$\boxed{(K\Lambda) = \bar{y}_2}$ (σύσταση A)

$\boxed{(K\Lambda') = \bar{y}_2'}$ (σύσταση A')

$\boxed{(M\Delta) = \bar{y}_1}$ (σύσταση A)

$\boxed{(M\Delta') = \bar{y}_1'}$ (σύσταση A')