

ΑΣΚΗΣΗ 1

65g αερίου Xe βρίσκονται υπό πίεση 3atm σε θερμοκρασία δωματίου. Το αέριο στη συνέχεια εκτονώνεται αδιαβατικά με δύο τρόπους: α) Αντιστρεπτά σε 1atm, β) έναντι της ατμοσφαιρικής πίεσης. Ποια θα είναι η τελική θερμοκρασία του αερίου στις δύο παραπάνω περιπτώσεις?

Δίνονται $M.B.(Xe)=131.3$ και $c_p = 20.78 \frac{J}{mol \cdot K}$.

Θεωρείστε το αέριο ιδανικό.

A)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αδιαβατική Διεργασία

Από τον 1^ο νόμο της Θερμοδυναμικής ισχύει: $\Delta U = \overset{0}{\cancel{Q}} + W$ (1)

Ιδανικό αέριο: $PV = nRT$

Έργο από το περιβάλλον στο σύστημα: $W = - \int P_{\text{εξ}} dV = - \int P dV \Rightarrow W = - \int \frac{nRT}{V} dV$ (2)

Μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας: $\Delta U = nc_v \Delta T$ (3)

Σε διαφορική
μορφή:

$$(1), (2), (3) \Rightarrow nc_v dT = - \frac{nRT}{V} dV \Rightarrow \frac{dT}{T} = - \frac{R}{c_v} \frac{dV}{V} \Rightarrow \int \frac{dT}{T} = - \frac{R}{c_v} \int \frac{dV}{V} \Rightarrow$$

$$\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = - \frac{R}{c_v} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{-\frac{R}{c_v}} \quad (4)$$

Καταστατική
εξίσωση:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 V_1 = nRT_1 \\ P_2 V_2 = nRT_2 \end{array} \right\} \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} \quad (5)$$

$$c_p - c_v = R \Rightarrow c_v = 12.47 \frac{J}{\text{mol} * K}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{T_2}{298} = \left(\frac{3 T_2}{1 298} \right)^{-0.66} \\ \Rightarrow T_2 = 192.5 K \end{array} \right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

65g αερίου Xe βρίσκονται υπό πίεση 3atm σε θερμοκρασία δωματίου. Το αέριο στη συνέχεια εκτονώνεται αδιαβατικά με δύο τρόπους: α) Αντιστρεπτά σε 1atm, β) έναντι της ατμοσφαιρικής πίεσης. Ποια θα είναι η τελική θερμοκρασία του αερίου στις δύο παραπάνω περιπτώσεις?

Δίνονται $M.B.(Xe)=131.3$ και $c_p = 20.78 \frac{J}{mol \cdot K}$.

Θεωρείστε το αέριο ιδανικό.

ΑΣΚΗΣΗ 1

B)

Αδιαβατική Διεργασία

Από τον 1^ο νόμο της Θερμοδυναμικής ισχύει: $\Delta U = \overset{0}{\cancel{Q}} + W$ (1)

$$W = - \int P_{\varepsilon\xi} dV = -P_{\varepsilon\xi} \int dV = -P_{\varepsilon\xi} (V_2 - V_1) = -P_{\varepsilon\xi} \left(\frac{nRT_2}{P_2} - \frac{nRT_1}{P_1} \right) \quad (2)$$

$$\Delta U = nc_v \Delta T \quad (3)$$

$$(2), (3): nc_v \Delta T = -P_{\varepsilon\xi} \left(\frac{nRT_2}{P_2} - \frac{nRT_1}{P_1} \right) \Rightarrow \Delta T = -\frac{P_{\varepsilon\xi}}{nc_v} \left(\frac{nRT_2}{P_2} - \frac{nRT_1}{P_1} \right) = -\frac{P_{\varepsilon\xi} R}{c_v} \left(\frac{T_2}{P_2} - \frac{T_1}{P_1} \right) \Rightarrow$$

$$T_2 - T_1 = -\frac{1 \text{ atm} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}}{12.47 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}} \left(\frac{T_2}{1 \text{ atm}} - \frac{298 \text{ K}}{3 \text{ atm}} \right) \Rightarrow T_2 = 218.5 \text{ K}$$

$$U(S,V) \quad dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV \quad (1)$$

T

$-P$

Έχουμε U, T, V, S

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S \quad (3)$$

T

$-P$

Από σχέσεις maxwell

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad (4)$$

Στο ιδανικό αέριο ισχύει $U=U(T)$

$$U(T,V) \quad dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad (2)$$

C_v

Αντικαθιστώ την (3) στην (4) και προκύπτει

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S \quad (5)$$

Εάν έχουμε ιδανικό αέριο $PV = nRT$ τότε

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{nRT}{V} - P = 0$$

Άρα η εσωτερική ενέργεια δεν είναι συνάρτηση του όγκου

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για 1 mole ιδανικού αερίου με σταθερό $c_v = 3 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 12.54 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ να υπολογιστούν οι θερμοδυναμικές ποσότητες (W , q , ΔU , ΔH , ΔS , ΔT) για τις ακόλουθες αντιστρεπτές διεργασίες:

- A) Ισόθερμη εκτόνωση από 1L σε 10L στους 300K
- B) Αδιαβατική εκτόνωση από 1L σε 8L από τους 300K
- Γ) Ισοβαρή εκτόνωση 1L σε 2L με $T_{\text{αρχ}}=300\text{K}$
- Δ) Ισόχωρη θέρμανση από 300K σε 600K

ΑΣΚΗΣΗ 2

A) Ισόθερμη εκτόνωση από 1L σε 10L στους 300K

Ισόθερμη διεργασία: $T_1 = T_2 = 300\text{K}$

Ιδανικό αέριο: $\Delta U = n c_v \Delta T \Rightarrow \Delta U = 0$

Από τον 1^ο νόμο της Θερμοδυναμικής ισχύει: $\Delta U = Q + W \Rightarrow W = -Q (1)$

Ιδανικό αέριο: $PV = nRT$ $T = \text{σταθ}$

Έργο από το περιβάλλον στο σύστημα: $W = - \int P_{\text{εξ}} dV = - \int P dV \Rightarrow W = - \int \frac{nRT}{V} dV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \Rightarrow$

$$W = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -1\text{mol} * 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} * \text{K}} * 300\text{K} \ln\left(\frac{10}{1}\right) \Rightarrow W = -5743 \text{ J} (2)$$

$$(1), (2): Q = -W = 5743 \text{ J} (3)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

A) Ισόθερμη εκτόνωση από 1L σε 10L στους 300K

A) $\Delta H = n c_p \cancel{\Delta T} = 0 \Rightarrow \Delta H = 0$

Για ιδανικό αέριο: $\Delta S = -n c_v \cancel{\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)} + n R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 1 \text{ mol} * 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} * \text{K}} * \ln\left(\frac{10}{1}\right) \Rightarrow \Delta S = 19.14 \frac{\text{J}}{\text{K}}$

Αλλιώς, λόγω αντιστρεπτής διεργασίας: $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T} = 19.14 \frac{\text{J}}{\text{K}}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για 1 mole ιδανικού αερίου με σταθερό $c_v = 3 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 12.54 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ να υπολογιστούν οι θερμοδυναμικές ποσότητες (W , q , ΔU , ΔH , ΔS , ΔT) για τις ακόλουθες αντιστρεπτές διεργασίες:

- A) Ισόθερμη εκτόνωση από 1L σε 10L στους 300K
- B) Αδιαβατική εκτόνωση από 1L σε 8L από τους 300K
- Γ) Ισοβαρή εκτόνωση 1L σε 2L με $T_{\text{αρχ}}=300\text{K}$
- Δ) Ισόχωρη θέρμανση από 300K σε 600K

ΑΣΚΗΣΗ 2

B) Αδιαβατική εκτόνωση από 1L σε 8L από τους 300K

Αδιαβατική εκτόνωση: $Q = 0$

Αντιστρεπτή διεργασία:

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T} = 0$$

1^ο νόμο της Θερμοδυναμικής ισχύει: $\Delta U = Q + W \Rightarrow \Delta U = W \Rightarrow nc_v \Delta T = -P_{εξ} \Delta V \Rightarrow nc_v dT = -P_{εξ} dV \Rightarrow$

$$nc_v dT = -\frac{nRT}{V} dV \Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_v} \frac{dV}{V} \Rightarrow \int \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_v} \int \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{R}{c_v}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-0.66} \Rightarrow$$

$$T_2 = 300K * (8)^{-0.66} \Rightarrow T_2 = 76K$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 76K - 300K \Rightarrow \Delta T = -224K$$

$$\Delta U = nc_v \Delta T = 1mol * 12.54 \frac{J}{mol * K} * (-224K) \Rightarrow \Delta U = -2809 J$$

$$\Delta U = W \Rightarrow W = -2809 J$$

$$\Delta H = nc_p \Delta T \Rightarrow \Delta H = n(c_v + R)\Delta T \Rightarrow \Delta H = -4671 J$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για 1 mole ιδανικού αερίου με σταθερό $c_v = 3 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 12.54 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ να υπολογιστούν οι θερμοδυναμικές ποσότητες (W , q , ΔU , ΔH , ΔS , ΔT) για τις ακόλουθες αντιστρεπτές διεργασίες:

- A) Ισόθερμη εκτόνωση από 1L σε 10L στους 300K
- B) Αδιαβατική εκτόνωση από 1L σε 8L από τους 300K
- Γ) Ισοβαρή εκτόνωση 1L σε 2L με $T_{\text{αρχ}}=300\text{K}$
- Δ) Ισόχωρη θέρμανση από 300K σε 600K

ΑΣΚΗΣΗ 2

Γ) Ισοβαρή εκτόνωση 1L σε 2L με $T_{αρχ}=300K$

$$\text{Ισοβαρής διεργασία: } \Delta P = 0 \Rightarrow P_2 = P_1 \Rightarrow \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{nRT_1}{V_1} \Rightarrow \frac{T_2}{2L} = \frac{300K}{1L} \Rightarrow T_2 = 600K$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 600K - 300K = 300K \quad \Delta U = n c_v \Delta T = 1 \text{ mol} * 12.54 \frac{J}{\text{mol} * K} * (300K) \Rightarrow \Delta U = 3762 J$$

$$\Delta H = n c_p \Delta T \Rightarrow \Delta H = n (c_v + R) \Delta T \Rightarrow \Delta H = 1 \text{ mol} * 20.854 \frac{J}{\text{mol} * K} * (300K) \Rightarrow \Delta H = 6256 J$$

$$\text{Υπό } p: \text{ σταθ} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \frac{c_P}{T} = \frac{n c_P}{T} \Rightarrow \Delta S = n c_P \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = 1 \text{ mol} * 20.854 \frac{J}{\text{mol} * K} * \ln \left(\frac{600}{300} \right) \Rightarrow \Delta S = 14.45 \frac{J}{K}$$

$$\text{Αφού } P = \text{σταθ} \Rightarrow Q = \Delta H = 6256 J$$

$$1^{\text{ος}} \text{ νόμος της Θερμοδυναμικής: } \Delta U = Q + W \Rightarrow W = \Delta U - Q = 3762 J - 6256 J \Rightarrow W = -2488 J$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για 1 mole ιδανικού αερίου με σταθερό $c_v = 3 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 12.54 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ να υπολογιστούν οι θερμοδυναμικές ποσότητες (W , q , ΔU , ΔH , ΔS , ΔT) για τις ακόλουθες αντιστρεπτές διεργασίες:

- A) Ισόθερμη εκτόνωση από 1L σε 10L στους 300K
- B) Αδιαβατική εκτόνωση από 1L σε 8L από τους 300K
- Γ) Ισοβαρή εκτόνωση 1L σε 2L με $T_{\text{αρχ}}=300\text{K}$
- Δ) Ισόχωρη θέρμανση από 300K σε 600K

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δ) Ισόχωρη θέρμανση από 300K σε 600K

Ισόχωρη μεταβολή: $\Delta V = 0, V = \text{σταθ}$

$$W = - \int P_{\varepsilon\xi} dV \Rightarrow W = 0$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 600K - 300K \Rightarrow \Delta T = 300K$$

$$\Delta U = n c_v \Delta T = 1 \text{ mol} * 12.54 \frac{J}{\text{mol} * K} * (300K) \Rightarrow \Delta U = 3768J$$

$$\Delta H = n c_p \Delta T \Rightarrow \Delta H = n (c_v + R) \Delta T \Rightarrow \Delta H = 1 \text{ mol} * 20.854 \frac{J}{\text{mol} * K} * (300K) \Rightarrow \Delta H = 6256J$$

Υπό V: σταθ $\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{c_V}{T} = \frac{n c_V}{T} \Rightarrow \Delta S = n c_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = 1 \text{ mol} * 12.54 \frac{J}{\text{mol} * K} * \ln \left(\frac{600}{300} \right) \Rightarrow \Delta S = 8.69 \frac{J}{K}$