ΜΑΖΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΑΖΑΣ

Ιούνιος 2017 (Q1)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

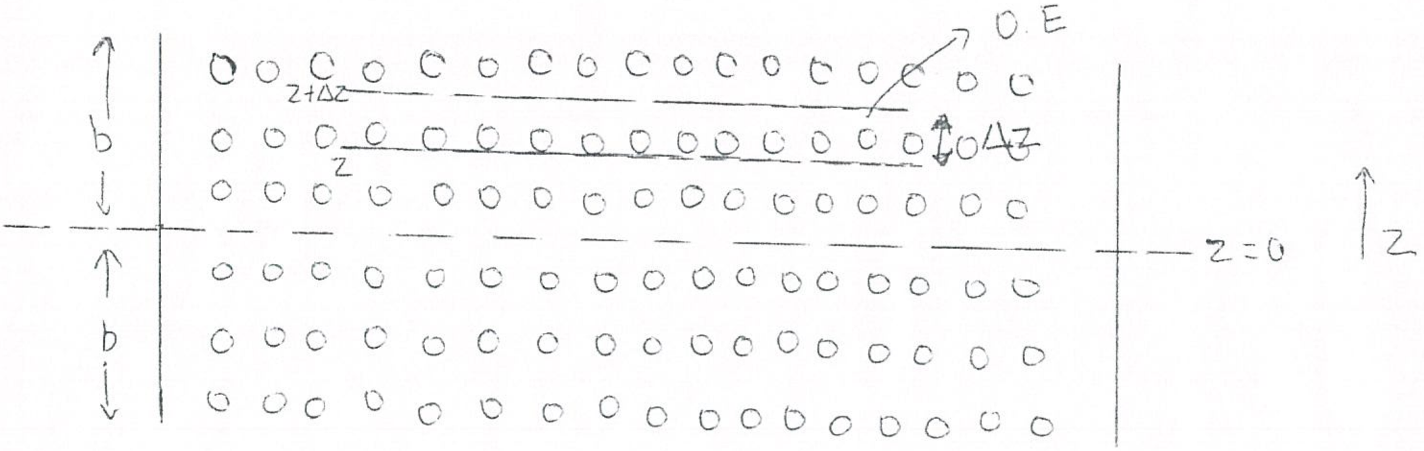
ΟΝ/ΜΟ: ΠΑΠΠΑΣ ΙΩΣΗΦ

ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ: 3193

ΕΤΟΣ: 4ο

ΗΜΕ/ΝΙΑ: 17/12/2014

ΛΥΣΗ



Αρχικά, επιλέγω όγκο ελέγχου όπως φαίνεται στο σχήμα.

Έπειτα, καταστρώνω διαφορικό ισοζύγιο μάζας για το αντιδρόν Α.

(ρυθμός εισροής του Α στον Ο.Ε) − (ρυθμός εκροής του Α στον Ο.Ε) − (ρυθμός κατανάλωσης του Α λόγω της χημικής αντίδρασης) = 0

Έχω θεωρήσει μόνιμη κατάσταση γι' αυτό δεν υπάρχει ο όρος συσσώρευσης. Επίσης, έχουμε μονο-διάστατη διάχυση καθώς το A διαχέεται μόνο από την πάνω και κάτω επιφάνεια και όχι από τα πλάγια.
Επίσης, θεωρώ ότι δεν έχω συναγωγή.
Άρα, το ισοζύγιο για A, παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$S N_{Az}\Big|_{z} - S N_{Az}\Big|_{z+\Delta z} - \underbrace{dV}_{S\Delta z} \cdot r = 0 \Rightarrow$$

Διαιρώ με τον όγκο του όγκου ελέγχου και παίρνω το όριο για $\Delta z \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{N_{Az}|_{z} - N_{Az}|_{z+\Delta z}}{\Delta z} - r = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dN_{Az}}{dz} - r = 0 \qquad (1)$$

Θεωρώ σταθερές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας και χρησιμοποιώντας το νόμο του Fick έχω:

$$N_{Az} = -D_{AB}\frac{dC_A}{dz} \qquad (2)$$

Επίσης, ξέρω από την εκφώνηση ότι η αντίδραση είναι πρώτης τάξης:

$$r = R_A = -k_1 a C_A \qquad (3)$$

(a) $C_A \xrightarrow[(3)]{(2)} -D_{AB}\frac{d^2 C_A}{dz^2} + k_1 a C_A = 0 \Rightarrow$

r_A

$$\Rightarrow \frac{d^2 C_A}{dz^2} - \frac{k_1}{D_{AB}} a C_A = 0 \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) είναι διαφορική εξίσωση (ομογενής) δευτέρας τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Λύση Δ.Ε:

Χαρ πολυώνυμο: $\lambda^2 - \frac{k_1}{D_{AB}} a = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k_1}{D_{AB}} a}$$

Η μορφή της λύσης υπάρχει στην σελ. 148 του βιβλίου

Αρα η (4) γίνεται:

$$C_A = C_1 e^{\sqrt{\frac{k_1}{D_{AB}} a}\, z} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{k_1}{D_{AB}} a}\, z} \quad (5)$$

Συνοριακές συνθήκες:

ΣΣ.1: Στο $z=0 \Rightarrow \frac{dC_A}{dz} = 0$ (λόγω συμμετρίας)

ΣΣ.2: Στο $z=b \Rightarrow C_A = C_{AS}$ (συγκέντρωση στην επιφάνεια)

Συμπλήρωση: Λύνεται με με τη συνοριακή:

$z = -b \rightarrow C_A = C_{AS}$

Θέτω $\lambda = \sqrt{\dfrac{k_1 a}{D_{AB}}}$

$$(5) \Rightarrow C_A = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z} \qquad (6)$$

$$ΣΣ_2 \Rightarrow \frac{dC_A}{dz} = C_1 \lambda e^{\lambda z} - C_2 \lambda e^{-\lambda z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dC_A}{dz}\right|_{z=0} = C_1 \lambda - C_2 \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = C_2}$$

Άρα η (6) γίνεται:

$$C_A = C_1 e^{\lambda z} + C_1 e^{-\lambda z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_A = C_1 \left(e^{\lambda z} + e^{-\lambda z} \right) \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας όπου

$$e^{\lambda z} = \sinh(\lambda z) + \cosh(\lambda z)$$

και

$$e^{-\lambda z} = -\sinh(\lambda z) + \cosh(\lambda z)$$

$(7) \Rightarrow$

$$C_A = C_1 \left(2\cosh(\lambda z) \right) \qquad (8)$$

Εφαρμόζοντας τη $2^{η}$ ΣΣ έχω:

$$C_A \Big|_{z=b} = C_{AS} = C_1 \, 2\cosh(\lambda b) \Rightarrow$$

$$\boxed{C_1 = \frac{C_{AS}}{2\cosh(\lambda b)}} \qquad (9)$$

$$(3) \xrightarrow{(9)} C_A = \frac{C_{AS}}{\cancel{2}\cosh(\lambda b)} \left(\cancel{2}\cosh(\lambda z) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C_A}{C_{AS}} = \frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C_A}{C_{AS}} = \frac{\cosh\left(\left(\sqrt{\frac{k_1 a}{D_{AB}}}\right) z\right)}{\cosh\left(\left(\sqrt{\frac{k_1 a}{D_{AB}}}\right) b\right)}} \qquad (10)$$

Συνεπώς, το προφίλ της συγκέντρωσης του A είναι το παρακάτω:

$$c_A = \frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda b)} c_{AS} \quad (11), \text{ όπου } \lambda = \sqrt{\frac{k_1 a}{D_{AB}}}$$

Ο ολικός ρυθμός μεταφοράς μάζας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$W_A = S\, N_{Az}\Big|_{z=b} \quad (12)$$

όπου

$$N_{Az}\Big|_{z=b} = -D_{AB}\frac{dc_A}{dz}\Big|_{z=b} \Rightarrow$$

$$\overset{11)}{\Rightarrow} N_{Az}\Big|_{z=b} = -D_{AB}\frac{d\left(\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda b)}\right)c_{AS}}{dz}\Bigg|_{z=b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{Az}\Big|_{z=b} = -D_{AB}\frac{(-\lambda)\,c_{AS}\sinh(\lambda z)}{\cosh(\lambda b)}\Bigg|_{z=b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{Az}\Big|_{z=b} = D_{AB}\,\lambda\, c_{AS}\tanh(\lambda b) \quad (13)$$

Η επιφάνεια κάθετη στη διάχυση είναι ουσιαστικά η επιφάνεια κύκλου ακτίνας R και ισούται με $S = \pi R^2$. Επειδή όμως εμείς θέλουμε να δούμε τη συμπεριφορά σε όλο το δισκίο θα πρέπει να διπλασιάσω την επιφάνεια γιατί το Α διαχέεται και από την πάνω και απο την κάτω επιφάνεια.

Άρα $S = 2\pi R^2$ (14)

2) $\xrightarrow[(14)]{(13)}$ $W_A = S\, N_{Az}\big|_{z=D}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{W_A = 2\pi R^2 D_{AB}\,\lambda\,(A_S \tanh(\lambda b)}$$