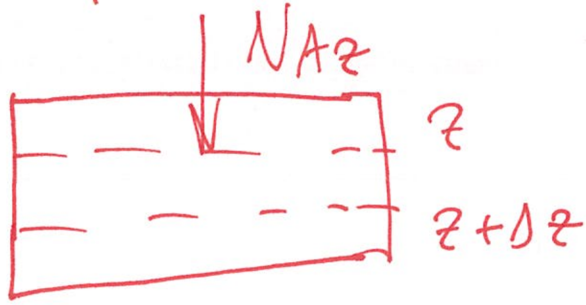
Παραδοχές : 1. Ομογενές υγρό απόβλητο ≈ H_2O
2. Μόνιμη μονοδιάστατη διάχυση
3. C, D_{AB} είναι σταθερά

<u>Κατάστρωση εξισώσεων</u>



Ι. Μ. O_2

έξοδος − είσοδος + ~~συσσώρευση~~ → 0 = παραγωγή

$$(S N_A)_{z+\delta z} - (S N_A)_z = R_{O_2} S \cdot \delta z$$

όπου : $S = \pi D^2/4$, $R_{O_2} = -k_1 C_{O_2}$ δηλ. κινητική 1ης τάξης (πώς προκύπτει?)

Διαιρώ με τον όγκο ελέγχου $S \cdot \delta z$ και παίρνω $\lim \delta z \to 0$

$$\boxed{\frac{dN_A}{dz} = -k_1 C_A \quad (1)}$$

Ροή : $N_{Az} = -cD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + \cancel{x_A(N_A + N_B)}$ (2)

Είναι : $N_B = \phi$ (ακίνητο B)

$x_A \ll 1$ (παραδοχή αλλά πολύ καλή)

Γιατί $x_A \ll 1$? $\quad x_{A_{z=\phi}} = \frac{8\cdot10^{-5}/32}{8\cdot10^{-5}/32 + 1/18}$

$\rightarrow x_A = 0.00045 \ll 1$

Άρα, από Ι.Μ. και εξίσωση ροής:

$$-D_{AB}\frac{d^2C_A}{dz^2} = -k_1 C_A \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2C_A}{dz^2} - \frac{k_1}{D_{AB}}C_A = \phi \quad (3)}$$

Σ.Σ.1 : $z=\phi \rightarrow C_A = C_A^* = 8\cdot10^{-5}\ \frac{g}{cm^3}$

Σ.Σ.2 : $z=H=60cm \rightarrow N_A|_{z=H} = \phi$

δηλ. αδιαπέραστος πυθμένας

Η εξ. (3) είναι Δ.Ε. 2ου βαθμού με σταθερούς συντελεστές

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο : $\lambda = \sqrt{\frac{k_1}{D_{AB}}}$

Η λύση της εξ. (3) μπορεί να γίνει είτε με εκθετικά είτε με υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα

Γενική λύση της (3) $\longrightarrow C_{A(z)} = C_1 e^{-\lambda z} + C_2 e^{\lambda z}$ (4)

Είναι από Σ.Σ : $\left.\begin{aligned} C_A^* &= C_1 + C_2 \\ -\lambda C_1 e^{-\lambda H} &= -\lambda C_2 e^{\lambda H} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{C_A^* e^{2\lambda H}}{e^{2\lambda H}+1} \\ C_2 &= \frac{C_A^*}{e^{2\lambda H}+1} \end{aligned}\right\}$$ σταθερές ολοκλήρωσης.

και τελικά : $$\boxed{C_{A(z)} = C_A^* \frac{e^{\lambda(2H-z)} + e^{\lambda z}}{e^{2\lambda H}+1}} \quad (5)$$

όπου $\lambda . H = 5397$

Γραμμομοριακή παροχή O_2:

$$N_{Az} = -D_{AB}\frac{dC_A}{dz}$$ και με C_A από (5) $\rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{N_{Az} = -\frac{C_A^* \sqrt{k_1 D_{AB}}}{e^{2\lambda H}+1}\left(e^{\lambda z} - e^{\lambda(2H-z)}\right)} \quad (6)$$

Ρυθμός Μεταφοράς Μάζας O_2

$$W_{A|z=0} = N_{A|z=0} \cdot S \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{W_{A|z=0} = \frac{\pi D^2}{4}\frac{C_A^* \sqrt{k_1 \cdot D_{AB}}}{e^{2\lambda H}+1}\left(e^{2\lambda H} - 1\right)} \quad (7)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!! Απευθείας αντικατάσταση αριθμητικών δεδομένων στην εξ. (7) δεν θα δώσει αποτέλεσμα, καθώς $e^{2\lambda H} \longrightarrow \infty$

Αλλά: $e^{2\lambda H} - 1 = e^{2\lambda H} = e^{2\lambda H} + 1$ και

$$W_{A_{z=0}} = \frac{\pi D^2}{4} C_A^* \sqrt{k_1 D_{AB}} = 0.09 \ \frac{kg}{h}$$

Φτάνει το O_2 στον πυθμένα ?

Απάντηση : $C_A|_{z=H}$ θα υπολογιστεί από την (5)

$$(5) \xrightarrow{z=H} C_{A(H)} = C_A^* \frac{e^{\lambda H} + e^{\lambda H}}{e^{2\lambda H} + 1} =$$

$$= 2C_A^* e^{-\lambda H} \simeq \phi$$

<u>Βάθος διείσδυσης :</u>

Είναι x_δ όπου $C_{A(x_\delta)} = \phi$

Λόγω της μορφής εξ. (5), δεν εξάγεται αναλυτική έκφραση για το x_δ

Με δοκιμή και σφάλμα $\rightarrow$ $\boxed{x_\delta \simeq 7cm.}$

- Πώς πετυχαίνω πανταού αερόβιες συνθήκες?

Με χρήση δεξαμενής μικρού βάθους και μεγάλης επιφάνειας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – Εναλλακτική επίλυση της (5) με χρήση Υπερβολικών Ημιτόνων & Συνημιτόνων.

Είχαμε:

$$C_A(z) = C_1 e^{-\lambda z} + C_2 e^{\lambda z} \qquad (5)$$

Όμως ισχύει ότι:

$$\begin{cases} e^{-\lambda z} = \cosh(\lambda z) - \sinh(\lambda z) \\ e^{\lambda z} = \cosh(\lambda z) + \sinh(\lambda z) \end{cases}$$

ή ισοδύναμα:

$$\sinh(\lambda z) = \frac{e^{\lambda z} - e^{-\lambda z}}{2}, \quad \cosh(\lambda z) = \frac{e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}}{2}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας υπερβολικές συναρτήσεις η (5) γίνεται:

$$C_A(z) = (C_1 + C_2)\cosh(\lambda z) + (C_2 - C_1)\sinh(\lambda z)$$

Ορίζουμε:

$$\begin{cases} C_1' = C_1 + C_2 \\ C_2' = C_2 - C_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad C_A(z) = C_1' \cosh(\lambda z) + C_2' \sinh(\lambda z) \qquad (5')$$

- Σ.Σ.1 → για $z = 0 \Rightarrow C_A(z) = C_A^*$

  άρα $\boxed{C_1' = C_A^*}$

- Σ.Σ.2 → για $z = H \Rightarrow \frac{dC_A}{dz} = 0$

άρα

$$\left.\frac{dC_A}{dz}\right)_{z=H} = C_1' \sin(\lambda H) + C_2' \cos(\lambda H) = 0. \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{C_2' = - C_A^* \frac{\sinh(\lambda H)}{\cosh(\lambda H)}}$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές ολοκλήρωσης στην (5) λαμβάνουμε

$$C_A(z) = C_A^* \cosh(\lambda z) - C_A^* \frac{\sinh(\lambda H)}{\cosh(\lambda H)} \sinh(\lambda z)$$

$$\Rightarrow \quad C_A(z) = \frac{C_A^*}{\cosh(\lambda H)} \left[\cosh(\lambda z) \cosh(\lambda H) - \sinh(\lambda z) \sinh(\lambda H) \right]$$

Ισχύει η τριγωνομετρική ταυτότητα:

$\cosh(-x) = \cosh(x)$

$$\cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y) = \cosh(x \pm y)$$

$$\Rightarrow \quad C_A(z) = C_A^* \frac{\cosh[\lambda z - \lambda H]}{\cosh(\lambda H)}$$

ή $\cosh(\lambda H - \lambda z)$

$$\Rightarrow \quad \frac{C_A(z)}{C_A^*} = \frac{\cosh[\lambda(H - z)]}{\cosh(\lambda H)}$$

με $\lambda = \sqrt{\frac{k_1'''}{D_{AB}}}$

Ορίζοντας $b_1 = \lambda * H$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{C_A(z)}{C_A^*} = \frac{\cosh\left[b_1\left(1 - \frac{z}{H}\right)\right]}{\cosh(b_1)}}$$

και

$$N_{Az} = \frac{C_A^* D_{AB} b_1}{H} \frac{\sinh\left[b_1\left(1 - \frac{z}{H}\right)\right]}{\cosh(b_1)}$$