

Προβλήματα
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ
Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ - Π. ΠΕΤΡΙΔΗΣ

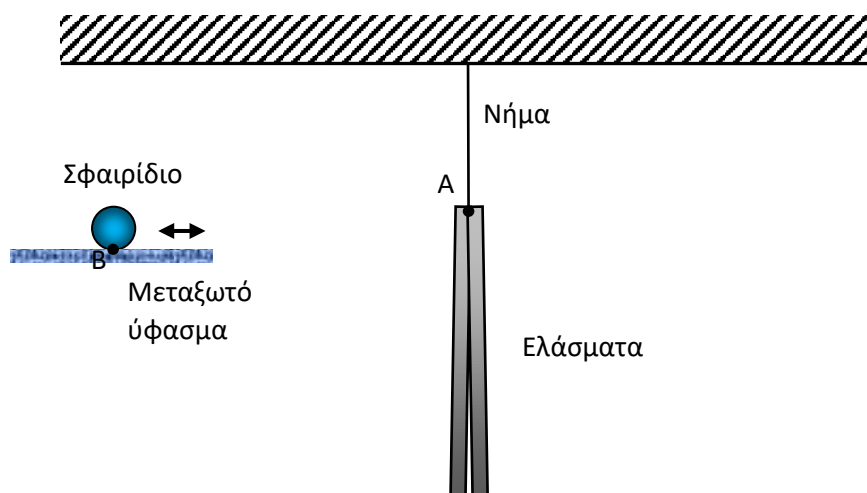


Περιεχόμενα

1. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ - Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ COULOMB.....	3
2. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ	9
3. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS.....	25
4. ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΔΥΝΑΜΙΚΟ	38
5. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ στις ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ.....	48
6. ΠΥΚΝΩΤΕΣ - ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ	72
7. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ και ο ΝΟΜΟΣ του OHM	84
8. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ	88
9. ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ.....	100
10. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ	125
11. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ	147
12. ΤΟ ΦΩΣ.....	169
13. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ.....	183
14. ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ.....	206

1. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ - Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ COULOMB

Πρόβλημα 1.1. Στο παρακάτω σχήμα, δυο πανομοιότυπα και πολύ ελαφριά λεπτά μεταλλικά ελάσματα τα οποία έχουν ένα κοινό σημείο Α, αναρτούνται μέσω αβαρούς νήματος από την οροφή. Τα δυο ελάσματα μπορούν και περιστρέφονται ελεύθερα και ανεξάρτητα γύρω από το Α. Επίσης ένα μικρό γυάλινο σφαιρίδιο, τρίβεται επάνω σε μεταξωτό ύφασμα ώστε το χαμηλότερό του σημείο Β να χάσει ένα αριθμό από 2×10^{13} ηλεκτρόνια κατά την επαφή με το ύφασμα. Περιγράψτε αναλυτικά τι θα συμβεί εάν μεταφέρουμε το σφαιρίδιο έτσι ώστε το σημείο του Β να έρθει σε επαφή με τα ελάσματα στο κοινό τους σημείο Α. Ποια ηλεκτρικά φαινόμενα λαμβάνουν χώρα; Σε κάθε φαινόμενο πρέπει η απάντησή σας να συνοδεύεται και από αριθμητικά αποτελέσματα (θυμηθείτε ότι στους μονωτές το επιπλέον φορτίο είναι εγκλωβισμένο ενώ αντίθετα στους αγωγούς μετακινείται ελεύθερα).



Λύση:

Αφού το μεταξένιο κομμάτι υφάσματος κέρδισε ηλεκτρόνια, τότε φορτίστηκε αρνητικά με φορτίο ίσο με το γινόμενο του αριθμού των ηλεκτρονίων επί το φορτίο του κάθε ηλεκτρονίου

$$q = 2 \times 10^{13} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} = 3.2 \mu\text{C}$$

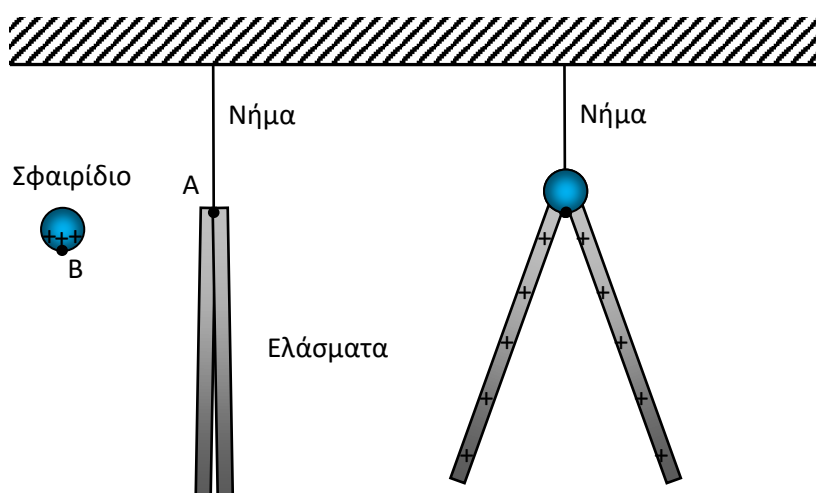
Τα ηλεκτρόνια αυτά προήλθαν από το γυάλινο σφαιρίδιο και άρα αυτό φορτίστηκε θετικά με το ίδιο φορτίο. Εφόσον το γυαλί είναι μονωτής, όλο το φορτίο θα παραμείνει εκεί ακριβώς όπου δημιουργήθηκε, δηλαδή στο σημείο Β του σφαιριδίου. Επομένως σε αυτή τη φάση λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της φόρτισης λόγω τριβής.

Όταν το γυάλινο σφαιρίδιο έρθει σε επαφή με τα μεταλλικά ελάσματα στο σημείο Α, τότε λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της επαφής - μεταφοράς. Επειδή έχουμε την περίπτωση μονωτή - αγωγού, τότε σύμφωνα με τα φαινόμενα που εξετάσαμε στον Πίνακα 1.1 στο εδάφιο "Αγωγοί - Μονωτές", όλο το φορτίο των $3.2 \mu\text{C}$ θα εγκαταλείψει το σφαιρίδιο και θα μεταφερθεί στα μεταλλικά ελάσματα.

Εφόσον τα ελάσματα είναι μεταλλικά, δηλαδή καλοί αγωγοί, τότε το αυτό επιπλέον φορτίο μπορεί και κινείται με μεγάλη ευκολία οπότε λόγω αμοιβαίας απώσεως θα απλωθεί παντού. Εφόσον τα δυο ελάσματα είναι συμμετρικά, περιμένουμε και το φορτίο να κατανεμηθεί συμμετρικά δηλαδή στο κάθε έλασμα θα εμφανισθεί θετικό φορτίο

$$q' = q/2 = 1.6 \mu C$$

Λόγω του ομόσημου φορτίου στα δυο ελάσματα, αυτά θα απωθηθούν μεταξύ τους, το καθένα περιστρεφόμενο γύρω από το σημείο Α. Αυτό είναι το φαινόμενο της ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης δηλαδή της ηλεκτρικής άπωσης.



Πρόβλημα 1.2. Περιγράψτε αναλυτικά τι θα συμβεί στο προηγούμενο πρόβλημα εάν μεταφέρουμε κάπως διαφορετικά το σφαιρίδιο έτσι ώστε το σημείο του Β να έρθει σε εγγύτητα με το κοινό σημείο Α των ελασμάτων χωρίς όμως να έρθει σε άμεση επαφή μαζί του. Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, πρέπει η απάντησή σας να συνοδεύεται και από αριθμητικά αποτελέσματα και να περιγράψετε τα εμφανιζόμενα ηλεκτρικά φαινόμενα. Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει το σύστημα των δυο ελασμάτων;

Λύση: Σε αυτή την περίπτωση, το θετικό φορτίο από το γυαλί δεν μεταφέρεται στα ελάσματα αφού δεν υπάρχει επαφή και έτσι το φορτίο στο σφαιρίδιο θα παραμείνει στο σημείο Β. Θα λάβει όμως χώρα το φαινόμενο της επαγωγής, σύμφωνα με το οποίο τα ηλεκτρόνια των δυο ελασμάτων θα προσπαθήσουν να προσεγγίσουν το θετικό σφαιρίδιο, μεταφερόμενα έτσι στην περιοχή κοντά στο σημείο Α, απογυμνώνοντας με αυτόν τον τρόπο τα δυο ελάσματα τα οποία θα φορτιστούν θετικά. Στην επαγωγή, το επαγόμενο φορτίο είναι ίσο κατά μέτρο με το φορτίο που προκάλεσε την επαγωγή και έτσι το συσσωρευμένο αρνητικό φορτίο κοντά στο σημείο Α θα είναι ίσο με

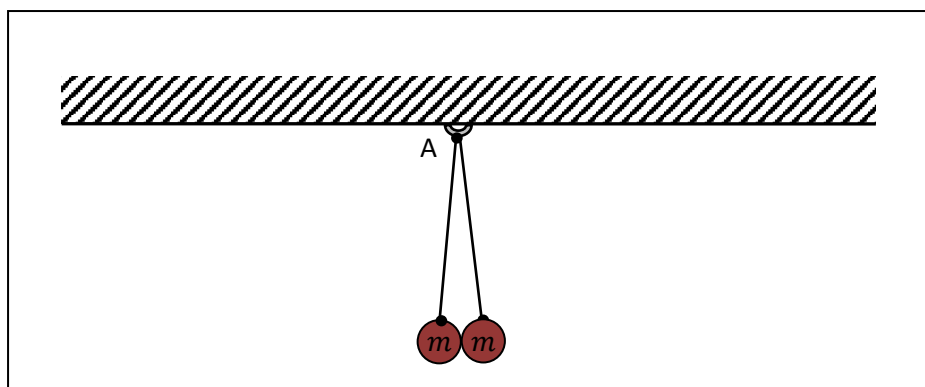
$$q' = -q = -3.2 \mu C$$

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, το θετικό φορτίο στα δυο ελάσματα θα κατανεμηθεί συμμετρικά δηλαδή στο κάθε έλασμα θα εμφανισθεί θετικό φορτίο

$$q'' = q/2 = 1.6 \mu C$$

Η κίνηση των δυο ελασμάτων θα είναι όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα δηλαδή αυτά θα απωθηθούν μεταξύ τους περιστρεφόμενο το καθένα γύρω από το σημείο A.

Πρόβλημα 1.3. Στο παρακάτω σχήμα, δυο πανομοιότυπα χάλκινα συμπαγή σφαιρίδια μάζας m το καθένα, αναρτούνται με ξεχωριστό αβαρές χαλύβδινο σύρμα το καθένα από τον ίδιο πλαστικό μικρό γάντζο στην οροφή. Τα δυο σύρματα είναι πανομοιότυπα με μήκος L και απειροελάχιστο πάχος το καθένα και συνδέονται σε ένα κοινό σημείο A. Αρχικά τα δυο σφαιρίδια είναι αφόρτιστα και ένας φοιτητής τοποθετεί με κάποιο τρόπο ένα συνολικό φορτίο q στο σημείο A και καταγράφει αμέσως μετά την απόσταση x μεταξύ των δυο σφαιριδίων (από κέντρο σε κέντρο). Να βρείτε μια έκφραση του φορτίου q συναρτήσει των δεδομένων x, L, m αλλά και των σταθερών g (βαρυτική) και k (ηλεκτρική) της Φυσικής (**Σημείωση:** μπορείτε να θεωρήσετε κατάσταση ισορροπίας και να λάβετε προσεγγιστικά ότι για μικρές γωνίες ισχύει $\cos\theta \approx 1$. Τα σφαιρίδια μπορούν να εκληφθούν ως σημειακά κατά προσέγγιση).

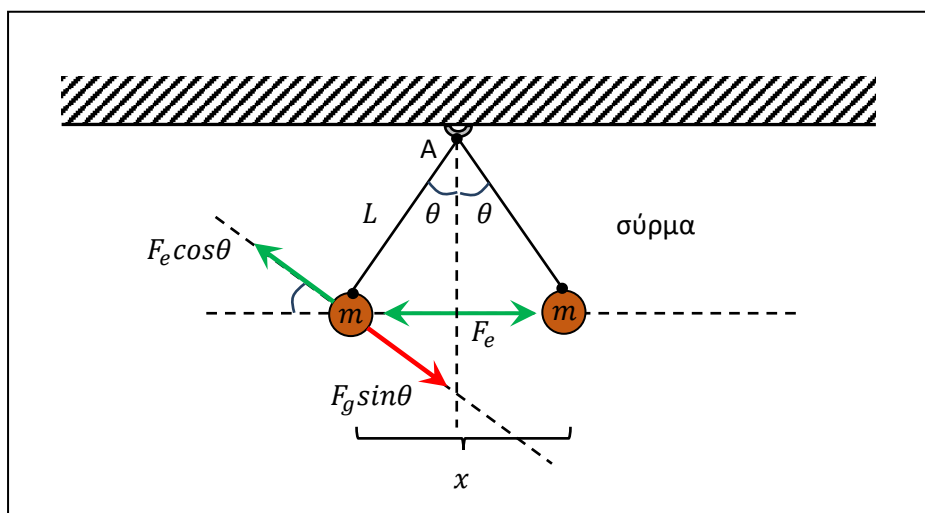


Απάντηση: $(mg2x^3/kL)^{1/2}$

Λύση: Το φορτίο που τοποθετεί ο φοιτητής στο σημείο A δεν θα παραμείνει για πολύ εκεί αφού όλα τα υλικά είναι αγωγίμα (σύρματα, σφαιρίδια). Επειδή το σύρμα είναι απειροστά λεπτό, το περισσότερο φορτίο θα καταλήξει στα σφαιρίδια. Λόγω συμμετρίας, το φορτίο θα μοιραστεί δια δύο και μπορούμε να πούμε προσεγγιστικά ότι στο κάθε σφαιρίδιο έχουμε φορτίο $q/2$. Σύμφωνα με τον νόμο του *Coulomb* θα επέλθει ηλεκτρική άπωση

$$F_e = k \frac{(q/2)(q/2)}{x^2} = k \frac{q^2}{4x^2}$$

μεταξύ των δυο σφαιριδίων, όπου x είναι η απόσταση μεταξύ τους. Εάν δεν υπήρχε το σύρμα και η βαρύτητα, τα σφαιρίδια θα είχαν μετακινηθεί στο άπειρο λόγω της άπωσης αυτής. Όπως όμως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο σφαιρίδιο δρα η τάση του σύρματος και η βαρύτητα $F_g = mg$ και έτσι τα σφαιρίδια ισορροπούν σε κάποια γωνία θ συμμετρικά ως προς την κατακόρυφο.



Θεωρήστε ένα άξονα κάθετο στο σύρμα στο σφαιρίδιο στα αριστερά (λόγω συμμετρίας, οι δυνάμεις είναι οι ίδιες και στα δυο σφαιρίδια). Σε αυτό τον άξονα υπάρχουν δυο συνιστώσες, η βαρυτική $F_g \sin \theta$ και η ηλεκτρική $F_e \cos \theta$. Λόγω ισορροπίας, αυτές οι δυο συνιστώσες είναι ίσες και έτσι

$$k \frac{q^2}{4x^2} \cos \theta = mg \sin \theta$$

Χρησιμοποιώντας τη δεδομένη προσέγγιση της μικρής γωνίας, έχουμε

$$k \frac{q^2}{4x^2} \approx mg \sin \theta$$

Από απλή τριγωνομετρία στο παραπάνω σχήμα, έχουμε $\sin \theta = x/2L$ οπότε

$$k \frac{q^2}{4x^2} \approx mg \frac{x}{2L}$$

Λύνοντας

$$q \approx \sqrt{mg \frac{2x^3}{kL}}$$

Πρόβλημα 1.4. Δυο ετερόσημα σημειακά φορτία $\pm 3 \mu C$ τοποθετούνται επάνω στον άξονα x στις σταθερές θέσεις $x_1 = -1 \text{ m}$ το αρνητικό και $x_2 = +3 \text{ m}$ το θετικό φορτίο αντίστοιχα. Ένα τρίτο σημειακό φορτίο $1 \mu C$ τοποθετείται στη θέση $x_3 = -2 \text{ m}$ και δέχεται μια συνιστάμενη δύναμη μέτρου F_3 από τα δυο φορτία των $\pm 3 \mu C$. Να βρεθούν (α) πόσο είναι το F_3 και (β) σε ποια άλλη θέση επάνω στον άξονα x πρέπει να τοποθετηθεί το φορτίο των $1 \mu C$ ώστε η συνιστάμενη δύναμη να έχει επίσης μέτρο F_3 ;

Πρόβλημα 1.5. Στο προηγούμενο πρόβλημα να βρεθεί σε ποια θέση επάνω στον άξονα x πρέπει να τοποθετηθεί το φορτίο των $1 \mu C$, έτσι ώστε η συνιστάμενη δύναμη που δέχεται από τα δυο φορτία των $\pm 3 \mu C$ (τα οποία είναι στερεωμένα σε σταθερές θέσεις) να είναι (α) μηδέν και (β) μέγιστη.

Πρόβλημα 1.6. Μια μεταλλική σφαίρα διαμέτρου 5 mm φορτίζεται με θετικό φορτίο $6 \mu C$. Ακολούθως έρχεται σε ηλεκτρική επαφή με δεύτερη πανομοιότυπη σφαίρα μέσω ευθύγραμμου

αγωγού απειροελάχιστου πάχους και μήκους L (ο αγωγός βρίσκεται επάνω σε άξονα που περνάει από τα δυο κέντρα των σφαιρών). Εάν η δύναμη μεταξύ των δυο σφαιρών είναι ίση με 4000 N , να βρεθεί το μήκος L .

Πρόβλημα 1.7. Δυο πανομοιότυπα φορτία $+2\text{ }\mu\text{C}$ το καθένα, τοποθετούνται σε δυο διαδοχικές κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς 5 mm . Ένα τρίτο σημειακό φορτίο $4\text{ }\mu\text{C}$ τοποθετείται στο κέντρο βάρους του τετραγώνου και δέχεται μια συνισταμένη δύναμη F_3 από τα δυο φορτία των $+2\text{ }\mu\text{C}$. Να βρεθεί το μέτρο και η φορά της F_3 .

Πρόβλημα 1.8. Δυο φορτία $\pm 2\text{ }\mu\text{C}$ τοποθετούνται στις δυο βάσεις ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 5 mm . Ένα τρίτο σημειακό φορτίο $4\text{ }\mu\text{C}$ τοποθετείται στο κέντρο βάρους του τριγώνου και δέχεται μια συνισταμένη δύναμη F_3 από τα δυο φορτία των $\pm 2\text{ }\mu\text{C}$. Να βρεθεί το μέτρο και η φορά της F_3 .

Πρόβλημα 1.9. Μια σειρά θετικών σημειακών φορτίων $q, 2q, 4q, \dots$ (το κάθε φορτίο στη σειρά, είναι ίσο με το διπλάσιο του προηγούμενου του) τοποθετούνται επάνω στον άξονα x σε αντίστοιχες θέσεις $x = a, 2a, 4a, \dots$ (η κάθε θέση στη σειρά, είναι σε διπλάσια απόσταση σε σχέση με την προηγούμενη θέση). Ένα θετικό σημειακό φορτίο Q είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων. Να βρεθεί η συνολική δύναμη που δρα στο Q .

Απάντηση: $2kQq/a^2$

Λύση:

Αθροίζουμε όλες τις δυνάμεις Coulomb μεταξύ του Q και των υπόλοιπων σημειακών φορτίων στην σειρά:

$$\begin{aligned} F &= k \frac{qQ}{a^2} + k \frac{2qQ}{2^2 a^2} + k \frac{4qQ}{4^2 a^2} + k \frac{8qQ}{8^2 a^2} + \dots \\ F &= \frac{kQq}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \\ F &= \frac{kQq}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

Η έκφραση μέσα στην παρένθεση είναι η γεωμετρική σειρά $A = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ με $x = 1/2$. Αυτή η σειρά A ικανοποιεί την εξίσωση $A = 1 + xA$ οπότε λύνοντας παίρνουμε $A = 1/(1 - x)$. Επομένως

$$F = \frac{kQq}{a^2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} \Rightarrow F = \frac{2kQq}{a^2}$$

Πρόβλημα 1.10. Δυο ίσα θετικά σημειακά φορτία q τοποθετούνται επάνω στον άξονα x στις σταθερές θέσεις $x = a$ και $x = -b$ αντίστοιχα. Ένα τρίτο φορτίο Q αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί στο επίπεδο xy . Να βρεθεί σε αυτό το επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου το αριθμητικό άθροισμα των μέτρων των δυο ηλεκτρικών δυνάμεων που ασκούνται στο Q (όχι η συνισταμένη των δυο δυνάμεων) να είναι μηδέν.

Απάντηση: Κύκλος με κέντρο επάνω στον άξονα x

Λύση:

Έστω ότι το Q βρίσκεται σε τυχαίο σημείο με συντεταγμένες (x, y) . Τότε θα απέχει αποστάσεις r_1 και r_2 από τα δυο φορτία που θα δίνονται αντίστοιχα από τις

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

και

$$r_2 = \sqrt{(x+b)^2 + y^2}$$

Το αριθμητικό άθροισμα των μέτρων των δυο δυνάμεων που δέχεται το Q είναι ίσο με

$$F_1 + F_2 = \frac{kqQ}{r_1^2} + \frac{kqQ}{r_2^2} = kqQ \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2}$$

ή

$$F_1 + F_2 = \frac{kqQ}{r_1^2 r_2^2} [(x-a)^2 + y^2 + (x+b)^2 + y^2]$$

Θέτουμε αυτό το άθροισμα ίσο με μηδέν για να πάρουμε

$$(x-a)^2 + y^2 + (x+b)^2 + y^2 = 0$$

$$2y^2 = -(x-a)^2 - (x+b)^2$$

$$y^2 = -x^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} + x(a-b)$$

Θέτω $2c = a - b$ και συμπληρώνω το τετράγωνο

$$y^2 = -x^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} + 2xc$$

$$y^2 = -(x-c)^2 + c^2 - \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Θέτω

$$R^2 = c^2 - \frac{a^2 + b^2}{2}$$

και καταλήγω σε εξίσωση κύκλου

$$y^2 + (x-c)^2 = R^2$$

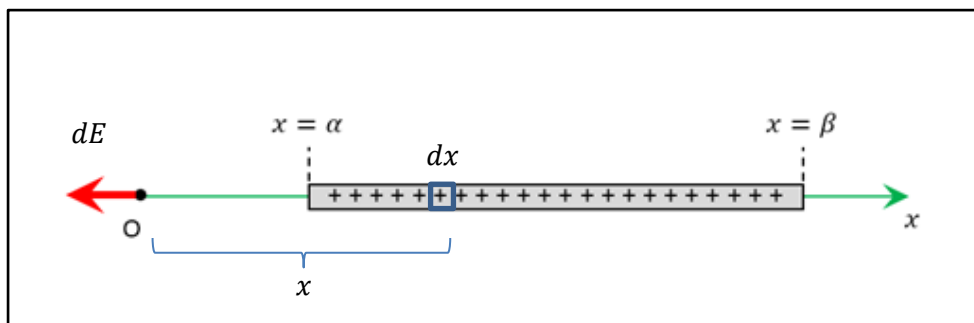
με ακτίνα R και κέντρο στο $(c, 0)$.

2. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Πρόβλημα 2.1. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στην αρχή των αξόνων λόγω μιας ομοιόμορφα φορτισμένης λεπτής ράβδου που φέρει φορτίο Q και που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x από το $x = \alpha$ έως το $x = \beta$ (όπου $\beta > \alpha > 0$).

Απάντηση: $E = kQ/\alpha\beta$

Λύση: Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η ράβδος επάνω στον άξονα x . Θα τεμαχίσουμε τη ράβδο σε μικρά απειροστά κομμάτια με μήκος dx το καθένα, όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα το οποίο απέχει απόσταση x από την αρχή O και θα υπολογίσουμε το αντίστοιχο πεδίο που δημιουργείται στο σημείο O .



Πόσο φορτίο dq περιέχει το dx ; Αφού η κατανομή του φορτίου είναι ομοιογενής, τότε ο λόγος των φορτίων είναι ίσος με τον λόγο των μηκών. Παίρνοντας αναλογίες για την όλη ράβδο και το απειροστό της κομμάτι, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{dq}{Q} = \frac{dx}{\beta - \alpha}$$

Αφού το dq είναι στην ουσία ένα σημειακό φορτίο, τότε θα δημιουργεί στο σημείο O ένα πεδίο dE με φορά προς τα αριστερά (εάν τοποθετήσουμε στο O ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο τότε η δύναμη που θα δεχθεί από το dq θα είναι προς τα αριστερά) και μέτρο που σύμφωνα με την Εξ. 2.3 δίνεται από την

$$dE = k \frac{dq}{x^2}$$

ή

$$dE = k \frac{Q}{\beta - \alpha} \frac{dx}{x^2}$$

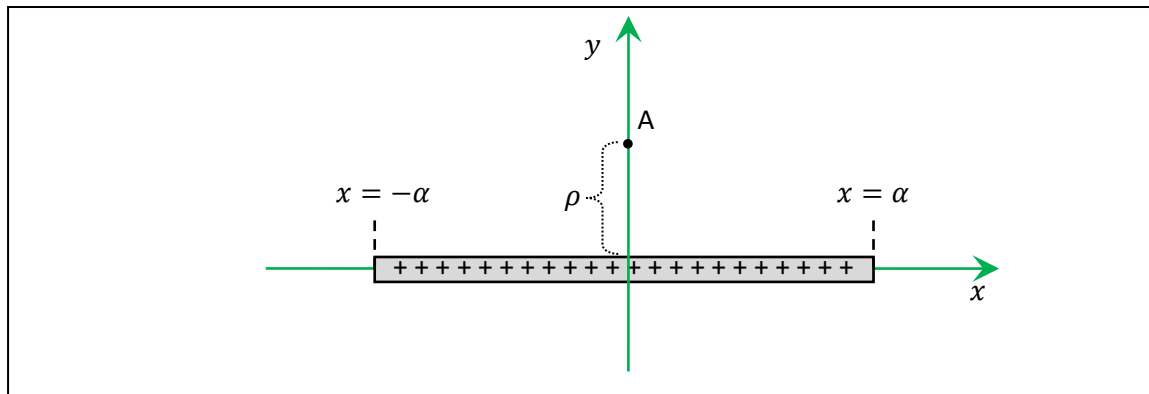
απ' όπου με ολοκλήρωση επάνω σε όλη τη ράβδο προκύπτει το αποτέλεσμα

$$E = k \frac{Q}{\beta - \alpha} \int_{x=\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x^2} = k \frac{Q}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$$

ή

$$E = k \frac{Q}{\alpha\beta}$$

Πρόβλημα 2.2. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο σημείο A του παρακάτω σχήματος με συντεταγμένη $(0, \rho)$ λόγω μιας ομοιόμορφα φορτισμένης λεπτής ράβδου που βρίσκεται επάνω στον άξονα x από το $x = -a$ έως το $x = a$ εάν η γραμμική πυκνότητα του φορτίου της είναι ίση με λ .



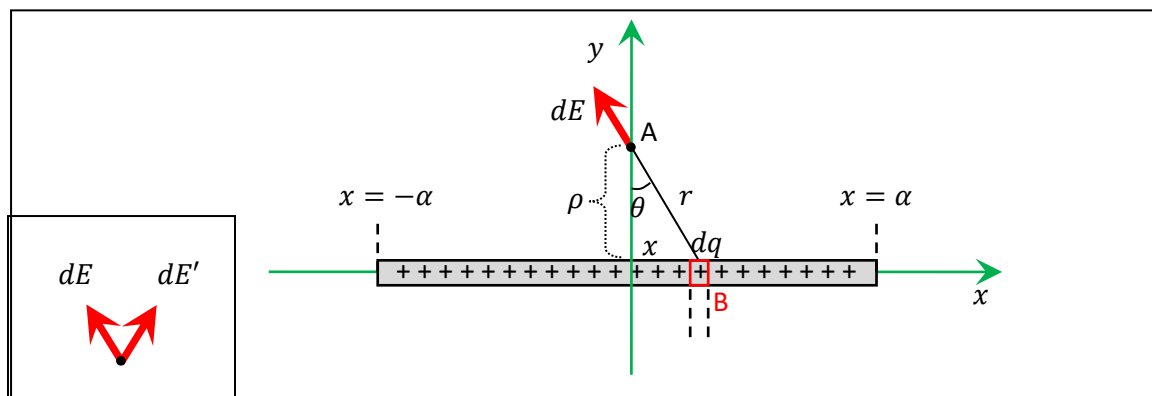
Απάντηση: $E = 2k\lambda a / \rho \sqrt{\rho^2 + a^2}$

Λύση:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, "τεμαχίζουμε" τη ράβδο σε απειροστά κομμάτια. Έστω ένα τέτοιο κομμάτι απειροστού εύρους dx στο σημείο B της ράβδου με συντεταγμένη x το οποίο απέχει απόσταση r από το σημείο A. Το κομμάτι αυτό θα περιέχει απειροστό φορτίο ίσο με $dq = \lambda dx$ και έτσι θα παράγει στο σημείο A ένα απειροστό πεδίο ίσο με

$$dE = k \frac{dq}{r^2} = k\lambda \frac{dx}{r^2}$$

Η φορά του dE φαίνεται στο Σχήμα. Το dE μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες x και y . Προσέξτε ότι η ράβδος είναι τοποθετημένη συμμετρικά επάνω στον άξονα x και έτσι για κάθε σημείο B υπάρχει και το συμμετρικό του σημείο, έστω B', το οποίο θα ισαπέχει από το B και θα παράγει πεδίο dE' ίσου μέτρου αλλά διαφορετικής φοράς προς τα πάνω και δεξιά, όπως φαίνεται και στο ένθετο του σχήματος. Έτσι, όταν αθροίσουμε την συνεισφορά του κάθε κομματιού της ράβδου, οι οριζόντιες συνιστώσες του ολικού πεδίου αλληλο-αναιρούνται σε ζεύγη και το πεδίο θα έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα. Άρα από τη συνεισφορά του σημείου B θα κρατήσουμε μόνο την κατακόρυφη συνιστώσα $dE_y = dE \cos \theta$



Ολοκληρώνοντας όλες τις συνεισφορές οδηγεί στο

$$E = \int_{x=-a}^{x=a} dE_y = \int_{x=-a}^{x=a} dE \cos\theta = k\lambda \int_{x=-a}^{x=a} \frac{dx}{r^2} \cos\theta$$

Μέσα στο ολοκλήρωμα έχουμε τρεις μεταβλητές, τα θ , x και r . Πρέπει να τα εκφράσουμε όλα συναρτήσει μιας μεταβλητής αλλά και συναρτήσει του δεδομένου ρ . Επιλέγουμε ως κοινή μεταβλητή τη γωνία θ . Από απλή τριγωνομετρία στο παραπάνω σχήμα έχουμε

$$\tan\theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \tan\theta \Rightarrow dx = \frac{\rho}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$r \cos\theta = \rho \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{\rho}$$

Έστω θ_a η μέγιστη γωνία που αντιστοιχεί στα όρια $x = \pm a$ της ράβδου. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$E = k\lambda \int_{\theta=-\theta_a}^{\theta_a} \frac{\rho}{\cos^2\theta} d\theta \frac{\cos^2\theta}{\rho^2} \cos\theta = \frac{k\lambda}{\rho} [\sin\theta]_{\theta=-\theta_a}^{\theta_a} = \frac{2k\lambda}{\rho} \sin\theta_a$$

Από απλή τριγωνομετρία μπορούμε να δούμε ότι

$$\sin\theta_a = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

Τελικά

$$E = 2k\lambda \frac{a}{\rho\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

(προσέξτε ότι αφού το λ είναι φορτίο ανά μονάδα μήκους, το παραπάνω E έχει τις σωστές μονάδες).

Πρόβλημα 2.3. Λεπτός ημιδακτύλιος αμελητέου πάχους και ακτίνας R βρίσκεται με το κέντρο του επάνω στην αρχή των συντεταγμένων O και εκτείνεται συμμετρικά ως προς τον άξονα x από γωνία $\varphi = -\pi/2$ έως και $\pi/2$. Εάν ο ημιδακτύλιος φέρει ομοιόμορφο θετικό φορτίο Q , να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο O .

Απάντηση: $E = -2kQ/\pi R^2$

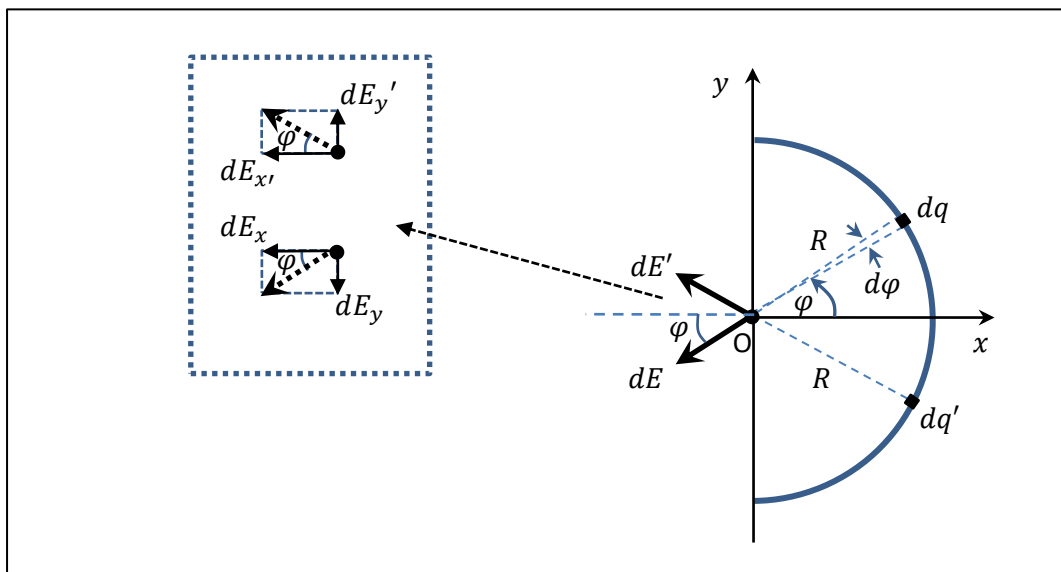
Λύση:

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα στα δεξιά, ο ημιδακτύλιος εκτείνεται από γωνία $\varphi = -\pi/2$ έως και $\varphi = \pi/2$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τον ημιδακτύλιο ως ένα σύνολο σημειακών φορτίων, να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2.3 για το καθένα από αυτά και τελικά να αθροίσουμε (να ολοκληρώσουμε) ώστε να βρούμε το ολικό πεδίο που αυτά δημιουργούν. Για το σκοπό αυτό "τεμαχίζουμε" τον δακτύλιο σε στοιχειώδη κομμάτια που το καθένα αντιστοιχεί σε στοιχειώδη γωνία $d\varphi$ και περιέχει φορτίο dq . Ένα τέτοιο φορτίο φαίνεται στο σχήμα σε γωνία φ . Αυτό το φορτίο δημιουργεί στο κέντρο O ένα ηλεκτρικό πεδίο ίσο με

$$dE = k \frac{dq}{R^2}$$

Συμμετρικά ως προς το φορτίο dq σχετικά με τον άξονα x υπάρχει και κάποιο άλλο φορτίο $dq' = dq$ (τα φορτία είναι ίσα λόγω ομοιόμορφης κατανομής) το οποίο δημιουργεί στο κέντρο O ένα ηλεκτρικό πεδίο ίσο με

$$dE' = k \frac{dq'}{R^2}$$



Όπως φαίνεται και στο ένθετο στο πάνω αριστερά μέρος του σχήματος, τα δυο πεδία dE και dE' είναι ίσα κατά μέτρα αλλά διαφέρουν κατά προσανατολισμό. Λόγω της σχετικής συμμετρίας των δυο φορτίων dq και dq' ως προς τον άξονα x , τα δυο πεδία έχουν ίσες και αντίθετες y -συνιστώσες οπότε αυτές αλληλο-εξουδετερώνονται μεταξύ τους. Επομένως κατά την ολοκλήρωση θα θεωρήσουμε μόνο την x -συνιστώσα

$$dE_x = dE \cos \varphi$$

η οποία στο συγκεκριμένο σχήμα είναι προς τα αριστερά (θεωρώντας ότι το Q είναι θετικό). Το ολικό πεδίο θα ισούται με

$$E = \int_{HM} dE_x = \int_{HM} dE \cos \varphi$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται επάνω σε όλον τον ημιδακτύλιο (ΗΜ). Αφού το φορτίο είναι ομοιογενές, τότε παίρνοντας απλές αναλογίες οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$\frac{dq}{Q} = \frac{d\varphi}{\pi}$$

Επομένως το στοιχειώδες πεδίο dE γράφεται ως εξής:

$$dE = k \frac{dq}{R^2} = k \frac{Q d\varphi}{\pi R^2}$$

Η ολοκλήρωση οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$E = k \frac{Q}{\pi R^2} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = k \frac{Q}{\pi R^2} [-\sin \varphi]_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{2kQ}{\pi R^2}$$

με φορά προς τα αριστερά.

Πρόβλημα 2.4. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν το φορτίο δεν είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα αλλά περιγράφεται από τη γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο / μήκος) που δίνεται από την έκφραση $\lambda(\varphi) = A \cos \varphi$ όπου η A είναι σταθερά.

Λύση:

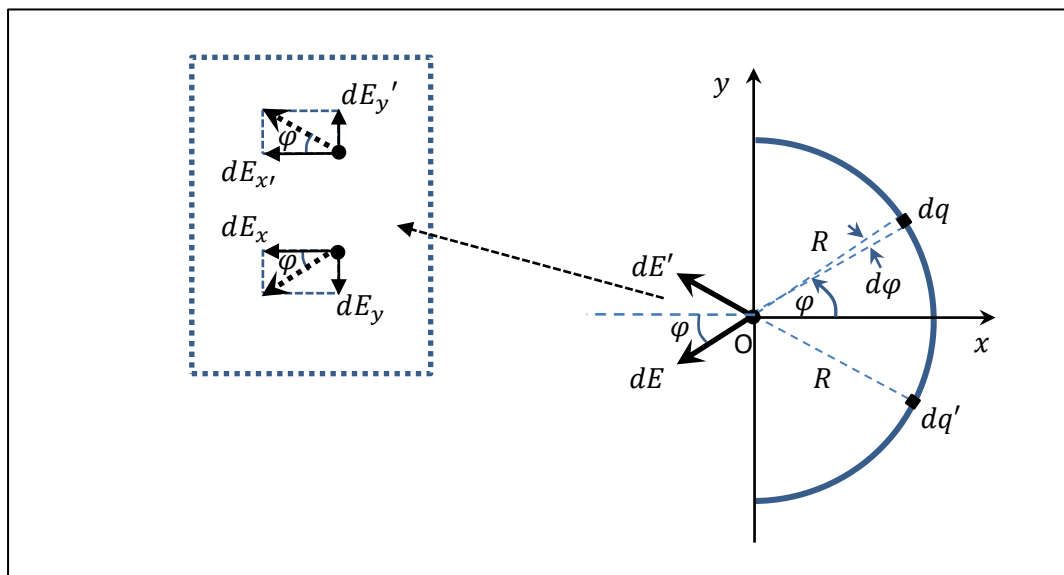
Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, θεωρούμε δυο συμμετρικά φορτία σε τυχαία γωνία $\pm \varphi$ που το καθένα αντιστοιχεί σε στοιχειώδη γωνία $d\varphi$. Αφού $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ η πυκνότητα φορτίου είναι ίδια και στα δυο σημεία και έτσι $dq' = dq$ όπως και προηγουμένως. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ίδια επιχειρήματα συμμετρίας όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα και να δεχθούμε ότι τα αντίστοιχα παραγόμενα πεδία

$$dE = k \frac{dq}{R^2}$$

και

$$dE' = k \frac{dq'}{R^2}$$

είναι ίσα και έτσι οι y -συνιστώσες τους αλληλο-αναιρούνται και επιβιώνει μόνο η x -συνιστώσα $dE_x = dE \cos \varphi$ η οποία είναι προς τα αριστερά.



Το δεδομένο σε αυτό το πρόβλημα δεν είναι το ολικό φορτίο αλλά η γραμμική πυκνότητα φορτίου λ και επομένως πρέπει να εκφράσουμε το φορτίο dq συναρτήσει αυτής. Το φορτίο dq βρίσκεται περιορισμένο μέσα σε γωνία $d\varphi$ δηλαδή επάνω σε τόξο με μήκος $ds = R d\varphi$. Αφού το λ είναι φορτίο ανά μονάδα μήκους, τότε

$$dq = \lambda ds = \lambda R d\varphi = A R \cos \varphi d\varphi$$

Το ολικό πεδίο προκύπτει από ολοκλήρωση επάνω σε όλον τον ημιδακτύλιο (HM) της x -συνιστώσας του dE :

$$E = \int_{HM} dE_x = \int_{HM} dE \cos \varphi = \int_{HM} k \frac{dq}{R^2} \cos \varphi$$

σύμφωνα με τα παραπάνω

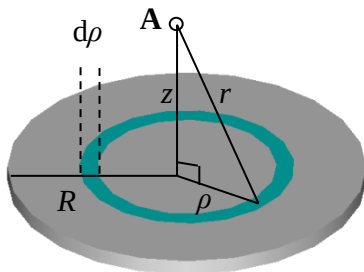
$$E = k \frac{AR}{R^2} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = k \frac{A}{R} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = k \frac{A}{2R} \left[1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} = k \frac{A\pi}{2R}$$

με φορά προς τα αριστερά.

Πρόβλημα 2.5. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου λεπτού δίσκου ακτίνας R και φορτίου ίσου με Q , σε σημείο A που βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετό του και απέχει απόσταση z από το κέντρο του. Σημείωση: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του φορτισμένου λεπτού δακτυλίου Εξ. 2.5, χωρίζοντας τον δίσκο σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών δακτυλίων.

Λύση:

Έστω ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος ακτίνας R και φορτίου Q . Ζητείται το ηλεκτρικό πεδίο E στο σημείο A που βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετο και σε απόσταση z από το κέντρο του δακτυλίου.



Χωρίζουμε τον δίσκο σε μικρούς απειροστούς δακτυλίους ακτίνας ρ και πάχους $d\rho$ και φορτίο dq ο καθένας. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2.5 στην παρακάτω διαφορική μορφή για το απειροστό πεδίο dE που δημιουργεί ένας τέτοιος δακτύλιος στο σημείο A:

$$dE = k dq \frac{z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Το εμβαδό που καταλαμβάνει ο δακτύλιος επάνω στον δίσκο ισούται με $2\pi\rho d\rho$ (μήκος $\times$ πλάτος). Εάν σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά εμβαδό) του δίσκου, τότε το στοιχειώδες φορτίο του δακτυλίου ισούται με $dq = 2\pi\sigma\rho d\rho$ και η παραπάνω γίνεται

$$dE = 2\pi k \sigma \rho d\rho \frac{z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

η οποία ολοκληρώνεται εύκολα από $\rho = 0$ έως και $\rho = R$ κάνοντας χρήση του διαφορικού του τετραγώνου:

$$2\rho d\rho = d\rho^2$$

Αφού το z είναι σταθερό (όσον αφορά την ολοκλήρωση ως προς ρ), τότε μπορούμε να προσθέσουμε το τετράγωνό του ως σταθερά μέσα στο διαφορικό και να έχουμε

$$2\rho d\rho = d(\rho^2 + z^2)$$

Επομένως η ολοκλήρωση οδηγεί στο αποτέλεσμα:

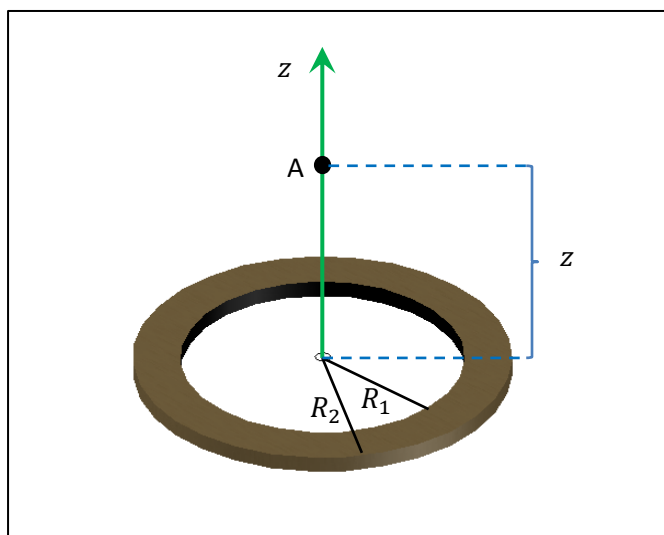
$$E = \pi k \sigma z \int_{\rho=0}^R \frac{2\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \pi k \sigma z \int_{\rho=0}^R \frac{d(\rho^2 + z^2)}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

(έγινε χρήση του $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ με $n = -3/2$). Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ ισούται με $Q/\pi R^2$ και επομένως το παραπάνω αποτέλεσμα γίνεται:

$$E = \frac{2kQ}{R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Πρόβλημα 2.6. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 , με φορτίο Q και αμελητέο ύψους κατά z , σε σημείο Α που βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετό του και απέχει απόσταση z από το κέντρο του, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου απειροελάχιστου πάχους, ακτίνας R και φορτίου q (Εξ. 2.5):

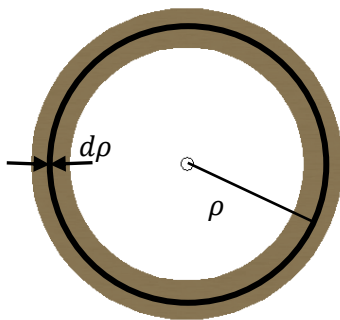
$$E = kq \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$



Απάντηση: $2kQz \left(1/\sqrt{z^2 + R_1^2} - 1/\sqrt{z^2 + R_2^2}\right) / (R_2^2 - R_1^2)$

Λύση:

Χωρίζουμε τον δακτύλιο σε μικρούς απειροστούς δακτυλίους ακτίνας ρ και πάχους $d\rho$ και φορτίο dq ο καθένας.



Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2.5 στην παρακάτω διαφορική μορφή για το απειροστό πεδίο dE που δημιουργεί ένας τέτοιος δακτύλιος στο σημείο A:

$$dE = k dq \frac{z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Το εμβαδό που καταλαμβάνει ο απειροστός δακτύλιος ισούται με $2\pi r dr$ (μήκος $\times$ πλάτος). Επειδή ο δεδομένος δακτύλιος είναι ομοιόμορφα φορτισμένος, ο λόγος των εμβαδών είναι ίσος και με τον λόγο των φορτίων. Εφαρμόζοντας αυτή την ιδέα για τον απειροστό και για τον όλο δακτύλιο, οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$\frac{dq}{Q} = \frac{2\pi r dr}{A}$$

όπου A είναι το εμβαδό του δεδομένου δακτυλίου το οποίο προκύπτει εύκολα με αφαίρεση των εμβαδών δυο κύκλων:

$$A = \pi R_2^2 - \pi R_1^2$$

Έτσι

$$dq = \frac{2\rho d\rho}{R_2^2 - R_1^2} Q$$

Το ηλεκτρικό πεδίο του στοιχειώδους δακτυλίου γίνεται

$$dE = \frac{kzQ}{R_2^2 - R_1^2} \frac{2\rho d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

η οποία ολοκληρώνεται εύκολα από $\rho = R_1$ έως και $\rho = R_2$ κάνοντας χρήση του διαφορικού του τετραγώνου:

$$2\rho d\rho = d\rho^2$$

Αφού το z είναι σταθερό (όσον αφορά την ολοκλήρωση ως προς ρ), τότε μπορούμε να προσθέσουμε το τετράγωνό του ως σταθερά μέσα στο διαφορικό και να έχουμε

$$2\rho d\rho = d(\rho^2 + z^2)$$

Επομένως η ολοκλήρωση οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$E = \frac{kQz}{R_2^2 - R_1^2} \int_{\rho=R_1}^{R_2} \frac{d(\rho^2 + z^2)}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{2kQz}{R_2^2 - R_1^2} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]_{\rho=R_1}^{R_2}$$

(έγινε χρήση του $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ με $n = -3/2$). Εφαρμόζοντας τα όρια:

$$E = \frac{2kQz}{R_2^2 - R_1^2} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right]$$

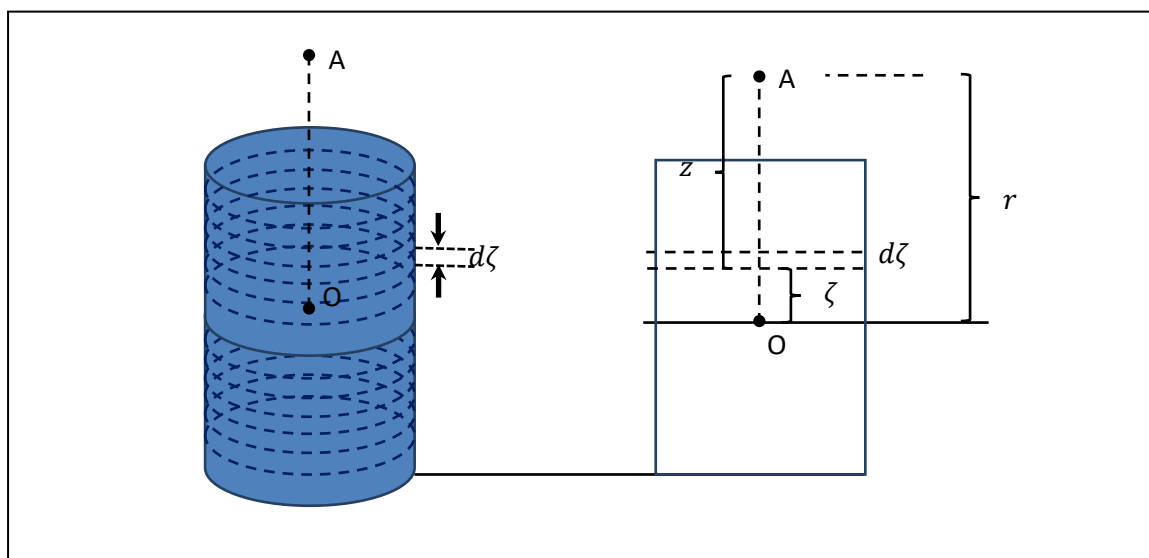
Πρόβλημα 2.7. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης συμπαγούς σφαίρας ακτίνας R με φορτίο Q σε όλο τον όγκο της, σε σημείο A στο εξωτερικό της σε απόσταση r από το κέντρο της O . Σημείωση: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα παραπάνω Προβλήματος, χωρίζοντας την σφαίρα σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών δίσκων.

Πρόβλημα 2.8. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα με τη φορτισμένη σφαίρα παραπάνω εάν πρόκειται για σφαιρικό κέλυφος, δηλαδή όλο το φορτίο Q βρίσκεται ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του κελύφους (και όχι στον όγκο ο οποίος τώρα είναι κενός). Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο και στο εσωτερικό του σφαιρικού κελύφους.

Πρόβλημα 2.9. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R και μικρού μήκους L με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ κατανεμημένη σε όλο τον όγκο του, σε σημείο A επάνω στον άξονά του και σε απόσταση r από το κέντρο του O , όπου $r > L/2$ (στον εξωτερικό χώρο του κυλίνδρου). Σημείωση: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του παραπάνω Προβλήματος 2.3 χωρίζοντας τον σωλήνα σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών δακτυλίων.

Λύση:

Τεμαχίζουμε σε λεπτούς δίσκους πάχους $d\zeta$ και ακτίνας R , ο καθένας απέχει απόσταση $z = r - \zeta$ από το σημείο A



Πεδίο δίσκου:

$$dE = \frac{2kdq}{R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Πυκνότητα φορτίου

$$dq = \rho dV = \rho \pi R^2 dz$$

Επειδή όλα τα dE είναι συγγραμμικά, μπορούμε απλά να αθροίσουμε τα μέτρα τους. Ολοκλήρωση σε όλο τον κύλινδρο K :

$$E = \int_K dE = \frac{2k}{R^2} \int_{z=r+L/2}^{r-L/2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \rho \pi R^2 dz$$

$$E = 2k\rho\pi \int_{z=r+L/2}^{r-L/2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) dz$$

$$E = 2k\rho\pi \left\{ \int_{z=r+L/2}^{r-L/2} dz - \int_{z=r+L/2}^{r-L/2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} dz \right\}$$

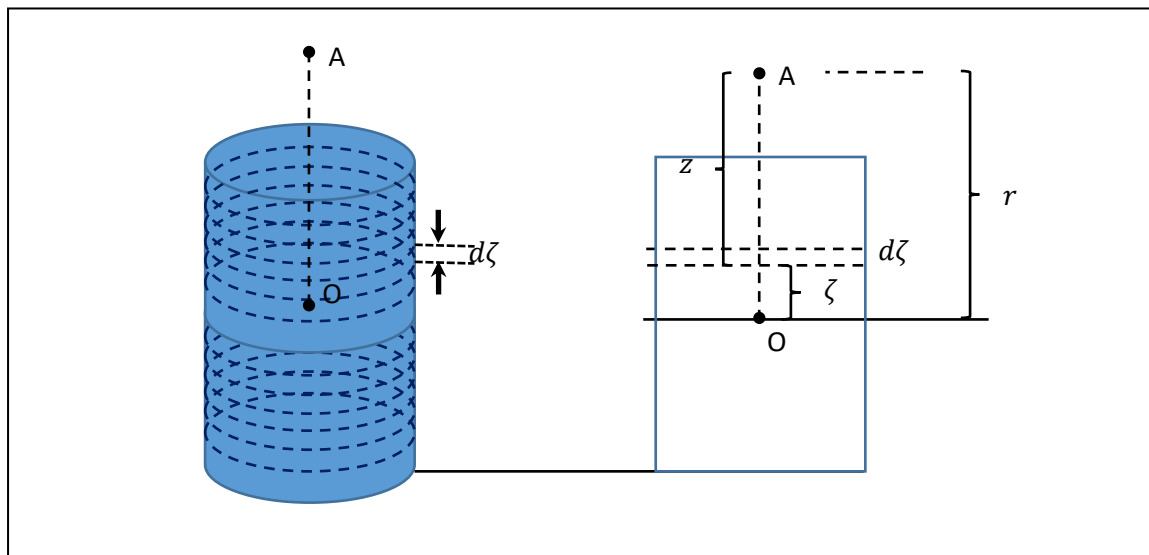
$$E = 2k\rho\pi \left\{ [z]_{z=r+L/2}^{r-L/2} - \left[\sqrt{z^2 + R^2} \right]_{z=r+L/2}^{r-L/2} \right\}$$

$$E = 2k\rho\pi \left\{ \sqrt{(r+L/2)^2 + R^2} - \sqrt{(r-L/2)^2 + R^2} - L \right\}$$

Πρόβλημα 2.10.

Να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα με το φορτισμένο σωλήνα εάν το πάχος του είναι πεπερασμένο με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 .

Λύση: Τεμαχίζω σε λεπτούς δίσκους πάχους dz και ακτίνας R , ο καθένας απέχει απόσταση $z = r - \zeta$ από το σημείο Α



Πεδίο δίσκου:

$$dE = \frac{2kdq}{(R_2^2 - R_1^2)} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right)$$

Πυκνότητα φορτίου

$$dq = \rho dV = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) dz$$

Επειδή όλα τα dE είναι συγγραμμικά, μπορούμε απλά να αθροίσουμε τα μέτρα τους. Ολοκλήρωση σε όλο τον κύλινδρο K :

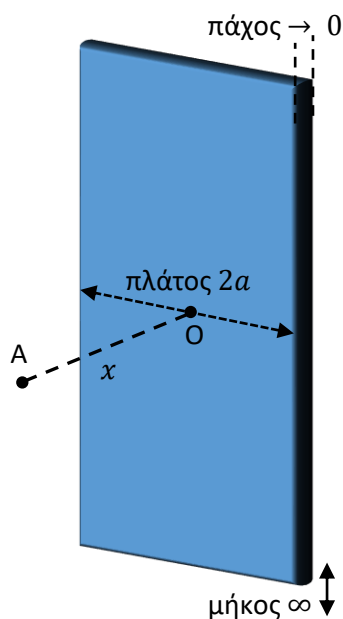
$$E = \int_K dE = 2k\pi\rho \int_{z=r+L/2}^{r-L/2} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right) dz$$

$$E = k\pi\rho \int_{z=r+L/2}^{r-L/2} [(z^2 + R_1^2)^{-1/2} - (z^2 + R_2^2)^{-1/2}] d(z^2)$$

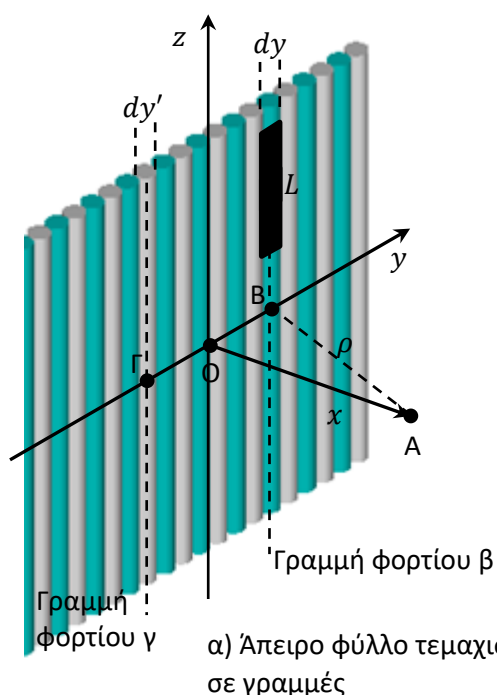
$$E = \frac{k\pi\rho}{2} \left\{ \sqrt{(r + L/2)^2 + R_1^2} - \sqrt{(r - L/2)^2 + R_1^2} - \sqrt{(r + L/2)^2 + R_2^2} + \sqrt{(r - L/2)^2 + R_2^2} \right\}$$

Πρόβλημα 2.11.

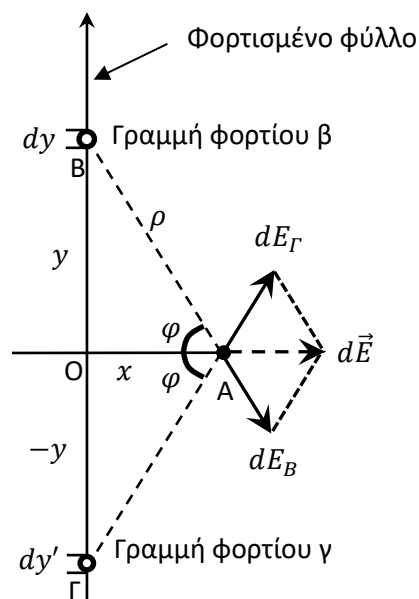
Δεδομένου του τύπου $E = 2k\lambda/\rho$ που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο E μιας άπειρης γραμμής με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ σε τυχαίο σημείο που βρίσκεται σε απόσταση ρ από αυτή, να υπολογισθεί με ολοκλήρωση το ηλεκτρικό πεδίο της λωρίδας του παρακάτω σχήματος, η οποία φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ , έχει άπειρο μήκος, πλάτος $2a$ και απειροελάχιστο πάχος, σε ένα σημείο A που απέχει απόσταση x κάθετα στη λωρίδα από το κέντρο της το οποίο το λαμβάνουμε ως την αρχή O των συντεταγμένων.

Λύση:

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα (στα αριστερά), "τεμαχίζουμε" τη λωρίδα κατά το μήκος της σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών στύλων απειροστού πάχους ο καθένας, οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν προσεγγιστικά ως γραμμές φορτίου και έτσι να χρησιμοποιήσουμε τον δεδομένο τύπο. Τοποθετούμε τον άξονα z κατά μήκος των γραμμών φορτίων, και τον άξονα y κατά μήκος του πλάτους της λωρίδας, κάθετα προς τις γραμμές φορτίου που τεμαχίσαμε. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα τυχαίο σημείο A που απέχει κάθετη απόσταση x από την αρχή των συντεταγμένων O. Έτσι θα ολοκληρώσουμε επάνω σε όλες τις γραμμές φορτίου δηλαδή κατά μήκος του άξονα y .



α) Άπειρο φύλλο τεμαχισμένο σε γραμμές



β) Σύστημα συντεταγμένων σε κάτοψη

Σχήμα 2.9

Για να χρησιμοποιήσουμε όμως την Εξ. 2.6, πρέπει να υπολογίσουμε την γραμμική πυκνότητα της κάθε γραμμής φορτίου, δεδομένου ότι στο παρόν πρόβλημα μας δίνεται μόνο η επιφανειακή πυκνότητα. Για το σκοπό αυτό θεωρήστε τη γραμμή φορτίου β στο παραπάνω Σχήμα (στα αριστερά) η οποία τέμνει τον άξονα y στο σημείο Β και θεωρήστε ένα μικρό τμήμα της μήκους L . Το στοιχειώδες εμβαδό (κοιτώντας κάθετα προς το φύλλο) αυτού του τμήματος είναι ίσο με $dA = Ldy$ (μήκος $\times$ πλάτος) και άρα από τον ορισμό του σ περιέχει φορτίο $dq = \sigma dA = \sigma Ldy$. Επομένως η γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα μήκους) είναι ίση με

$$d\lambda = \frac{dq}{L} = \sigma dy$$

Επειδή η κατανομή φορτίου είναι ομοιογενής, η γραμμική πυκνότητα που υπολογίσαμε για το τμήμα μήκους L της γραμμής φορτίου β, είναι η ίδια για όλη τη γραμμή. Σύμφωνα λοιπόν με την Εξ. 2.6, αυτή η γραμμή φορτίου δημιουργεί στο Α ένα ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο ίσο με

$$dE_B = \frac{2k}{\rho} d\lambda$$

όπου ρ είναι η απόσταση ΒΑ από τη γραμμή φορτίου β έως το σημείο παρατήρησης. Θεωρήστε τώρα την κάτοψη στο παραπάνω Σχήμα (στα δεξιά). Όπως γνωρίζουμε για την γραμμή φορτίου, το $d\vec{E}_B$ είναι κάθετο προς τη γραμμή και άρα ανήκει στην σελίδα του σχήματος αφού η γραμμή τέμνει το Σχήμα κάθετα, με φορά προς το άπειρο (απομακρυνόμενο από τη γραμμή). Επομένως το $d\vec{E}_B$ βρίσκεται επάνω στην προέκταση της ευθείας ΒΑ. Θα θεωρήσουμε και την γραμμή φορτίου η οποία τέμνει τον άξονα y στο σημείο Γ και η οποία ισαπέχει από τη γραμμή β ως προς την αρχή Ο. Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}_\Gamma$ έχει ίσο μέτρο με το $d\vec{E}_B$ και έτσι λόγω συμμετρίας το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο dE είναι κάθετο στον άξονα y δηλαδή κάθετο στο φύλλο (κατά μήκος του άξονα x). Μπορούμε να γράψουμε τις εξής απλές τριγωνομετρικές εκφράσεις

$$\rho \cos\varphi = x$$

$$y = x \tan\varphi \Rightarrow dy = x d\varphi / \cos^2\varphi$$

Το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο dE λόγω συμμετρίας είναι ίσο με

$$dE = dE_B \cos\varphi + dE_\Gamma \cos\varphi = 2dE_B \cos\varphi$$

Εφόσον λάβαμε τις γραμμές φορτίου σε ζεύγη, αρκεί να ολοκληρώσουμε από $y = 0$ έως και a (και όχι μεταξύ $\pm a$ αλλιώς θα βρούμε διπλάσιο αποτέλεσμα από το κανονικό). Η ολοκλήρωση γίνεται

$$E = \int_{y=0}^a 2dE_B \cos\varphi = \int_{y=0}^a \frac{4k}{\rho} \cos\varphi d\lambda = 4k\sigma \int_{y=0}^a \frac{\cos\varphi}{\rho} dy$$

ή

$$E = 4k\sigma \int_{y=0}^a \frac{\cos\varphi}{x} \cos\varphi \frac{x}{\cos^2\varphi} d\varphi = 4k\sigma \int_{y=0}^a d\varphi$$

Από την $y = x \tan\varphi$ τα όρια του φ για $y = 0$ έως a είναι τα εξής

$$\varphi_1 = \tan^{-1}(0) = 0$$

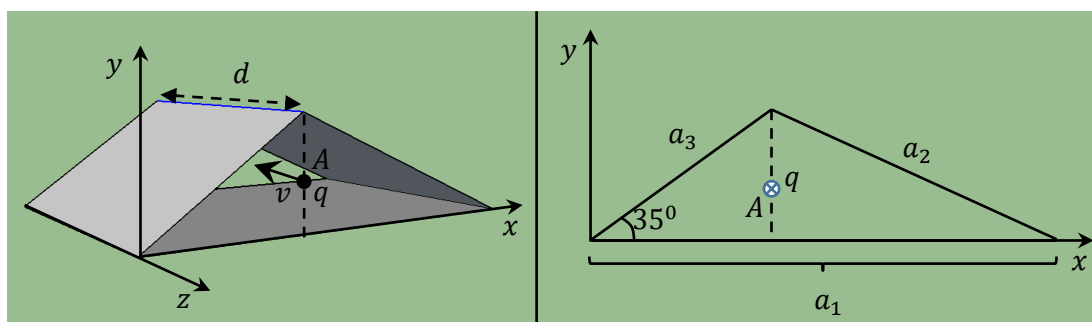
$$\varphi_2 = \tan^{-1}(a/x)$$

οπότε

$$E = 4k\sigma \tan^{-1}(a/x)$$

Πρόβλημα 2.12.

Στο παραπάνω σχήμα, τρεις ορθογώνιες μονωτικές πλάκες με κοινό πλάτος $d = 2\text{ m}$, ενώνονται έτσι ώστε τα κοινά τους πλάτη να εφάπτονται σε ένα τριγωνικό σκεποειδή σχηματισμό με τη μια γωνία του τριγώνου (στην πρόσοψη του σχήματος) να είναι 35° ενώ τα μήκη a_1 και a_3 είναι αντίστοιχα 3.4 m και 1.5 m . Οι πλάκες φέρουν ομοιόμορφα φορτία $q_1 = 20\text{ nC}$, $q_2 = -30\text{ nC}$ και $q_3 = 25\text{ nC}$ με τους δείκτες των φορτίων να αντιστοιχούν στους δείκτες των τριών πλευρών. Ένα σωματίδιο με φορτίο $q = 2 \times 10^{-12}\text{ C}$ και μάζα $m = 5 \times 10^{-11}\text{ kg}$ εισέρχεται κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ στον σκεποειδή χώρο στο σημείο Α που βρίσκεται επάνω στο μέσο του ύψους που δείχνεται με διακεκομμένη γραμμή, με ταχύτητα $v = 25\text{ m/s}$ κάθετη στην πρόσοψη. Θεωρώντας ότι οι διαστάσεις των πλακών είναι σχετικά μεγάλες, να χρησιμοποιήσετε μια κατάλληλη προσέγγιση ώστε να υπολογίσετε πόσο θα αποκλίνει το φορτίο q κατά x και κατά y σε σχέση με την αρχική του θέση Α τη στιγμή που εξέρχεται από τον σκεποειδή χώρο.



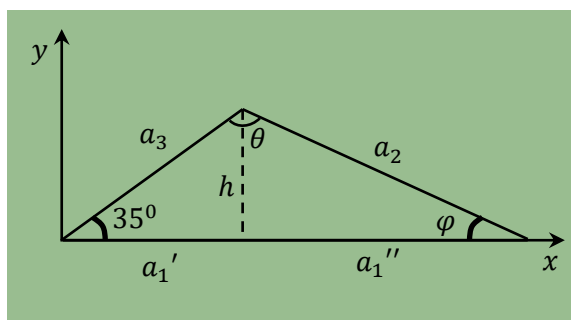
Τρισδιάστατη όψη

Πρόσοψη

Λύση:

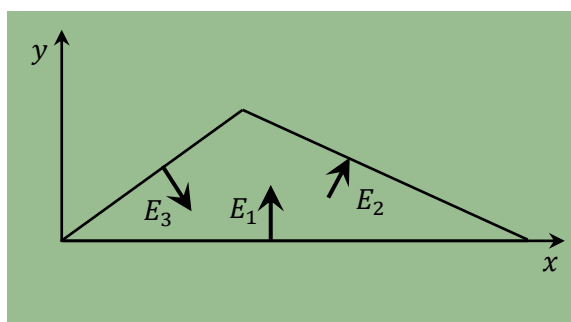
Κατ' αρχάς πρέπει να λύσουμε το τρίγωνο για να βρούμε όλες τις διαστάσεις του. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_3 \cos 35^\circ = 1.23\text{ m} \\ a''_1 &= a_1 - a'_1 = 2.17\text{ m} \\ h &= a_3 \sin 35^\circ = 0.86\text{ m} \\ \varphi &= \tan^{-1}(h/a''_1) = 21.6^\circ \\ \theta &= 180 - 35 - \varphi = 123.4^\circ \\ a_2 &= a''_1 / \cos \varphi = 2.33\text{ m} \end{aligned}$$



Πλάγια όψη

Θεωρώντας ότι οι διαστάσεις των πλακών είναι μεγάλες, μπορούμε να πάρουμε την προσέγγιση του άπειρου φύλλου με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με $E = \sigma/\epsilon_0$ με διεύθυνση κάθετα στο φύλλο. Έτσι τα ηλεκτρικά πεδία είναι όπως στο παρακάτω σχήμα, με τη φορά που σημειώνεται, κάθετα στις πλάκες και απομακρυνόμενα από αυτές για θετικά φορτία και προς αυτές για αρνητικά φορτία.



Πλάγια όψη

Η πυκνότητα φορτίου είναι ίση με το φορτίο ανά εμβαδό. Οι τρεις πλάκες είναι ορθογώνιες με εμβαδό $A_i = a_i d$ και η γωνία του κάθε πεδίου ως προς τον άξονα x είναι η συμπληρωματική (κατά μέτρο) της γωνίας που σχηματίζει το αντίστοιχο φύλλο με αυτό τον άξονα. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Πλάκα 1	Πλάκα 2	Πλάκα 3
Εμβαδό (m^2)	6.8	4.67	3.0
Επιφ. Πυκνότητα (nC/m^2)	2.94	-6.42	8.33
Πεδίο E (N/C)	332	726	942
Γωνία του E	90°	68.4°	-55°
Συνιστώσα x	0	267	540
Συνιστώσα y	332	675	-771

Τα πεδία αυτά είναι εξ' ολοκλήρου στο επίπεδο x - y και το συνιστάμενο πεδίο έχει συνιστώσες

$$E_x = 807 \text{ N/C}$$

$$E_y = 236 \text{ N/C}$$

Οι αντίστοιχες δυνάμεις που δέχεται το φορτίο είναι ίσες με

$$F_x = qE_x = 2 \times 10^{-12} \times 807 = 1.61 \times 10^{-9}$$

$$F_y = qE_y = 2 \times 10^{-12} \times 236 = 4.71 \times 10^{-10}$$

Ως προς τον άξονα z δεν υπάρχει δύναμη και άρα το ηλεκτρόνιο κινείται με σταθερή ταχύτητα που σημαίνει ότι εξέρχεται από τον τριγωνικό χώρο σε χρόνο

$$t = \frac{d}{v} = \frac{2}{25} = 0.08 \text{ s}$$

Το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται κατά x και κατά y με επιταχύνσεις που δίνονται από τις $a_x = F_x/m$ και $a_y = F_y/m$ οπότε οι αντίστοιχες αποκλίσεις σε σχέση με το σημείο εισόδου είναι ίσες με:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x t^2 = 0.10 \text{ m}$$

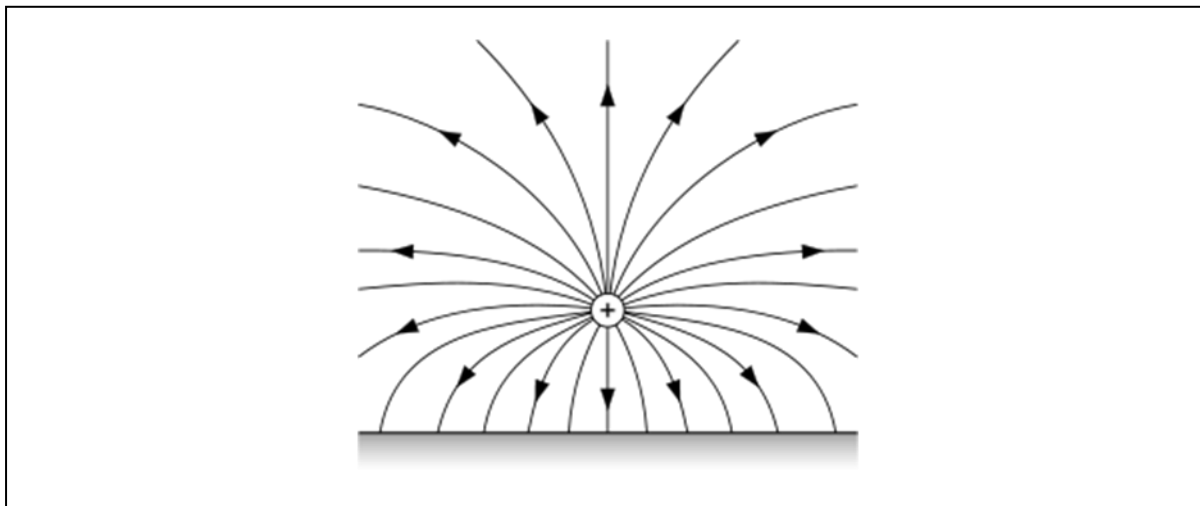
$$\Delta y = \frac{1}{2} a_y t^2 = 0.03 \text{ m}$$

3. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

Πρόβλημα 3.1. Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος δυο ίσων σημειακών φορτίων με αντίθετο πρόσημο σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους.

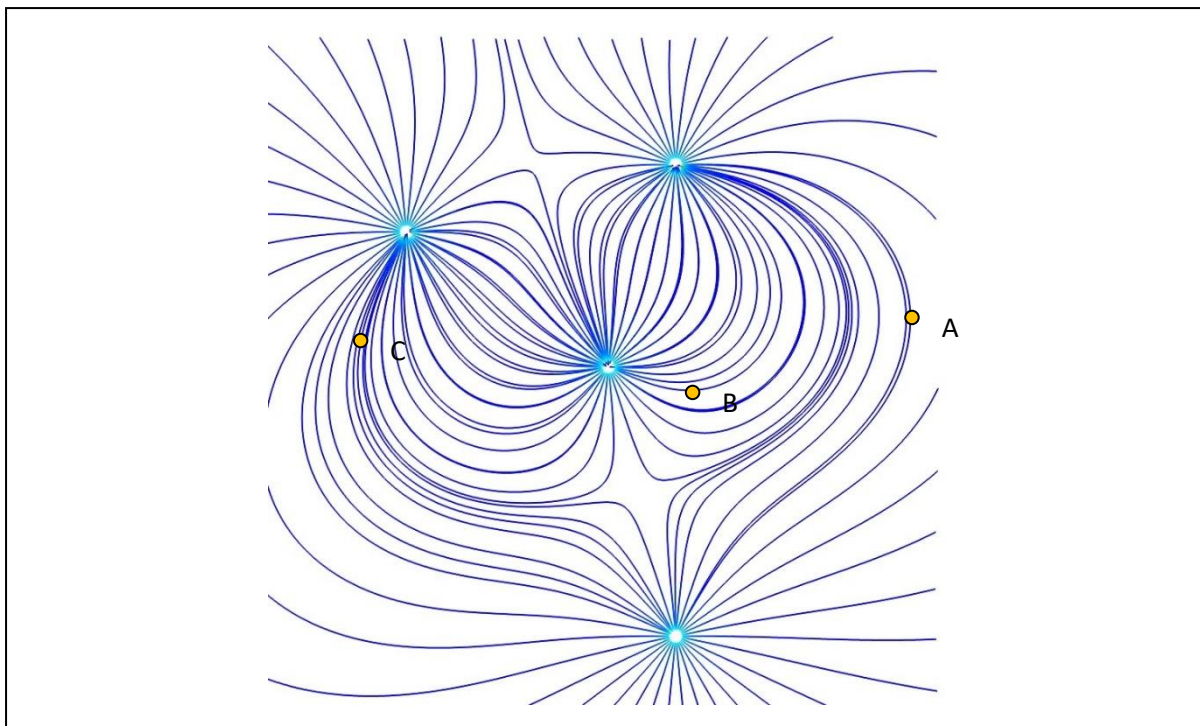
Πρόβλημα 3.2. Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος δυο ίσων θετικών σημειακών φορτίων σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους.

Πρόβλημα 3.3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος φορτίων. Να συζητηθεί ποιοτικώς η φύση του συστήματος αυτού (πρόσημο φορτίων, κατανομή κ.τ.λ.)



<http://physics.stackexchange.com/questions/37572/are-the-field-lines-the-same-as-the-trajectories-of-a-particle-with-initial-velo>

Πρόβλημα 3.4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος φορτίων. α) Να σημειωθούν επάνω στο σχήμα οι τοποθεσίες όπου υπάρχουν φορτία κατά τη γνώμη σας. β) Να συζητηθεί το είδος των φορτίων αυτών εάν γνωρίζετε ότι το χαμηλότερο από αυτά στο σχήμα είναι θετικό. γ) Να σημειωθούν επάνω στο σχήμα δυο σημεία όπου περιμένετε το ηλεκτρικό πεδίο να είναι πρακτικώς μηδέν. δ) Σε ποιο από τα τρία σημεία A, B και C του σχήματος, θα ασκηθεί μεγαλύτερη δύναμη σε ένα τέταρτο υποθετικό σημειακό φορτίο (πολύ μικρότερου μεγέθους από τα φορτία του συστήματος); ε) Σχεδιάστε τα διανύσματα του πεδίου $\vec{E}$ σε καθένα από τα παραπάνω τρία σημεία με το μήκος του διανύσματος να αντιπροσωπεύει ποιοτικώς το μέτρο του (δηλαδή σχεδιάστε ένα μεγαλύτερο διάνυσμα εκεί που πιστεύετε ότι το πεδίο είναι ισχυρότερο κ.ό.κ.) και τον προσανατολισμό του διανύσματος να αντιπροσωπεύει τη γωνία του $\vec{E}$. στ) Ποιο από τα παραπάνω τρία σημεία A, B και C του σχήματος βρίσκετε εγγύτερα σε φορτίο; Είναι το ίδιο σημείο που βρήκατε στο υποερώτημα δ παραπάνω; Σχολιάστε



<http://elektromagnetisme.no/2010/09/25/using-mayavi-to-visualize-electric-fields/>

Πρόβλημα 3.5. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο που δημιουργεί ένα μονωτικό σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q παντού στο εσωτερικό του.

Απάντηση:

$$E = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ k \frac{Q}{R^2} r & R_1 < r < R_2 \\ k \frac{Q}{r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

Λύση:

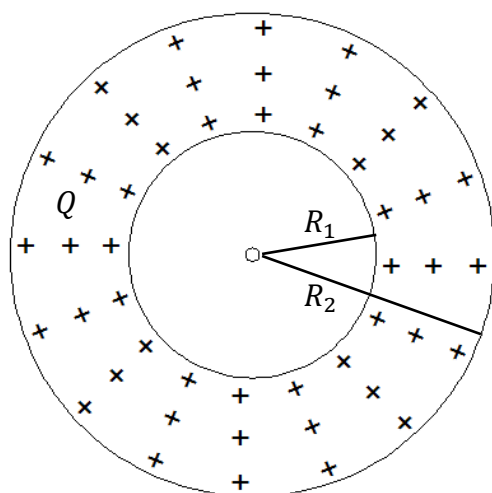
Το φορτισμένο κέλυφος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στο πρόβλημα υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιοχές του χώρου: Ο κενός εσωτερικός χώρος σε σχήμα σφαίρας ακτίνας R_1 , ο αγωγικός χώρος του κελύφους μεταξύ της εσωτερικής ακτίνας R_1 και της εξωτερικής R_2 και ο εξωτερικός κενός χώρος που περιβάλλει το κέλυφος.

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας, περιμένουμε η κατανομή των Δ.Γ. να είναι ακτινική. Για αυτό το λόγο επιλέγουμε ως επιφάνεια *Gauss* μια ιδεατή σφαίρα ακτίνας r , ομόκεντρη με το σημειακό φορτίο. Όπως εξηγούμε και στο βιβλίο στην περίπτωση της φορτισμένης συμπαγούς σφαίρας στον εδάφιο με τον νόμο του *Gauss*, το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ τέμνει παντού κάθετα την επιφάνεια *Gauss* και έτσι είναι παράλληλο με το διάνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας $d\vec{A}$ (π.χ. δείτε Σχήμα 3.9 και 3.10 στο βιβλίο). Αυτό σημαίνει ότι το μεταξύ τους εσωτερικό γινόμενο γίνεται

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \cos 0^\circ = E dA$$

είναι δηλαδή ίσο με το απλό γινόμενο των μέτρων των δυο διανυσμάτων. Έτσι ο νόμος του Gauss απλοποιείται σε

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\pi}}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint E dA = \frac{Q_{\pi}}{\epsilon_0}$$



Η ολοκλήρωση γίνεται επάνω στην σφαίρα Gauss και Q_{π} είναι το περικλειόμενο φορτίο. Περιμένουμε η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών, και άρα και το E , να μην αλλάζει επάνω στη σφαίρα. Η πυκνότητα τους μικραίνει όσο απομακρύνονται προς το άπειρο αλλά επάνω στη σφαίρα παραμένει σταθερή. Αυτό μπορούμε να το δούμε και από πλευράς σφαιρικής συμμετρίας: Οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας Gauss και εάν εξετάσουμε, "βλέπουμε" ακριβώς την ίδια κατανομή φορτίου στην ίδια απόσταση. Επομένως το E είναι σταθερό στην παραπάνω ολοκλήρωση και μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E \oint dA = \frac{Q_{\pi}}{\epsilon_0}$$

Εάν θυμηθούμε ότι το dA είναι το στοιχειώδες εμβαδό του απειροστού τμήματος της σφαίρας στο σημείο P, τότε το ολοκλήρωμα ισούται με το συνολικό εμβαδό της σφαίρας που από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με $4\pi r^2$. Επομένως

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\pi}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\pi}}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Από την Εξ. 2.8 το παραπάνω γράφεται πιο απλά και ως

$$E = k \frac{Q_{\pi}}{r^2}$$

Το μόνο που αλλάζει στους τρεις διαφορετικούς χώρους, είναι το περικλειόμενο φορτίο. Έτσι έχουμε:

Εσωτερικός χώρος: Η σφαίρα Gauss έχει ακτίνα $r < R_1$ και δεν περικλείει κάποιο φορτίο έτσι $Q_{\pi} = 0$ και $E = 0$.

Χώρος κελύφους: Η σφαίρα *Gauss* έχει ακτίνα $R_1 < r < R_2$ και περικλείει μέρος του φορτίου Q του κελύφους. Πόσο είναι το περικλειόμενο φορτίο Q_π ; Όπως και με την περίπτωση της συμπαγούς φορτισμένης σφαίρας που εξετάζουμε στο βιβλίο, έτσι και εδώ επειδή η κατανομή είναι ομοιογενής, περιμένουμε ότι η αναλογία όγκων να είναι ίση με την αναλογία φορτίων. Επειδή ο όγκος της σφαίρας εξαρτάται κυβικά από την ακτίνα της, τότε έχουμε

$$Q_\pi = Q \frac{r^3}{R^3}$$

και

$$E = k \frac{Q_\pi}{r^2} = k \frac{Q}{R^2} r$$

Εξωτερικός χώρος: Η σφαίρα *Gauss* έχει ακτίνα $r > R_2$ και περικλείει όλο το σημειακό φορτίο Q δηλαδή $Q_\pi = Q$. Έτσι:

$$E = k \frac{Q_\pi}{r^2} = k \frac{Q}{r^2}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στον κενό χώρο το πεδίο δεν διαφέρει από αυτό που παράγει το σημειακό φορτίο ενώ στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν. Συνοψίζοντας:

$$E = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ k \frac{Q}{R^2} r & R_1 < r < R_2 \\ k \frac{Q}{r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

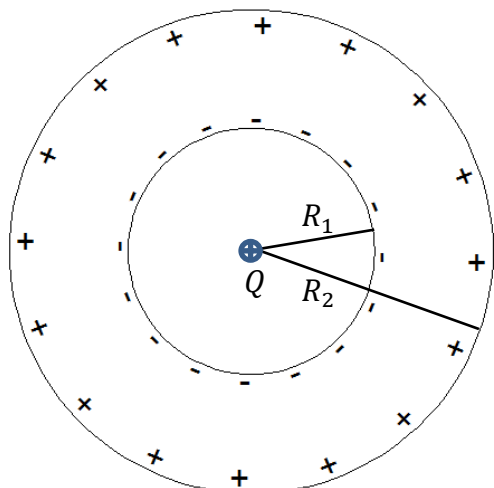
Πρόβλημα 3.6. Σημειακό φορτίο $+Q$ βρίσκεται στο κέντρο σφαιρικού αγωγίμου κελύφους εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 . α) Περιγράψτε την κατανομή του επαγόμενου φορτίου στο κέλυφος β) Να βρεθεί το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο (εντός, εκτός και στο εσωτερικό του κελύφους)

Απάντηση:

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} & r < R_1 \\ 0 & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} & r > R_2 \end{cases}$$

Λύση:

(α) Το επαγόμενο φορτίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το θετικό φορτίο $+Q$ στο κέντρο του κελύφους, έλκει ηλεκτρόνια του αγωγού επειδή αυτά μπορούν και κινούνται ελεύθερα μέσα σε αυτόν. Είπαμε ότι το φορτίο στους αγωγούς καταλήγει πάντα στις επιφάνειες και έτσι ένα αρνητικό φορτίο $-Q$ ίσου μέτρου με το σημειακό θα αναπτυχθεί στην εσωτερική επιφάνεια του κελύφους. Εφόσον το κέλυφος ήταν αρχικά αφόρτιστο, τότε ένα ίσο και αντίθετο φορτίο $+Q$ θα αναπτυχθεί στην απέναντι ακριβώς επιφάνεια, δηλαδή στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους ώστε το κέλυφος να παραμένει ολικά ουδέτερο.



(β) Σε αυτό το πρόβλημα υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιοχές του χώρου: Ο κενός εσωτερικός σε σχήμα σφαίρας ακτίνας R_1 , ο αγωγίμος χώρος του κελύφους μεταξύ της εσωτερικής ακτίνας R_1 και της εξωτερικής R_2 και ο εξωτερικός κενός χώρος που περιβάλλει το κέλυφος.

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας, περιμένουμε η κατανομή των Δ.Γ. να είναι ακτινική. Για αυτό το λόγο επιλέγουμε ως επιφάνεια *Gauss* μια ιδεατή σφαίρα ακτίνας r , ομόκεντρη με το σημειακό φορτίο. Όπως εξηγούμε και στο βιβλίο στην περίπτωση της φορτισμένης συμπαγούς σφαίρας στον εδάφιο με τον νόμο του *Gauss*, το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ τέμνει παντού κάθετα την επιφάνεια *Gauss* και έτσι είναι παράλληλο με το διάνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας $d\vec{A}$ (δείτε Σχήμα 3.9 και 3.10). Αυτό σημαίνει ότι το μεταξύ τους εσωτερικό γινόμενο γίνεται

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \cos 0^\circ = E dA$$

είναι δηλαδή ίσο με το απλό γινόμενο των μέτρων των δυο διανυσμάτων. Έτσι ο νόμος του *Gauss* απλοποιείται σε

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\pi}}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint E dA = \frac{Q_{\pi}}{\epsilon_0}$$

Η ολοκλήρωση γίνεται επάνω στην σφαίρα *Gauss* και Q_{π} είναι το περικλειόμενο φορτίο. Περιμένουμε η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών, και άρα και το E , να μην αλλάζει επάνω στη σφαίρα. Η πυκνότητα τους μικραίνει όσο απομακρύνονται προς το άπειρο αλλά επάνω στη σφαίρα παραμένει σταθερή. Αυτό μπορούμε να το δούμε και από πλευράς σφαιρικής συμμετρίας: Οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας *Gauss* και εάν εξετάσουμε, "βλέπουμε" ακριβώς την ίδια κατανομή φορτίου στην ίδια απόσταση. Επομένως το E είναι σταθερό στην παραπάνω ολοκλήρωση και μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E \oint dA = \frac{Q_{\pi}}{\epsilon_0}$$

Εάν θυμηθούμε ότι το dA είναι το στοιχειώδες εμβαδό του απειροστού τμήματος της σφαίρας στο σημείο P, τότε το ολοκλήρωμα ισούται με το συνολικό εμβαδό της σφαίρας που από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με $4\pi r^2$. Επομένως

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\pi}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\pi}}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Από την Εξ. 2.8 το παραπάνω γράφεται πιο απλά και ως

$$E = k \frac{Q_{\pi}}{r^2}$$

Το μόνο που αλλάζει στους τρεις διαφορετικούς χώρους, είναι το περικλειόμενο φορτίο. Έτσι έχουμε:

Εσωτερικός χώρος: Η σφαίρα *Gauss* έχει ακτίνα $r < R_1$ και περικλείει μόνο το σημειακό φορτίο Q έτσι:

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Χώρος κελύφους: Η σφαίρα *Gauss* έχει ακτίνα $R_1 < r < R_2$ και περικλείει τόσο το σημειακό φορτίο Q όσο και την αρνητική κατανομή με ίσο και αντίθετο φορτίο. Έτσι: $Q_{\pi} = Q - Q = 0$ και

$$E = \frac{Q_{\pi}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = 0$$

Επιβεβαιώνεται έτσι το θεώρημα που λέει ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό των αγωγών είναι μηδέν.

Εξωτερικός χώρος: Η σφαίρα *Gauss* έχει ακτίνα $r > R_2$ και περικλείει τόσο το σημειακό φορτίο Q όσο και τις δυο κατανομές με ίσα και αντίθετα φορτία. Έτσι: $Q_{\pi} = Q - Q + Q = Q$ και

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\pi}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στον κενό χώρο το πεδίο δεν διαφέρει από αυτό που παράγει το σημειακό φορτίο ενώ στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν. Συνοψίζοντας:

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} & r < R_1 \\ 0 & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} & r > R_2 \end{cases}$$

Πρόβλημα 3.7. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού επάνω στην εξωτερική επιφάνεια ενός λεπτότοιχου αγωγίμου σωλήνα μεγάλου μήκους L και ακτίνας R , εάν φέρει ομοιόμορφο φορτίο Q (Σημείωση, μπορείτε να "τεμαχίσετε" τον σωλήνα σε σύνολο μικρών επιπέδων πλακιδίων)

Λύση:

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο αγωγός αποτελείται από ένα σύνολο μικρών επιπέδων πλακιδίων που το καθένα φέρει επιφανειακή πυκνότητα σ σύμφωνα με το Σχήμα 3.16 στο βιβλίο και την σχετική συζήτηση στην παράγραφο πριν από αυτό. Σε αυτή την περίπτωση, το κάθε πλακίδιο εξομοιάζει ένα λεπτό φύλλο και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 3.8 για το πεδίο επάνω στην επιφάνεια του αγωγού

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

με τη φορά του E να είναι κάθετη στον αγωγό και προς τα έξω για θετικό φορτίο. Επειδή το φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα επάνω στην επιφάνεια του αγωγού, η επιφανειακή πυκνότητα σ (φορτίο/επιφάνεια) είναι παντού σταθερή και έτσι το σ ενός πλακιδίου είναι το ίδιο με το σ του όλου αγωγού και μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi RL}$$

όπου $2\pi RL$ είναι το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του σωλήνα (μήκος $\times$ ύψος). Το ηλεκτρικό πεδίο τότε είναι ίσο με

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 RL}$$

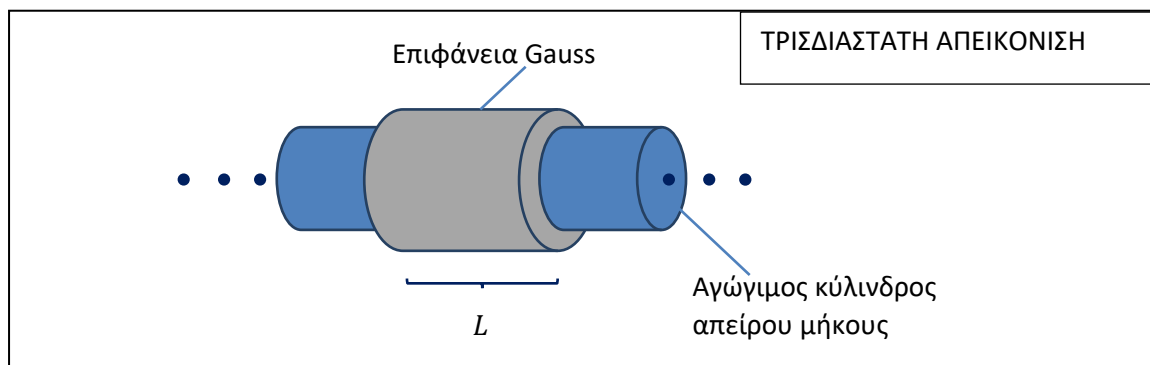
Πρόβλημα 3.8. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο ενός μονωτικού κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου η (φορτίο/όγκος)

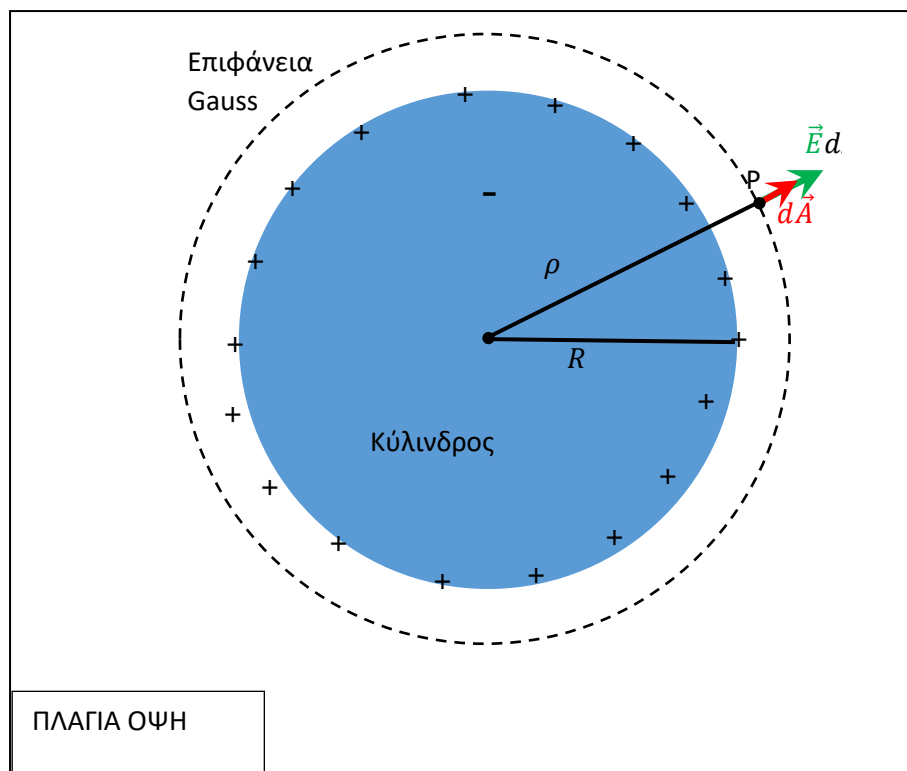
Απάντηση:

$$E = \begin{cases} \frac{\eta\rho}{2\varepsilon_0} & \rho < R \\ \frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0\rho} & \rho \geq R \end{cases}$$

Λύση:

Θα εργαστούμε πρώτα στο εξωτερικό του κυλίνδρου. Όπως φαίνεται και στα παρακάτω δυο σχήματα, λόγω κυλινδρικής συμμετρίας, επιλέγουμε για επιφάνεια Gauss ένα κλειστό κύλινδρο ακτίνας $\rho > R$ και μήκους L , ομοαξονικό με τον δεδομένο κύλινδρο.





Οι δυναμικές γραμμές είναι παρόμοιες με αυτές που είδαμε στο υπο-εδάφιο "Φορτισμένη γραμμή απείρων διαστάσεων", δηλαδή δισδιάστατες ακτινικές από την επιφάνεια του κυλίνδρου προς το άπειρο (σαν τις ακτίνες της ρόδας του ποδηλάτου). Ακριβώς όπως δουλέψαμε με την γραμμή φορτίου, το $d\vec{A}$ στις δυο βάσεις B_1 και B_2 του κυλίνδρου Gauss είναι κάθετο στο $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ εκεί και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Στην παράπλευρη επιφάνεια Π βλέπουμε από την πλάγια όψη ότι το $d\vec{A}$ είναι παράλληλο με το $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$. Επομένως

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{\Pi} E dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

όπου Q είναι το περικλειόμενο φορτίο από τον κύλινδρο Gauss. Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το E είναι σταθερό επάνω στην Π και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E \int_{\Pi} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου Gauss είναι ίσο με $2\pi\rho L$ (βάση×ύψος). Επομένως

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε το περικλειόμενο φορτίο Q . Αφού αυτό εγκλωβίζεται μέσα σε μήκος L του αγώγιμου κυλίνδρου, ο αντίστοιχος περικλειόμενος όγκος του αγωγού ισούται με

$$V = \pi R^2 L$$

Δεδομένου ότι η πυκνότητα φορτίου η είναι εξ' ορισμού φορτίο ανά όγκο, το περικλειόμενο φορτίο ισούται με $Q = \eta V = \eta\pi R^2 L$ και έτσι

$$2E\pi\rho L = \frac{\eta\pi R^2 L}{\varepsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0\rho}$$

Στο εσωτερικό του αγωγού, η αντιμετώπιση του προβλήματος είναι η ίδια ακριβώς, με τη διαφορά τώρα ότι η επιφάνεια Gauss περικλείει λιγότερο φορτίο και στον υπολογισμό του περικλειόμενου όγκου V' πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ακτίνα ρ της επιφάνειας Gauss και όχι του αγωγού R , αφού η επιφάνεια αυτή είναι εξ' ολοκλήρου μέσα στον αγωγό. Έτσι

$$V' = \pi\rho^2 L$$

Το αντίστοιχο περικλειόμενο φορτίο είναι ίσο με

$$Q' = \eta V' = \eta\pi\rho^2 L$$

Έτσι από την

$$E \int_{\Pi} dA = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

παίρνουμε

$$2E\pi\rho L = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{\eta\pi\rho^2 L}{\varepsilon_0}$$

οπότε

$$E = \frac{\eta\rho}{2\varepsilon_0}$$

Πρόβλημα 3.9. Να βρεθεί με τη βοήθεια του νόμου του Gauss το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο ενός μονωτικού κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα μόνο επιφανειακά με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ (φορτίο/εμβαδό)

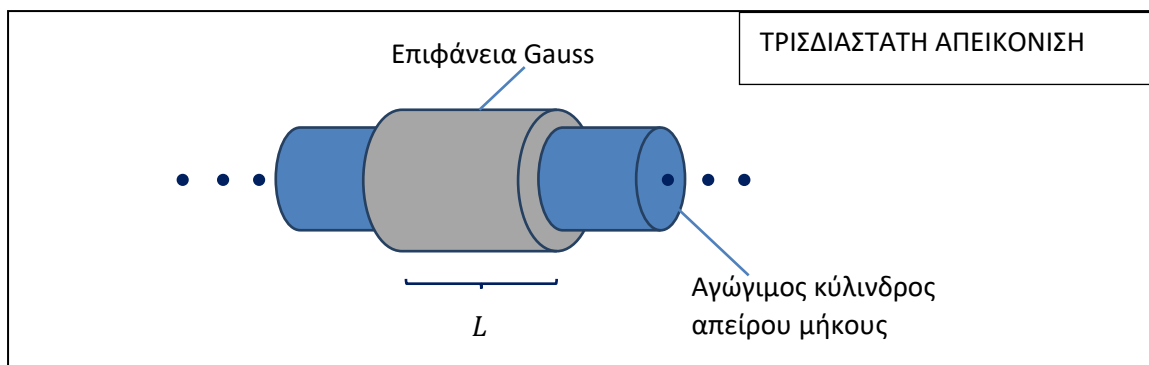
Απάντηση:

$$E = \begin{cases} 0 & \rho < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0\rho} & \rho \geq R \end{cases}$$

Λύση:

Εργαζόμαστε ακριβώς όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, επιλέγουμε για επιφάνεια Gauss ένα κλειστό κύλινδρο ακτίνας $\rho > R$ και μήκους L , ομοαξονικό με τον δεδομένο κύλινδρο. Καταλήγουμε έτσι στο αποτέλεσμα

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Το μόνο που αλλάζει στους υπολογισμούς μας είναι το περικλειόμενο φορτίο Q . Όταν η επιφάνεια Gauss είναι εκτός, τότε το αντίστοιχο περικλειόμενο εμβαδό A του αγωγού ισούται με

$$A = 2\pi RL$$

(βάση×ύψος). Δεδομένου ότι η πυκνότητα φορτίου σ είναι εξ' ορισμού ίση με φορτίο ανά εμβαδό, το περικλειόμενο φορτίο ισούται με $Q = \sigma A = \sigma 2\pi RL$ και έτσι

$$2E\pi\rho L = \frac{\sigma 2\pi RL}{\epsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 \rho}$$

Στο εσωτερικό του αγωγού, η αντιμετώπιση του προβλήματος είναι η ίδια ακριβώς, με τη διαφορά τώρα ότι η επιφάνεια Gauss περικλείει μηδενικό φορτίο $Q' = 0$ και έτσι παίρνουμε

$$2E\pi\rho L = \frac{Q'}{\epsilon_0} = 0$$

οπότε

$$E = 0$$

Είναι δηλαδή σαν να έχουμε την περίπτωση αγωγίμου κυλίνδρου.

Πρόβλημα 3.10. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο ενός αγωγίμου κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ίση με σ .

Απάντηση:

$$E = \begin{cases} 0 & \rho < R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0 \rho} & \rho \geq R \end{cases}$$

Λύση: Το πρόβλημα είναι ακριβώς όπως το προηγούμενο επειδή ο κύλινδρος είναι αγωγίμος και έτσι αναγκαστικά όλο το φορτίο του θα κατανεμηθεί στην επιφάνεια. Επομένως και η λύση είναι ταυτόσημη:

$$E = \begin{cases} 0 & \rho < R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0 \rho} & \rho \geq R \end{cases}$$

Πρόβλημα 3.11. Να αποδειχθεί η Εξ. 2.2 που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου Q , με τη χρήση του νόμου του Gauss.

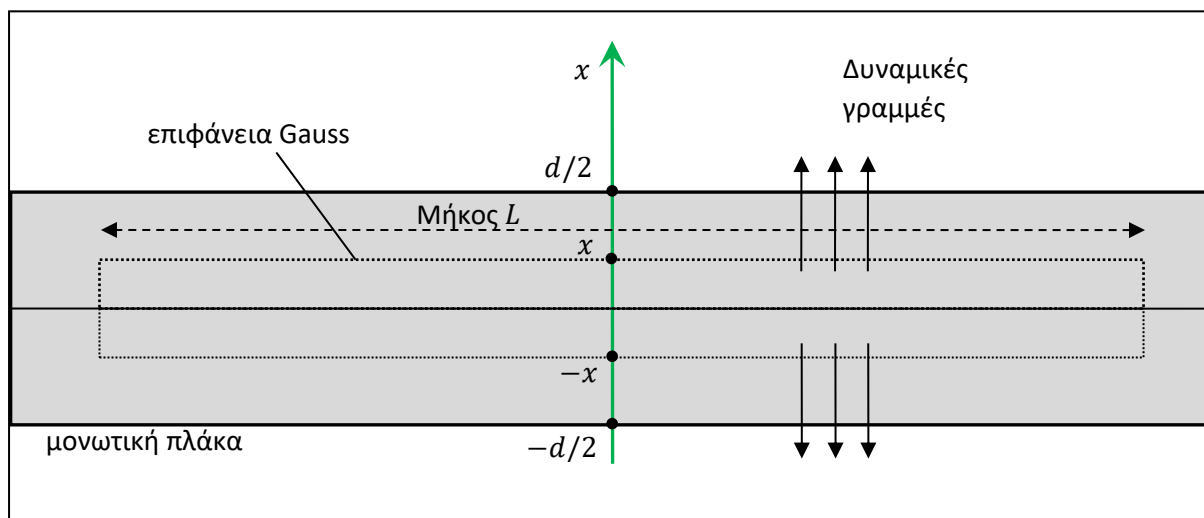
Πρόβλημα 3.12. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο ενός ομοαξονικού καλωδίου απείρου μήκους που αποτελείται από ένα εσωτερικό κυλινδρικό αγωγίμο πυρήνα ακτίνας R_1 και ομοιόμορφης επιφανειακής κατανομής φορτίου σ_1 και ενός κυλινδρικού αγωγίμου κελύφους ακτίνας R_2 και ομοιόμορφης επιφανειακής κατανομής φορτίου $-\sigma_2$ που περιβάλλει τον πυρήνα. Οι άξονες του πυρήνα και του κελύφους συμπίπτουν και οι σ_1 και σ_2 είναι τέτοιες ώστε το καλώδιο να έχει συνολικά μηδενικό φορτίο ανά μονάδα μήκους.

Πρόβλημα 3.13. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν ο εσωτερικός πυρήνας είναι μονωτής με ομοιόμορφη χωρική κατανομή φορτίου (ενώ το κέλυφος εξακολουθεί να φέρει επιφανειακή κατανομή φορτίου $-\sigma$), έτσι ώστε το καλώδιο ανά μονάδα μήκους να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο.

Πρόβλημα 3.14. Με τη βοήθεια του νόμου του Gauss, να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο μιας επίπεδης μονωτικής πλάκας απείρου επιφάνειας και πεπερασμένου πάχους d (μη λεπτή πλάκα) με ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου η . Πάρτε για ευκολία τον άξονα x κάθετα στην επιφάνεια της πλάκας, με το $x = 0$ στο κεντρικό επίπεδο της πλάκας (έτσι ώστε οι επιφάνειες της πλάκας να είναι στο $x = \pm d/2$) και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι υπάρχει συμμετρία ως προς $\pm x$. Επίσης υποθέστε ότι η κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών είναι παρόμοια με αυτή μιας λεπτής πλάκας με τον ίδιο προσανατολισμό.

Λύση:

α) Εσωτερικός χώρος. Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στο εσωτερικό της πλάκας, με τις δυο επιφάνειές του να έχουν σταθερή συντεταγμένη $\pm x$. Έστω ότι οι άλλες δυο διαστάσεις αυτής της επιφάνειας είναι μήκος L κατά μήκος της σελίδας και βάθος w κάθετα στη σελίδα.



Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Η επιφάνεια Gauss περικλείει όγκο $V = 2xLw$ και έτσι από την πυκνότητα φορτίου το περικλειόμενο φορτίο είναι ίσο με

$$Q = \eta V = 2\eta xLw$$

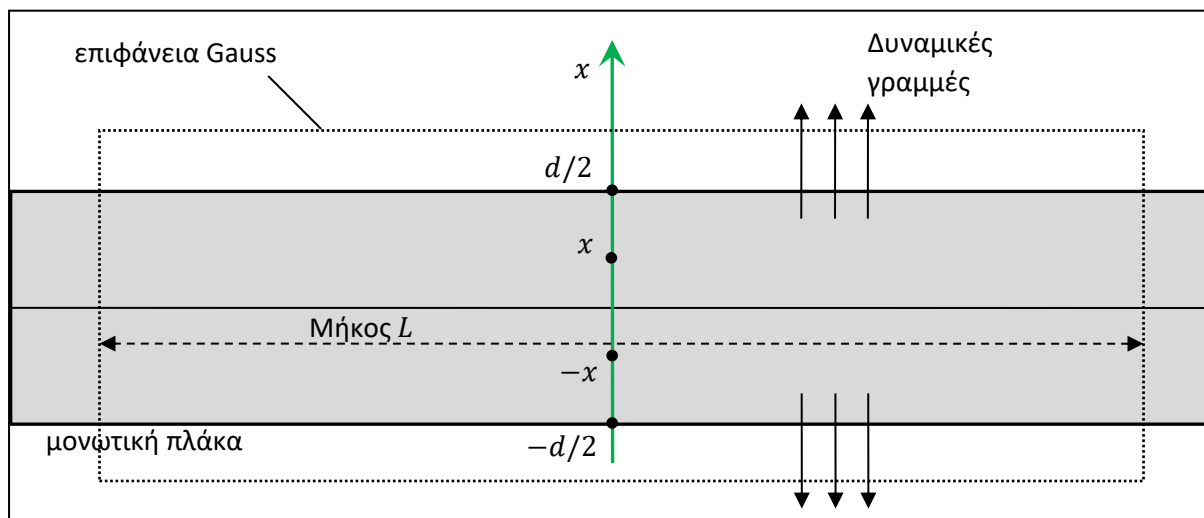
Από τα δεδομένα, οι δυναμικές γραμμές είναι κατά μήκος του άξονα x και έτσι στο παραπάνω ολοκλήρωμα συνεισφέρουν μόνο οι δυο επιφάνειες που είναι κάθετες στον άξονα x με εμβαδό $A = Lw$ η καθεμία. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο με το κάθετο της κάθε επιφάνειας και έτσι:

$$E(x)Lw + E(-x)Lw = \frac{2\eta xLw}{\epsilon_0}$$

Λόγω συμμετρίας περιμένουμε $E(x) = E(-x)$ οπότε

$$2E(x)Lw = \frac{2\eta xLw}{\epsilon_0} \Rightarrow E(x) = \frac{\eta}{\epsilon_0} x$$

β) Εξωτερικός χώρος. Δουλεύουμε ακριβώς όπως και στη προηγούμενη περίπτωση με τη μόνη διαφορά ότι τώρα η επιφάνεια Gauss περιβάλλει όλο το πάχος του αγωγού κατά τον άξονα x (δες παρακάτω σχήμα).



Έτσι που παρότι η επιφάνεια Gauss περικλείει όγκο $V = 2xLw$, ο όγκος του περικλειόμενου φορτίου είναι $V = dLw$ και έτσι από την πυκνότητα φορτίου το περικλειόμενο φορτίο είναι ίσο με

$$Q = \eta V = \eta dLw$$

Όπως και προηγουμένως, οι δυο επιφάνειες που συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα έχουν εμβαδό $A = Lw$ η καθεμία. Χρειάζεται όμως να είμαστε προσεκτικοί με τα πρόσημα επειδή το ηλεκτρικό πεδίο αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της πλάκας. Το κάθετο στη επιφάνεια Gauss έχει πάντοτε φορά προς τα έξω της κλειστής επιφάνειας αλλά και στο συγκεκριμένο πρόβλημα το $\vec{E}$ είναι προς τα έξω της επιφάνειας και έτσι το εσωτερικό γινόμενο στο εσωτερικό του ολοκληρώματος Gauss ισούται με:

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = |\vec{E}| |d\vec{A}| \cos 0 = |\vec{E}| |d\vec{A}|$$

Όμως παρότι που η επιφάνεια είναι πάντα θετική, το E είναι θετικό μόνο για $x > 0$ ενώ είναι αρνητικό για $x < 0$ αφού οι δυναμικές γραμμές αλλάζουν κατεύθυνση στις δυο μεριές της πλάκας. Έτσι πρέπει να διατηρήσουμε το μέτρο του E στο παραπάνω εσωτερικό γινόμενο που στη μια διάσταση γίνεται απόλυτος τιμή $|E|$ και να γράψουμε:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

δηλαδή

$$|E|_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} Lw + |E|_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega} Lw = \frac{\eta dLw}{\epsilon_0}$$

Λόγω συμμετρίας περιμένουμε $|E|_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} = |E|_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega}$ οπότε

$$2|E|Lw = \frac{\eta dLw}{\epsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{\eta d}{2\epsilon_0}$$

Εάν θέλουμε να ξεφορτωθούμε την απόλυτη τιμή πρέπει να γράψουμε

$$E = \pm \frac{\eta d}{2\epsilon_0}$$

για x θετικό και αρνητικό αντίστοιχα. Το πεδίο δηλαδή είναι παντού ομοιογενές στον εξωτερικό χώρο της πλάκας. Συνοψίζοντας

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\eta d}{2\varepsilon_0} & x > d/2 \\ \frac{\eta}{\varepsilon_0} x & |x| \leq d/2 \\ -\frac{\eta d}{2\varepsilon_0} & x < -d/2 \end{cases}$$

Πρόβλημα 3.15. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν η πλάκα είναι αγώγιμη με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ και στις δυο επιφάνειες.

4. ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Πρόβλημα 4.1.

Ένα θετικά φορτισμένο φύλλο βρίσκεται 40 mm επάνω από ένα αρνητικά φορτισμένο φύλλο (διάταξη πυκνωτή) και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ τους ισούται με $5 \times 10^5\text{ N/C}$. Βρείτε την δυναμική ενέργεια ενός φορτίου $+4\text{ }\mu\text{C}$ εάν αυτό τοποθετηθεί σε μια απόσταση α) 15 mm και β) 30 mm από το θετικό φύλλο. Πάρτε ως αναφορά του δυναμικού το αρνητικό φύλλο.

Λύση:

α) Δίνεται απόσταση από το θετικό φύλλο $h_1 = 15\text{ mm}$. Από την εκφώνηση, η δυναμική ενέργεια μετράει από το αρνητικό (-) φύλλο (δηλαδή η δυναμική ενέργεια εκεί είναι μηδέν κατά σύμβαση) και έτσι πρέπει να πάρουμε απόσταση

$$h = 40 - 15 = 25\text{ mm} = 0.025\text{ m}$$

Η δυναμική ενέργεια ισούται με:

$$U = q|E|h = 4 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^5 \times 2.5 \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-2} = 0.05\text{ J}$$

β) Ομοίως για την άλλη απόσταση από το θετικό φύλλο $h_2 = 30\text{ mm}$, η αντίστοιχη απόσταση από το αρνητικό φύλλο ισούται με

$$h = 40 - 30 = 10\text{ mm} = 0.010\text{ m}$$

Η δυναμική ενέργεια ισούται με:

$$U = q|E|h = 4 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-2} = 0.02\text{ J}$$

Πρόβλημα 4.2.

Στο προηγούμενο Πρόβλημα α) πόση δύναμη F_E ασκείται στο φορτίο όταν αυτό βρίσκεται στην αρχική του θέση; β) πόση δύναμη F πρέπει να του ασκηθεί για να το φέρουμε πολύ αργά από τη

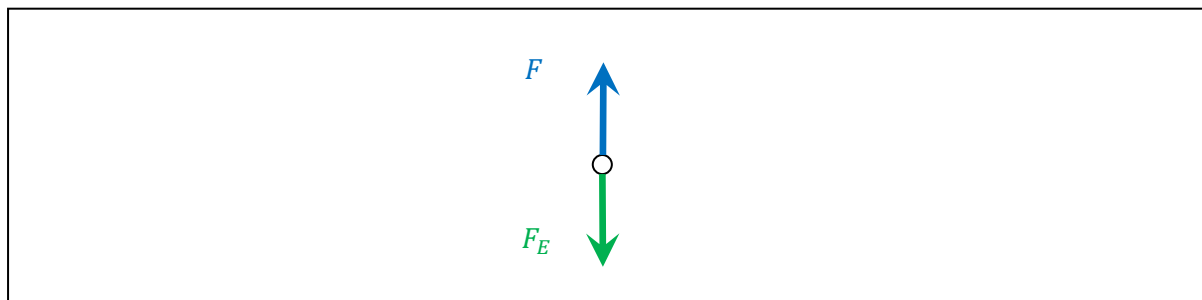
γείωση (αρνητικό φύλλο) στην αρχική του θέση; γ) Υπολογίστε το έργο στο προηγούμενο υποερώτημα χρησιμοποιώντας τον ορισμό του έργου από την Μηχανική και δ) Υπολογίστε το έργο από την Εξ. 4.2.

Λύση:

α) Από τον ορισμό της έντασης $E = F_E/q \Rightarrow F_E = qE = -4 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^5 = -2 \text{ N}$

Το μείον είναι επειδή η ένταση και η δύναμη είναι προς τα κάτω

β) Για να μετακινήσουμε το φορτίο πολύ αργά στο αρχικό του ύψος πρέπει να του ασκήσουμε μια δύναμη αντίθετη από αυτή του πεδίου $F = -F_E = 2 \text{ N}$ (δείτε το παρακάτω σχήμα):



γ) Από τη Μηχανική το έργο του πεδίου ισούται με $W_E = F_E x = -2 \times 0.025 = -0.05 \text{ J}$. Το έργο είναι αρνητικό επειδή κινούμαστε αντίθετα με το πεδίο

δ) Από την Εξ. 4.3 η αρχική και τελική δυναμική ενέργεια ισούνται με:

$$U_{\alpha\rho\chi} = 0$$

$$U_{\tau\epsilon\lambda} = q|E|h = 4 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^5 \times 0.025 = 0.05$$

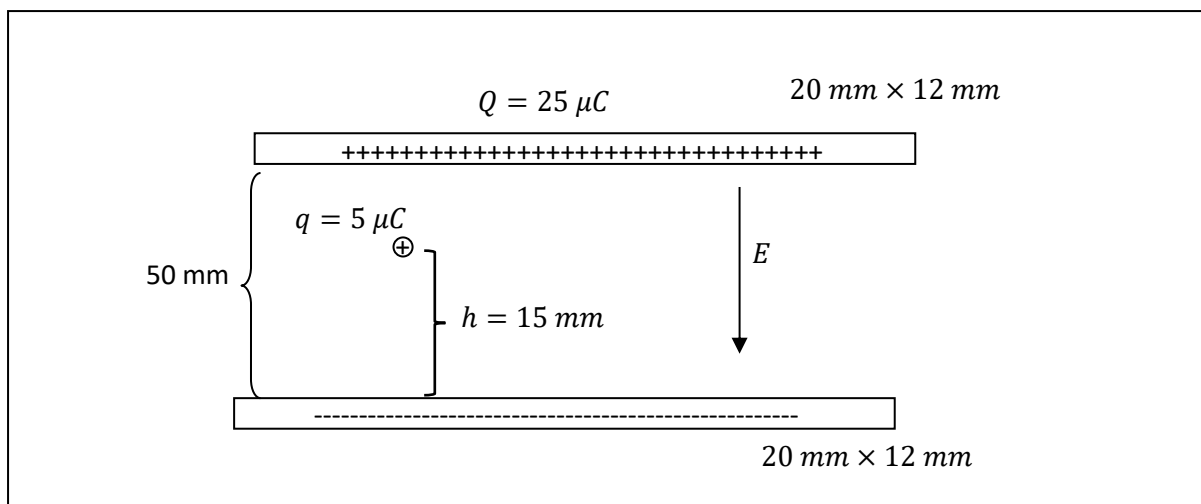
Από την Εξ. 4.2 το έργο του πεδίου ισούται με $W_E = -\Delta U = -(0.05 - 0) = -0.05 \text{ J}$

Βλέπουμε ότι οι δυο εκφράσεις συμφωνούν

Πρόβλημα 4.3.

Ένα θετικά φορτισμένο φύλλο με φορτίο $25 \mu\text{C}$ και διαστάσεις $20 \times 12 \text{ mm}^2$ βρίσκεται 50 mm επάνω από ένα άλλο όμοιο φύλλο με ίσο και αντίθετο φορτίο (διάταξη πυκνωτή). Βρείτε την δυναμική ενέργεια ενός σημειακού φορτίου $+5 \mu\text{C}$ εάν είναι τοποθετημένο 15 mm από το αρνητικό φύλλο

Λύση:



Πρώτα πρέπει να βρούμε το E . Από την Εξίσωση 3.7 του πυκνωτή

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

όπου

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$$

$$A = 0.012 \text{ m} \times 0.02 \text{ m} = 2.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Οπότε

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} = \frac{1}{8.85 \times 10^{-12}} \frac{25 \times 10^{-6}}{2.4 \times 10^{-4}} = 1.17 \times 10^{10} \text{ N/C}$$

Για θετικό σημειακό φορτίο, η απόσταση h μετριέται από το αρνητικό (-) φύλλο (κατά σύμβαση δεχόμαστε $U = 0$ εκεί) και έτσι

$$h = 15 \text{ mm} = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$U = qEh = 5 \times 10^{-6} \times 1.17 \times 10^{10} \times 1.5 \times 10^{-2} = 877 \text{ J}$$

Πρόβλημα 4.4.

Σε ποια απόσταση από ένα φορτίο $-7 \mu\text{C}$ ένα άλλο μικρότερο φορτίο -3 nC θα έχει δυναμική ενέργεια 60 mJ ; Ποια θα είναι η αρχική δύναμη που θα ασκηθεί στο φορτίο των -3 nC ;

Λύση:

$$U = k \frac{Qq}{r} \Rightarrow r = k \frac{Qq}{U} = 9 \times 10^9 \frac{(-7 \times 10^{-6}) \times (-3 \times 10^{-9})}{60 \times 10^{-3}} = 3.15 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.15 \text{ mm}$$

Για την δύναμη από τον νόμο του Coulomb's:

$$F = k \frac{|Q||q|}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{7 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-9}}{(3.15 \times 10^{-3})^2} = 19.0 \text{ N}$$

Πρόβλημα 4.5.

Ένα φορτίο $+6 \mu\text{C}$ βρίσκεται 30 mm από ένα άλλο φορτίο $16 \mu\text{C}$. Ποια είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος;

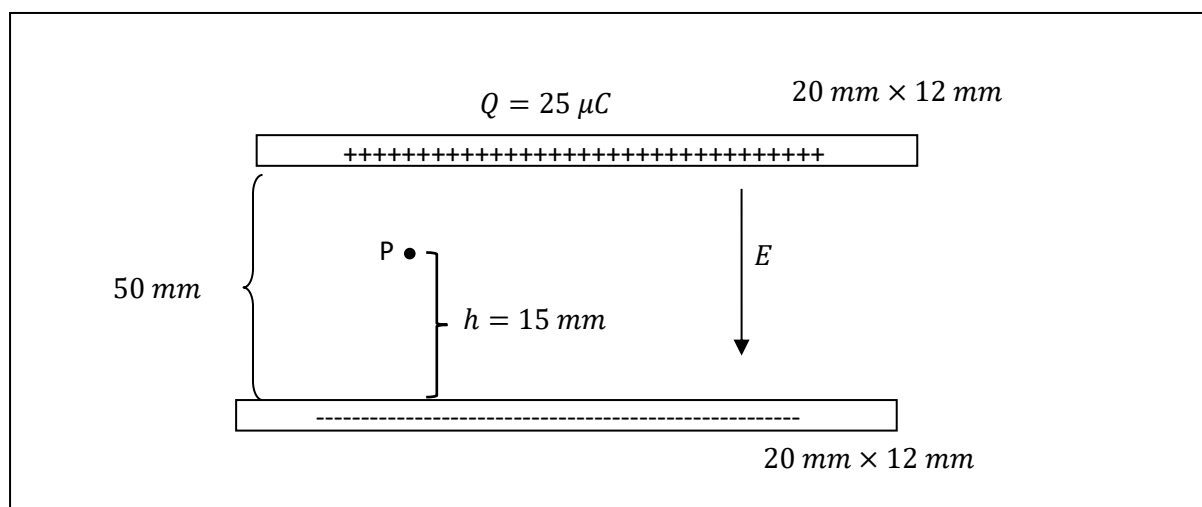
Λύση:

$$U = k \frac{Qq}{r} = 9 \times 10^9 \frac{16 \times 10^{-6} \times 6 \times 10^{-6}}{30 \times 10^{-3}} = 28.8 \text{ J}$$

Πρόβλημα 4.6.

Οι οπλισμοί ενός πυκνωτή έχουν φορτίο $\pm 25 \mu\text{C}$ και διαστάσεις $20 \times 12 \text{ mm}^2$ και βρίσκονται σε απόσταση 50 mm μεταξύ τους. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε σημείο P που απέχει απόσταση ίση με α) 15 mm και β) 20 mm από τον αρνητικό οπλισμό.

Λύση:



Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε το E . Χρησιμοποιούμε τον τύπο για τα παράλληλα φύλλα (όπως και σε προηγούμενο Πρόβλημα):

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

όπου

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$$

$$A = 0.012 \text{ m} \times 0.02 \text{ m} = 2.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Οπότε

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} = \frac{1}{8.85 \times 10^{-12}} \frac{25 \times 10^{-6}}{2.4 \times 10^{-4}} = 1.18 \times 10^{10} \text{ N/C}$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό. Εάν τοποθετούσαμε ένα σημειακό δοκιμαστικό φορτίο q στο σημείο P τότε η δυναμική του ενέργεια από την Εξ. 4.3 θα ήταν ίση με:

$$U = q|E|h$$

Όμως από την Εξ. 4.8

$$V = \frac{U}{q} = |E|h$$

α) Για $h = 15 \text{ mm} = 0.015 \text{ m}$

$$V = Eh = 1.18 \times 10^{10} \times 0.015 = 1.77 \times 10^8 \text{ Volts}$$

β) Για $h = 20 \text{ mm} = 0.020 \text{ m}$

$$V = Eh = 1.18 \times 10^{10} \times 0.020 = 2.36 \times 10^8 \text{ Volts}$$

Πρόβλημα 4.7.

Στο προηγούμενο πρόβλημα, πόση είναι η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου $+4 \mu\text{C}$ εάν τοποθετηθεί στις δυο θέσεις (α) και (β) παραπάνω;

Λύση:

Από τον ορισμό του δυναμικού Εξ. 4.8, λύνουμε ως προς U

Περίπτωση α)

$$V = \frac{U}{q} \Rightarrow U = qV = 4 \times 10^{-6} \times 1.77 \times 10^8 = 708 \text{ J}$$

Περίπτωση β)

$$V = \frac{U}{q} \Rightarrow U = qV = 4 \times 10^{-6} \times 2.36 \times 10^8 = 944 \text{ J}$$

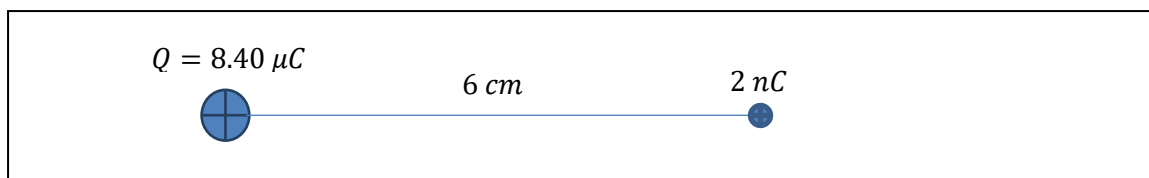
Πρόβλημα 4.8.

Ποιο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο A που βρίσκεται 6 cm από ένα φορτίο $8.40 \mu\text{C}$; Ποια είναι η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου 2 nC που έχει τοποθετηθεί σε αυτό το σημείο;

Λύση: Για σημειακό φορτίο το δυναμικό δίνεται από την σχέση:

$$V = k \frac{Q}{r} = 9 \times 10^9 \frac{8.4 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-2}} = 1.26 \times 10^6 \text{ Volts}$$

Τώρα φέρνουμε το δεύτερο φορτίο των 2 nC στο σημείο A.



Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δυο φορτίων μπορεί να υπολογιστεί από τον ορισμό του δυναμικού $V = U/q$ οπότε

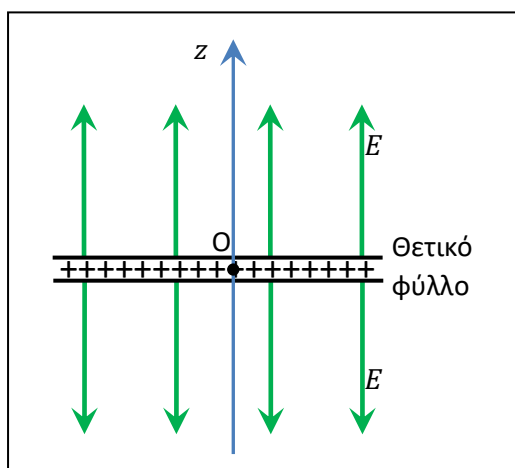
$$U = qV = 2 \times 10^{-9} \times 1.26 \times 10^6 = 2.52 \times 10^{-3} \text{ Joules}$$

Πρόβλημα 4.9.

Να βρεθεί το δυναμικό $V(z)$ παντού στο χώρο ενός θετικά φορτισμένου φύλλου απείρων διαστάσεων με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Πάρτε τον άξονα z κάθετα στο φύλλο και θεωρήστε ότι το φύλλο έχει δυναμικό μηδέν.

Λύση:

Έστω ένα φορτισμένο φύλλο όπως στο παρακάτω σχήμα το οποίο βρίσκεται κάθετα στον άξονα z



Όπως είχαμε δει στο Κεφ. 2, το ηλεκτρικό πεδίο ενός φύλλου όπως αυτό που φαίνεται, δίνεται από την Εξ. 2.10 ως εξής:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z, & z < 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z, & z > 0 \end{cases}$$

Δηλαδή το πεδίο είναι σταθερό κατά μέτρο αλλά αλλάζει φορά εκατέρωθεν του φύλλου. Για να βρούμε τη συνάρτηση δυναμικού θα χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 4.9 με το x να αντικαθίσταται από το z , δηλαδή:

$$V(z) = - \int E(z) dz$$

Για το χώρο πάνω από το φύλλο όπου $z > 0$ έχουμε $E = \sigma/2\epsilon_0$ και έτσι

$$V(z) = - \int \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + c_1$$

Για το χώρο πάνω από το φύλλο όπου $z < 0$ έχουμε $E = -\sigma/2\varepsilon_0$ και έτσι

$$V(z) = -\int -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dz = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + c_2$$

Μια βολική τιμή του δυναμικού είναι να επιλέξουμε $V = 0$ επάνω στο φύλλο. Τότε αυτομάτως οι δυο σταθερές c_1 και c_2 μηδενίζονται και καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα

$$V(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z, & z < 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z, & z > 0 \end{cases}$$

ή

$$V(z) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} |z|$$

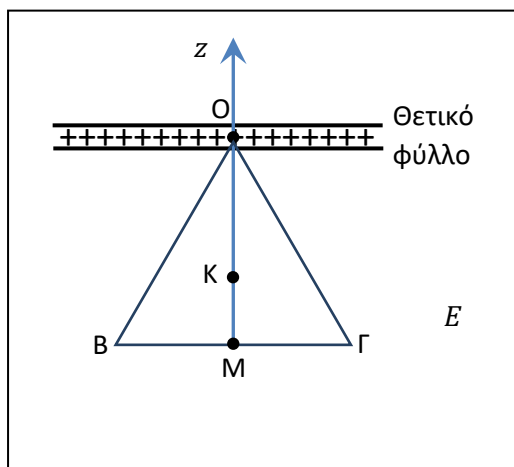
Πρόβλημα 4.10.

Έστω ότι στο προηγούμενο πρόβλημα, ένα ιδεατό ισόπλευρο τρίγωνο ΟΒΓ πλευράς $a = \sqrt{3} \text{ m}$ "αιωρείται" από το φορτισμένο φύλλο έχοντας το επίπεδό του κάθετο στο επίπεδο του φύλλου, με την μια κορυφή του Ο να βρίσκεται στο επίπεδο του φύλλου στην αρχή των συντεταγμένων και τον άξονα z να τη διχοτομεί, ενώ οι δυο άλλες κορυφές Β και Γ να βρίσκονται κάτω από το φύλλο και συμμετρικά ως προς τον άξονα z . Ένα θετικό φορτίο $3 \mu\text{C}$ αναγκάζεται από κάποιες εξωτερικές δυνάμεις να κινηθεί από το κέντρο συμμετρίας Κ του τριγώνου έως και το σημείο Β. Να βρεθεί η διαφορά της δυναμικής ενέργειας του φορτίου μεταξύ των σημείων Κ και Β εάν η επιφανειακή πυκνότητα του φύλλου είναι ίση με 8.85 nC/m^2 .

Λύση:

Το ισόπλευρο τρίγωνο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, το ύψος ΜΟ που είναι και ταυτόχρονα η διαγώνιος της κορυφής Ο, έχει μήκος ίσο με

$$h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \sqrt{3/4} a = \sqrt{3/4} \sqrt{3} = 3/2 \text{ m}$$



Ως γνωστόν, το κέντρο συμμετρίας ενός ισόπλευρου τριγώνου βρίσκεται σε απόσταση $2/3$ της διαγωνίου από την κορυφή που η διαγώνιος αυτή διχοτομεί. Έτσι στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Κ έχει συντεταγμένη $z_K = -2/3 h$. Αντιθέτως τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένη $z_B = -h$. Επομένως η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο σημείων, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του προηγούμενου προβλήματος είναι ίση με

$$V_B - V_K = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0} \left(-1 + \frac{2}{3} \right) = -\frac{\sigma h}{6\varepsilon_0}$$

Δηλαδή

$$V_B - V_K = -\frac{8.85 \times 10^{-9}}{6 \times 8.85 \times 10^{-12}} \times \frac{3}{2} = -250 \text{ V}$$

Τελικά η ζητούμενη διαφορά δυναμικής ενέργειας είναι σύμφωνα με την Εξ. 4.8 ίση με

$$U_B - U_K = q(V_B - V_K) = -3 \times 10^{-6} \times 250 = -0.75 \text{ mJ}$$

Πρόβλημα 4.11.

Να βρεθεί α) το ηλεκτρικό πεδίο $E(x)$ στη μια διάσταση παντού στον άξονα x που παράγεται εξαιτίας δυο ίσων και αντίθετων σημειακών φορτίων $\pm q$ που βρίσκονται στις θέσεις $x = \pm a$ αντίστοιχα β) το αντίστοιχο δυναμικό $V(x)$ χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του πρώτου υποερωτήματος.

Πρόβλημα 4.12. Να βρεθεί το δυναμικό σε τυχαίο σημείο στο εσωτερικό της πλάκας του Προβλήματος 3.14 και από αυτό να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες.

Λύση:

Εάν λύσουμε αυτό το πρόβλημα θα δούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την έκφραση

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\eta d}{2\varepsilon_0} & x > d/2 \\ \frac{\eta}{\varepsilon_0} x & |x| \leq d/2 \\ -\frac{\eta d}{2\varepsilon_0} & x < -d/2 \end{cases}$$

δηλαδή στο εσωτερικό της πλάκας είναι μια γραμμική συνάρτηση του x ενώ στο εξωτερικό της είναι σταθερό και ομοιογενές. Το δυναμικό μπορούμε να το βρούμε με ολοκλήρωση από τη σχέση:

$$E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V = -\int E dx + c$$

Ξεχωρίσουμε όλες τις περιπτώσεις. Στο εσωτερικό έχουμε

$$V = -\frac{\eta}{\varepsilon_0} \int x dx + c = -\frac{\eta}{2\varepsilon_0} x^2 + c$$

Η σταθερά c είναι η τιμή του δυναμικού στο $x = 0$ που μπορούμε αυθαίρετα να τη λάβουμε ως μηδέν. Στο εξωτερικό χώρο για $x > d/2$

$$V = -\frac{\eta d}{2\varepsilon_0} \int dx + c' = -\frac{\eta d}{2\varepsilon_0} x + c'$$

Ομοίως για $x < -d/2$

$$V = \frac{\eta d}{2\varepsilon_0} \int dx + c' = \frac{\eta d}{2\varepsilon_0} x + c''$$

Αφού επιλέξαμε στο εσωτερικό της πλάκας το σημείο αναφοράς του δυναμικού ως $V(0) = 0$, τώρα δεν μπορούμε να επιλέξουμε άλλη τιμή για το δυναμικό στον εξωτερικό χώρο για να καθορίσουμε τις σταθερές c' και c'' . Αντ' αυτού θα επιβάλλουμε στο δυναμικό να είναι συνεχές επάνω στην διεπιφάνεια που συναντιούνται οι δυο χώροι, δηλαδή στο $x = \pm d/2$. Εξισώνοντας τις δυο εκφράσεις:

$$V(d/2) = V(d/2) \Rightarrow -\frac{\eta}{2\varepsilon_0} \left(\frac{d}{2}\right)^2 = -\frac{\eta d}{2\varepsilon_0} \left(\frac{d}{2}\right) + c'$$

δηλαδή

$$c' = \frac{\eta d^2}{8\varepsilon_0}$$

Παρομοίως

$$V(-d/2) = V(-d/2) \Rightarrow -\frac{\eta}{2\varepsilon_0} \left(-\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\eta d}{2\varepsilon_0} \left(-\frac{d}{2}\right) + c''$$

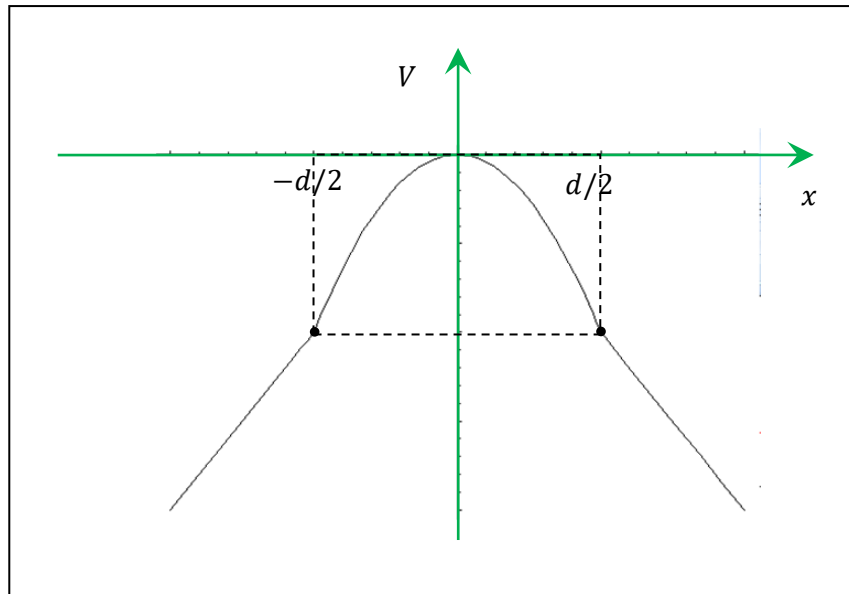
δηλαδή

$$c'' = \frac{\eta d^2}{8\varepsilon_0}$$

Έτσι

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\eta d}{2\varepsilon_0} (x - d/4) & x > d/2 \\ -\frac{\eta}{2\varepsilon_0} x^2 & |x| \leq d/2 \\ \frac{\eta d}{2\varepsilon_0} (x + d/4) & x < -d/2 \end{cases}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του δυναμικού



5. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ στις ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Πρόβλημα 5.1. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο χώρο που δημιουργεί μια φορτισμένη συμπαγής σφαίρα ακτίνας R με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q παντού στον όγκο της ξεκινώντας από την Εξ. 3.5.

Πρόβλημα 5.2. Να γίνει το ίδιο εάν η σφαίρα του προηγούμενου προβλήματος είναι κοίλη.

Πρόβλημα 5.3. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στον χώρο ενός αγωγίμου κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ (να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα του Προβλήματος 3.9.)

Πρόβλημα 5.4.

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού παντού στον εσωτερικό χώρο ενός μονωτικού κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου (φορτίο/όγκος) ίση με η (να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα του Προβλήματος 3.8).

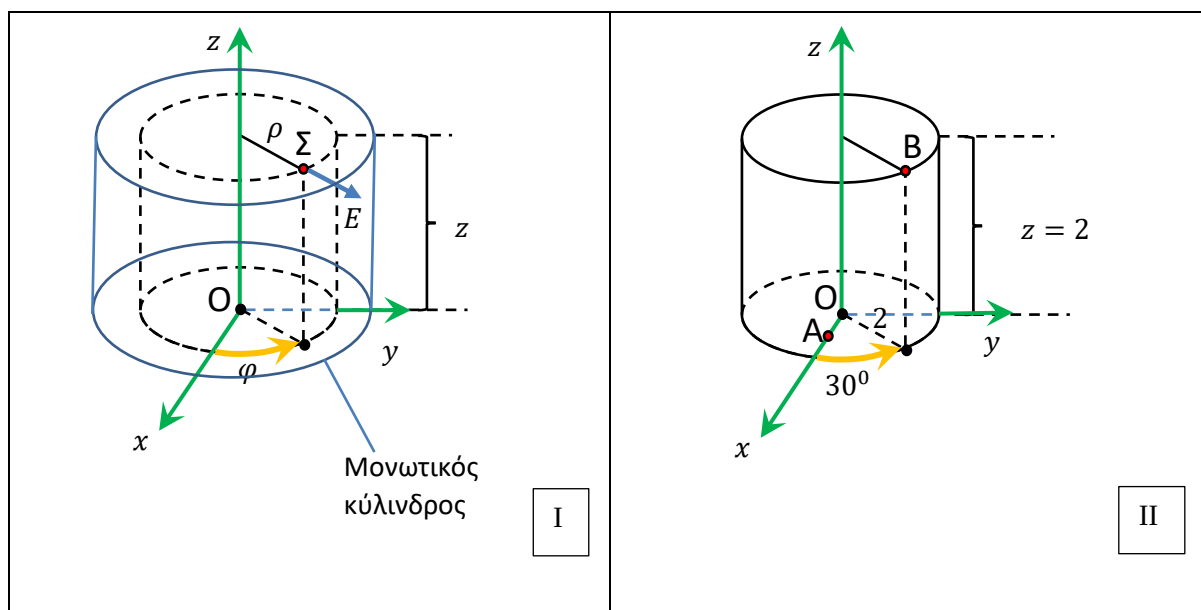
(β) Εάν ο άξονας του κυλίνδρου ταυτίζεται με τον άξονα z και η ακτίνα του κυλίνδρου είναι ίση με $R = 3\text{ m}$, να βρεθεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β με κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z) ίσες με $(1, 0^\circ, 0)$ και $(2, 30^\circ, 2)$ αντίστοιχα, όπου οι αποστάσεις είναι σε μέτρα και οι γωνίες σε μοίρες.

Λύση:

(α) Η λύση του Προβλήματος 3.9 οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$E = \frac{\eta \rho^2 L}{2\pi \epsilon_0 L \rho} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \rho$$

που είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στον εσωτερικό χώρο ενός κυλίνδρου απείρου μήκους φορτισμένου ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου η , σε απόσταση ρ από τον άξονά του. Η φορά του πεδίου αυτού είναι κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου με κατεύθυνση προς το άπειρο. Εάν τοποθετήσουμε τον άξονα z κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου, όπως στο παρακάτω σχήμα Ι στα αριστερά, τότε αυτομάτως η απόσταση ρ ενός τυχαίου σημείου Σ από τον άξονα του κυλίνδρου είναι ίση με την πολική ακτίνα, δηλαδή μια από τις κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι άλλες δυο είναι η γωνία φ όπως φαίνεται στο σχήμα και το ύψος z του σημείου Σ από το επίπεδο x - y . Η φορά του E είναι κατά μήκος του ρ προς τα έξω.



Με άλλα λόγια η φορά του E είναι η φορά του μοναδιαίου $\vec{e}_\rho$ που σημαίνει ότι υπάρχει μόνο μια συνιστώσα, η E_ρ η οποία είναι ίση με την παραπάνω έκφραση. Από την Εξ. 4.7α έχουμε

$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{\eta}{2\epsilon_0}\rho$$

Ολοκληρώνοντας

$$V(\rho, \varphi, z) = -\frac{\eta}{4\epsilon_0}\rho^2 + c(\varphi, z)$$

Εν γένει το δυναμικό θα είναι συνάρτηση και των τριών μεταβλητών για αυτό και γράψαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης με αυτό τον τρόπο. Όμως αφού οι άλλες δυο συνιστώσες είναι μηδενικές, τότε από τις Εξ. 4.7β και 4.7γ έχουμε $\partial V/\partial \varphi = 0$ και $\partial V/\partial z = 0$ και άρα η c είναι μια απόλυτη σταθερά.

Τα σημεία A και B έχουν αντίστοιχα $\rho_A = 1$ και $\rho_B = 2$ επομένως η διαφορά δυναμικού ισούται με

$$V_B - V_A = -\frac{\eta}{4\epsilon_0}(\rho_B^2 - \rho_A^2) = -\frac{5 \times 10^{-6}}{4 \times 8.85 \times 10^{-12}}(2^2 - 1^2) = 1.41 \times 10^5 \text{ V}$$

Πρόβλημα 5.5. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στον χώρο ενός ομοαξονικού καλωδίου απείρου μήκους που αποτελείται από ένα εσωτερικό κυλινδρικό αγωγίμο πυρήνα ακτίνας R_1 και ομοιόμορφης επιφανειακής κατανομής φορτίου σ_1 και ενός κυλινδρικού αγωγίμου κελύφους ακτίνας R_2 και ομοιόμορφης επιφανειακής κατανομής φορτίου $-\sigma_2$ που περιβάλλει τον πυρήνα. Οι άξονες του πυρήνα και του κελύφους συμπίπτουν και οι σ_1 και σ_2 είναι τέτοιες ώστε το καλώδιο να έχει συνολικά μηδενικό φορτίο ανά μονάδα μήκους (να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα του Προβλήματος 3.11).

Πρόβλημα 5.6. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν ο εσωτερικός πυρήνας είναι μονωτής με ομοιόμορφη χωρική κατανομή φορτίου (ενώ το κέλυφος εξακολουθεί να φέρει επιφανειακή κατανομή φορτίου $-\sigma$), έτσι ώστε το καλώδιο ανά μονάδα μήκους να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο.

Πρόβλημα 5.7. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στον χώρο μιας επίπεδης μονωτικής πλάκας απείρου επιφάνειας και πεπερασμένου πάχους d με ομοιόμορφα χωρική πυκνότητα φορτίου η . Πάρτε για ευκολία τον άξονα x κάθετα στην επιφάνεια της πλάκας, με το $x = 0$ στο κεντρικό επίπεδο της πλάκας (έτσι ώστε οι επιφάνειες της πλάκας να είναι στο $x = \pm d/2$). Να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα του Προβλήματος 3.14.

Πρόβλημα 5.8. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν η πλάκα είναι αγωγίμη με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ και στις δυο επιφάνειες. Να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα του Προβλήματος 3.15.

Πρόβλημα 5.9. Να υπολογισθούν οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου του διπόλου του Παραδείγματος 5.8 σε σφαιρικές συντεταγμένες χωρίς να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση $r \gg a$. Αφού βρεθούν οι συνιστώσες, να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω προσέγγιση για ναδειχθεί ότι καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα με αυτές του Παραδείγματος 5.8.

Πρόβλημα 5.10. Να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες παντού στο χώρο μιας φορτισμένης γραμμής απείρου μήκους κατά τον άξονα z με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ .

Πρόβλημα 5.11. Να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες παντού στο χώρο του δυναμικού που βρήκατε στο Πρόβλημα 5.2 παραπάνω.

Πρόβλημα 5.12. Να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες παντού στο χώρο του δυναμικού που βρήκατε στο Πρόβλημα 5.3 παραπάνω.

Πρόβλημα 5.13. Δυο ετερόσημα σημειακά φορτία $q_1 = -\sqrt{\lambda}q$ και $q_2 = q/\sqrt{\lambda}$ όπου $q > 0$ μια σταθερά σε μονάδες *Coulomb* και $\lambda > 1$ ένας καθαρός αριθμός, βρίσκονται στον άξονα- x στις θέσεις $x = -a$ και $x = b$ αντίστοιχα. (α) Να βρεθεί η μαθηματική έκφραση των ισοδυναμικών επιφανειών στο χώρο (σε μορφή εξίσωσης). (β) Η παραπάνω εξίσωση στο επίπεδο $x - y$ γίνεται μια καμπύλη. Να σχεδιαστεί αυτή η καμπύλη για δυναμικό 0 Volts για την περίπτωση $a = 3 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$ και $\lambda = 2$ (σε μορφή γραφικής παράστασης)

Λύση:

(α) Το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου q_1 σε απόσταση r_1 από αυτό, δίνεται από την

$$V = \frac{kq_1}{r_1}$$

Εδώ έχουμε δυο φορτία οπότε

$$V = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}$$

Σε τυχαίο σημείο (x, y, z) στο χώρο, η απόσταση από το αρνητικό φορτίο που βρίσκεται στο $x = -a$ δίνεται από την

$$r = \sqrt{(x + a)^2 + y^2 + z^2}$$

Ομοίως η απόσταση από το θετικό φορτίο που βρίσκεται στο $x = b$ δίνεται από την

$$r = \sqrt{(x - b)^2 + y^2 + z^2}$$

Τις ισοδυναμικές τις βρίσκουμε θέτοντας $V = \text{σταθ}$. Από τα παραπάνω έχουμε

$$V = -\frac{kq\lambda^{1/2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{kq\lambda^{-1/2}}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} = \text{σταθ}$$

(β) Στο επίπεδο x - y έχουμε $z = 0$ οπότε η παραπάνω έκφραση γίνεται

$$V = -\frac{kq\lambda^{1/2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{kq\lambda^{-1/2}}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}} = \text{σταθ}$$

Για $V = 0$ έχουμε

$$\frac{\lambda^{1/2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} = \frac{\lambda^{-1/2}}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{(x+a)^2 + y^2} &= \frac{\lambda^{-1}}{(x-b)^2 + y^2} \\ \lambda^2(x-b)^2 + \lambda^2 y^2 &= (x+a)^2 + y^2 \\ (\lambda^2 - 1)y^2 &= (x+a)^2 - \lambda^2(x-b)^2\end{aligned}$$

Θέτουμε $\mu^2 = 1/(\lambda^2 - 1)$ και έχουμε

$$y = \pm \mu \sqrt{(x+a)^2 - \lambda^2(x-b)^2}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(x+3)^2 - 2^2(x-1)^2}$$

Για να τη σχεδιάσουμε, θα πάρουμε πρώτα το θετικό κλάδο και θα βρούμε τις ρίζες της, την τετμημένη της επί της αρχής, το μέγιστό της και το πεδίο ορισμού της. Αφού τη σχεδιάσουμε, θα σχεδιάσουμε και τον αρνητικό κλάδο απλά ανεστραμμένο σε σχέση με τον θετικό κλάδο. Έτσι έχουμε

Ρίζες

$$(x+3)^2 - 2^2(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x+3 = \pm 2(x-1)$$

$$x_1 = -1/3 \text{ και } x_2 = 5$$

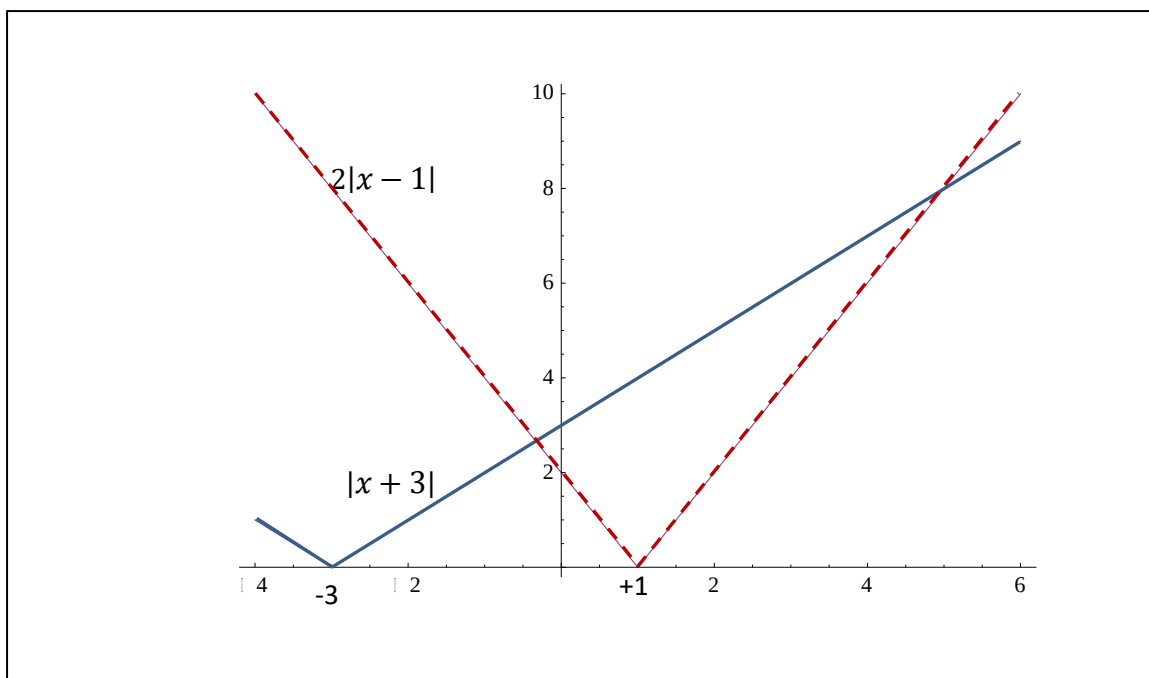
Ο θετικός κλάδος τέμνει τον άξονα στο $x = 0$ με τετμημένη επί της αρχής

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3^2 - 2^2 \cdot 1^2} = \sqrt{5/3} = 1.29$$

Πεδίο ορισμού, πρέπει η υπόριζος ποσότητα να είναι αρνητική

$$(x+3)^2 - 2^2(x-1)^2 > 0 \Rightarrow (x+3)^2 > 2^2(x-1)^2 \Rightarrow |x+3| > 2|x-1|$$

Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $|x+3|$ και $2|x-1|$ (η δεύτερη με διακεκομμένη γραμμή). Αυτές οι δυο τέμνονται επάνω στις δυο ρίζες $x_1 = -1/3$ και $x_2 = 5$ που είδαμε παραπάνω. Βλέπουμε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει μόνο στην περιοχή μεταξύ των ριζών (εκτός αυτών δεν ορίζεται η ρίζα). Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $x_1 < x < x_2$



Μέγιστο, παραγωγίζω την υπόριζο ποσότητα και την θέτω ίση με μηδέν

$$\frac{d}{dx} [(x + 3)^2 - 2^2(x - 1)^2] = 0 \Rightarrow 2(x + 3) - 8(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 7/3$$

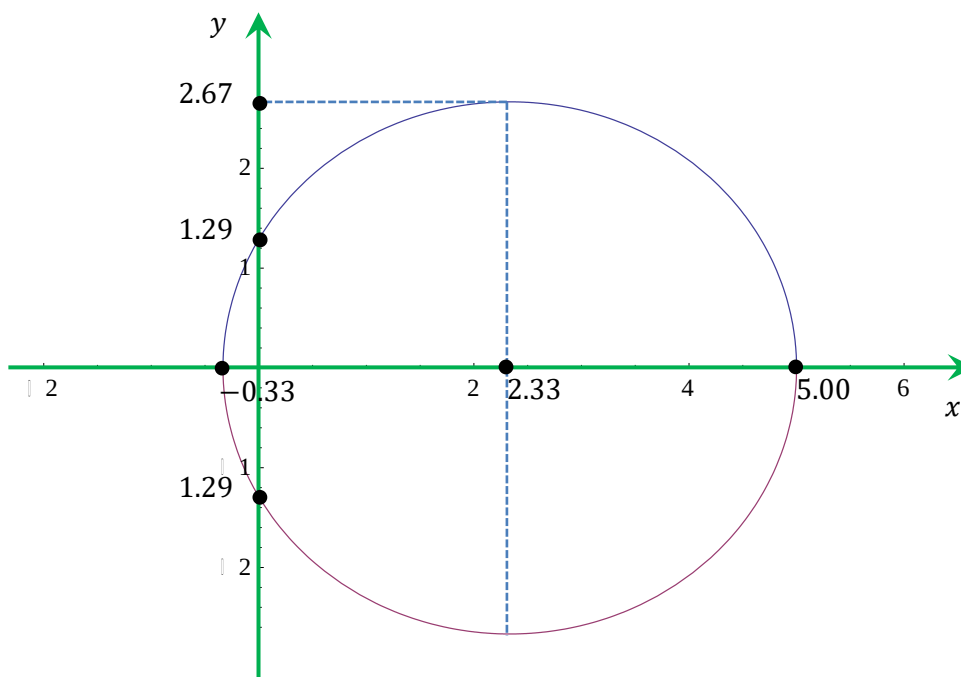
Εκεί ο θετικός κλάδος λαμβάνει τιμή

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(7/3 + 3)^2 - 2^2(7/3 - 1)^2} = \frac{8}{3} = 2.67$$

Συμπεριλαμβάνοντας θετικό και αρνητικό κλάδο

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(x + 3)^2 - 2^2(x - 1)^2}$$

η γραφική παράσταση είναι η παρακάτω. Φαίνεται σαν να είναι κύκλος αλλά είναι ο συνδυασμός δυο υπερβολών, μια για θετικά y και μια για αρνητικά.



Πρόβλημα 5.14. Η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού ενός συστήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από την έκφραση

$$V(r, \theta, \varphi) = -E_A R \cos \theta \left[\frac{r}{R} + A \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]$$

όπου τα A , E_A και R είναι σταθερές με το A να είναι καθαρός αριθμός, το E_A να έχει μονάδες ηλεκτρικού πεδίου και το R να έχει μονάδες μήκους. Να βρεθούν

(α) Η τιμή του A εάν επιβάλουμε στο δυναμικό να είναι μηδέν επάνω στην επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση $r = R$ (σφαίρα)

(β) Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες

(γ) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στον άξονα z και σε απόσταση $2R$ από την αρχή των συντεταγμένων.

(δ) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στο επίπεδο x - y και σε απόσταση $R/2$ από την αρχή των συντεταγμένων.

Λύση:

(α) Αφού $V = 0$ επάνω στην επιφάνεια $r = R$ (σφαίρα ακτίνας R), τότε έχουμε

$$0 = -E_A R \cos \theta \left[\frac{R}{R} + A \left(\frac{R}{R} \right)^2 \right]$$

που ικανοποιείται για $A = 1$.

(β) Από τις Εξισώσεις 5.10

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_A R \cos \theta \left[\frac{1}{R} - 2A \frac{R^2}{r^3} \right] = E_A R \cos \theta \left[\frac{1}{R} - 2 \frac{R^2}{r^3} \right]$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -E_A R \sin \theta \left[\frac{1}{R} + A \frac{R^2}{r^3} \right] = -E_A R \sin \theta \left[\frac{1}{R} + \frac{R^2}{r^3} \right]$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

(γ) Επάνω στον άξονα z ισχύει $\theta = 0$ οπότε η θ -συνιστώσα E_θ μηδενίζεται ενώ η r -συνιστώσα γίνεται

$$E_r = E_A R \left[\frac{1}{R} - 2 \frac{R^2}{8R^3} \right] = \frac{3}{4} E_A$$

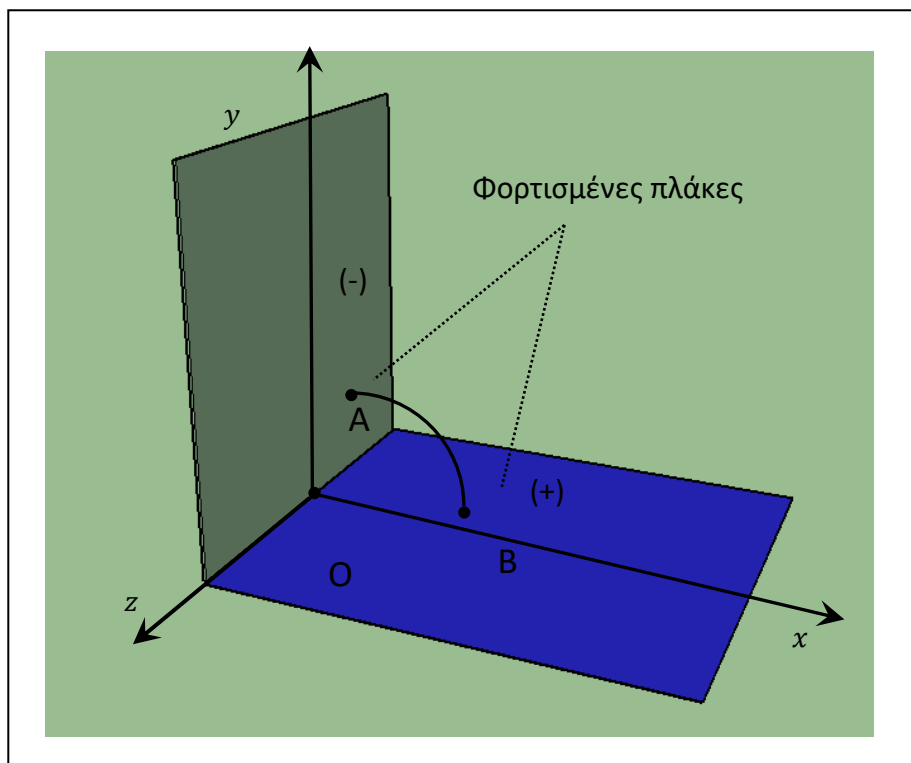
Αφού αυτή είναι και η μοναδική συνιστώσα του πεδίου, τότε ταυτίζεται και με το μέτρο του πεδίου.

(δ) Επάνω στον άξονα z ισχύει $\theta = \pi/2$ οπότε η r -συνιστώσα E_r μηδενίζεται ενώ η θ -συνιστώσα γίνεται

$$E_\theta = -E_A R \left[\frac{1}{R} - \frac{8R^2}{R^3} \right] = 7E_A$$

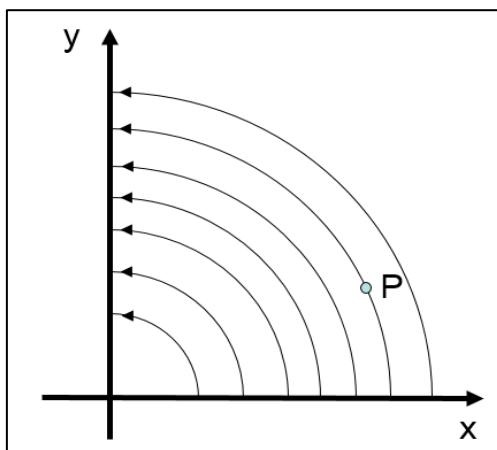
Αφού αυτή είναι και η μοναδική συνιστώσα του πεδίου, τότε ταυτίζεται και με το μέτρο του πεδίου.

Πρόβλημα 5.15. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δυο ομοιόμορφα φορτισμένες αγώνιμες πλάκες απείρων διαστάσεων και αμελητέου πάχους που βρίσκονται κάθετα μεταξύ τους, η θετική στο επίπεδο $x - z$ και η αρνητική στο επίπεδο $y - z$ (εξυπακούεται ότι οι δυο πλάκες δεν έρχονται σε επαφή μεταξύ τους στον άξονα z , δηλαδή υπάρχει μικρό διάκενο εκεί). Ζητούνται τα εξής στο χώρο $x \geq 0$ και $y \geq 0$: (α) Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές του συστήματος εάν γνωρίζετε ότι το πεδίο είναι παντού κατά μήκος ενός από τα μοναδιαία διανύσματα στις κυλινδρικές συντεταγμένες. (β) Να σχεδιασθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες. Χάριν απλότητας, εργαστείτε σε δισδιάστατη απεικόνιση στο επίπεδο $x - y$ (οπότε οι ισοδυναμικές επιφάνειες αναπαρίστανται ως τομές). (γ) Θεωρώντας ότι το δυναμικό είναι συνάρτηση των κυλινδρικών συντεταγμένων, βρείτε τη συνάρτηση αυτή $V(\rho, \varphi, z)$ εάν γνωρίζετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν μεταβάλλεται επάνω σε οποιοδήποτε τόξο κύκλου 90° , όπως το AB στο σχήμα, με αρχή και πέρας στις δυο πλάκες και κέντρο επάνω στον άξονα z και ότι η θετική πλάκα είναι γειωμένη και η αρνητική κρατιέται σε δυναμικό -10 V .



Λύση:

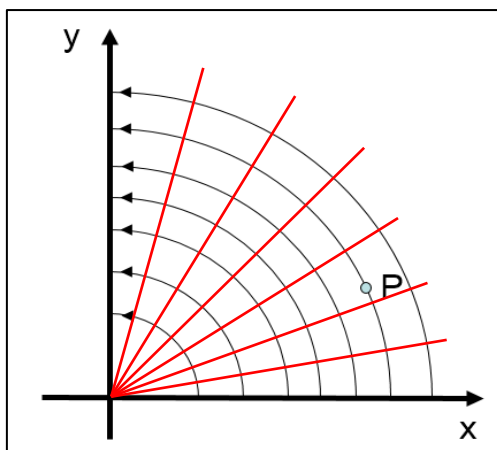
α) Το πεδίο πρέπει να είναι κάθετο στην επιφάνεια των αγωγών και επομένως οι δυναμικές γραμμές θα είναι κάπως έτσι:



Αφού είναι κατά μήκος ενός μοναδιαίου, τότε αναγκαστικά θα είναι κατά μήκος του $\vec{e}_\varphi$ και έτσι

$$\vec{E} = E(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\varphi$$

β) Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κάθετες στις Δ.Γ. και επομένως θα είναι κάπως έτσι:



Δηλαδή είναι επίπεδα που περνούν από τον άξονα z .

γ) Από τις σχέσεις $E - V$ στις κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -E_\rho = 0$$

Άρα το V δεν εξαρτάται από το ρ . Ομοίως

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_z = 0$$

Άρα το V δεν εξαρτάται από το z . Αντιθέτως

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -E_\varphi(\rho, \varphi, z) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\rho E_\varphi(\rho, \varphi, z)$$

Αφού το V δεν εξαρτάται από το ρ τότε πρέπει το E_φ να είναι ανάλογο του $1/\rho$ (για να αναιρεθεί η εξάρτηση του ρ). Επίσης το V δεν εξαρτάται από το z και άρα και το E_φ δεν πρέπει να εξαρτάται από το z . Επομένως

$$E_\varphi = \frac{1}{\rho} f(\varphi)$$

Αφού το πεδίο δεν μεταβάλλεται επάνω στο τόξο AB, τότε δεν εξαρτάται από την γωνία φ και άρα

$$E_\varphi = \frac{c}{\rho}$$

όπου c =σταθερά. Επομένως

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{c}{\rho} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -c \Rightarrow V = -c\varphi + d$$

όπου d =σταθερά. Από τις συνοριακές συνθήκες $V(0) = 0 \Rightarrow d = 0$ και $V(\pi/2) = -10$ δηλαδή

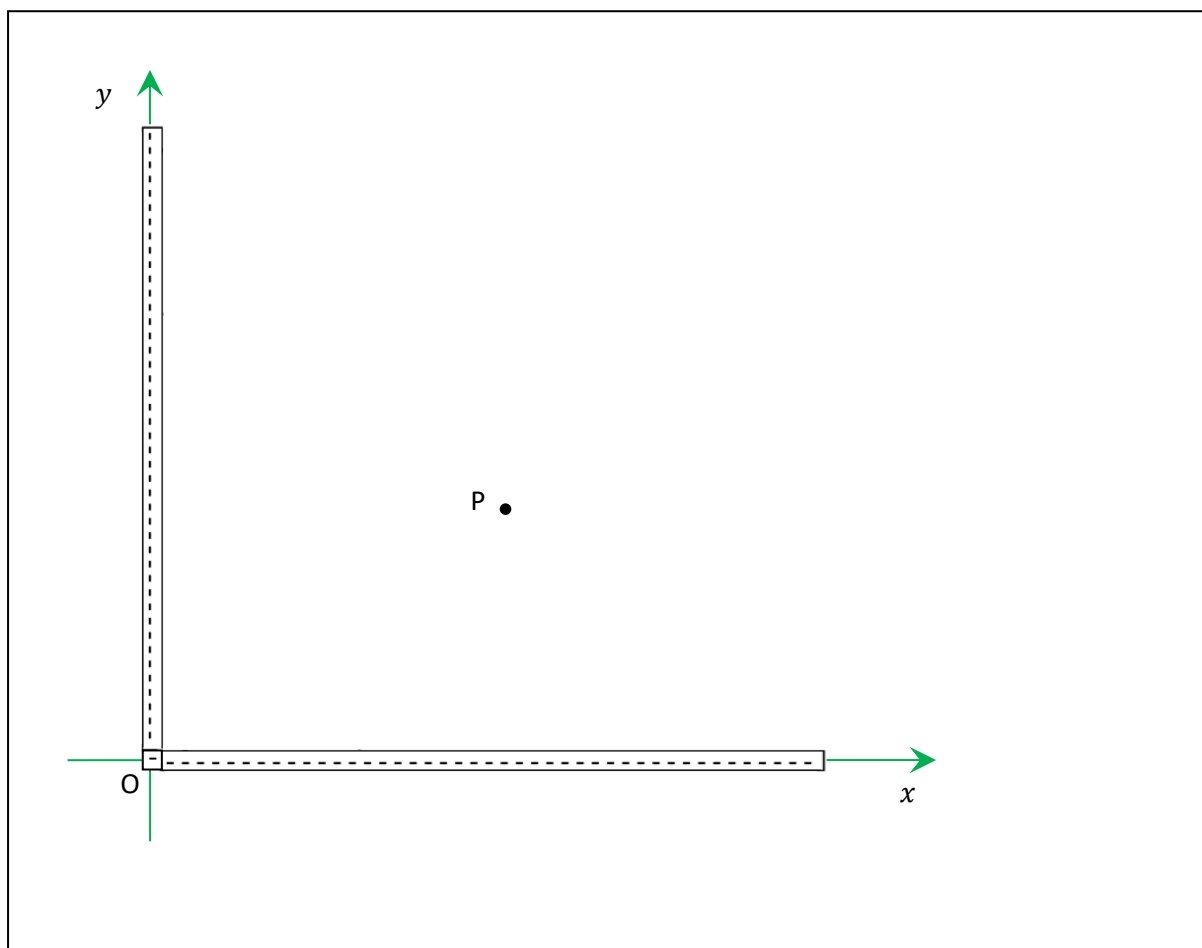
$$-10 = -\frac{c\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{20}{\pi}$$

Τελικά

$$V = -\frac{20}{\pi}\varphi$$

Πρόβλημα 5.16. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται μια διάταξη που αποτελείται από δυο ομοιόμορφα φορτισμένα μη-αγώγιμα λεπτά φύλλα, τοποθετημένα κάθετα μεταξύ τους σε μια κοινή ακμή η οποία περιέχει την αρχή των συντεταγμένων O και έτσι προσανατολισμένα ώστε το ένα να περιέχει τον άξονα x και το άλλο τον άξονα y . Το κατακόρυφο φύλλο φέρει αρνητικό φορτίο $-Q_y$ και έχει εμβαδό A_y ενώ το οριζόντιο φύλλο φέρει αρνητικό φορτίο $-Q_x$ και έχει εμβαδό A_x αντίστοιχα. Σε τυχαίο σημείο P με συντεταγμένες (x, y) τοποθετούμε ένα μικρό σημειακό θετικό φορτίο q . Θεωρώντας ότι οι συντεταγμένες του P είναι μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις των φύλλων, μπορείτε να θεωρήσετε ότι τα φύλλα είναι απείρων διαστάσεων και να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις:

- α) Πόση είναι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του φορτίου q (η αρχή της επαλληλίας μπορεί να σας βοηθήσει);
- β) Πόσο είναι το δυναμικό στο σημείο P ;
- γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του ηλεκτρικού πεδίου στο P ;
- δ) Να σχεδιασθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες παντού στο χώρο (οι τομές τους με τη σελίδα).
- ε) Να σχολιασθεί εάν η απάντησή σας στο υποερώτημα δ είναι σε συμφωνία με το υποερώτημα γ παραπάνω.



Λύση:

α) Εάν είχαμε μόνο το φύλλο που περιέχει τον άξονα x , τότε σύμφωνα με την Εξ. 4.3 η δυναμική ενέργεια του φορτίου q θα ήταν ίση με

$$U_x = q|E|y$$

όπου y είναι η απόσταση του φορτίου από το φύλλο και E_x είναι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το φύλλο το οποίο από την Εξ. 2.7 ισούται με

$$|E| = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0} = \frac{Q_x}{\epsilon_0 A_x}$$

και έτσι

$$U_x = \frac{qQ_x}{\epsilon_0 A_x} y$$

Ομοίως εάν υπήρχε μόνο το άλλο φύλλο, θα είχαμε

$$U_y = \frac{qQ_y}{\epsilon_0 A_y} x$$

όπου τώρα η απόσταση του φορτίου από αυτό το φύλλο είναι ίση με x . Από την αρχή της επαλληλίας η δυναμική ενέργεια του φορτίου είναι ίση με

$$U = U_x + U_y = \frac{qQ_x}{\epsilon_0 A_x} y + \frac{qQ_y}{\epsilon_0 A_y} x$$

β) Θεωρώντας το q ως το δοκιμαστικό φορτίο, έχουμε εξ' ορισμού

$$V = \frac{U}{q} = \frac{Q_x}{\epsilon_0 A_x} y + \frac{Q_y}{\epsilon_0 A_y} x$$

γ) Από τις Εξ. 5.2

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q_y}{\epsilon_0 A_y}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{Q_x}{\epsilon_0 A_x}$$

Εναλλακτικά είδαμε παραπάνω ότι

$$|E| = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0} = \frac{Q_x}{\epsilon_0 A_x}$$

για το πεδίο που δημιουργεί το φύλλο που περιέχει τον άξονα x . Επειδή το φορτίο Q_x είναι αρνητικό, αυτό το πεδίο είναι προς τον αρνητικό άξονα y και έτσι μπορούμε να του προσδώσουμε τον δείκτη “ y ” και να γράψουμε

$$E_y = -\frac{Q_x}{\epsilon_0 A_x}$$

ομοίως και για το άλλο φύλλο.

δ) Ισοδυναμικές επιφάνειες σημαίνει $V = c$ όπου $c = \text{σταθ}$, δηλαδή

$$\frac{Q_x}{\varepsilon_0 A_x} y + \frac{Q_y}{\varepsilon_0 A_y} x = c$$

Αυτή είναι μια εξίσωση ενός επιπέδου. Στο επίπεδο $x - y$ οι τομές αυτών των επιπέδων είναι ευθείες. Λύνοντας ως προς y έχουμε

$$y = -\frac{A_x Q_y}{A_y Q_x} x + c'$$

όπου c' μια άλλη σταθερά. Η κλίση της ευθείας είναι σταθερή και ίση με

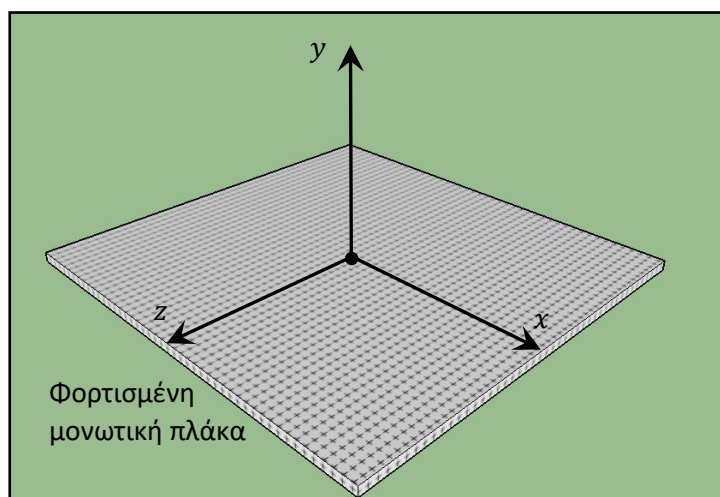
$$\lambda_1 = -\frac{A_x Q_y}{A_y Q_x}$$

ε) Όπως είδαμε στο ερώτημα γ, το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερές συνιστώσες και η γωνία του θ έχει κλίση

$$\lambda_2 = \tan\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_y Q_x}{A_x Q_y}$$

Το γινόμενο των δυο κλίσεων $\lambda_1 \lambda_2$ είναι ίσο με -1 και άρα το $\vec{E}$ είναι κάθετο στις ισοδυναμικές επιφάνειες όπως πρέπει.

Πρόβλημα 5.17. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται μια φορτισμένη μονωτική πλάκα με μη-ομοιόμορφο φορτίο η οποία βρίσκεται στο επίπεδο xz .



α) Να βρεθεί η συνάρτηση του δυναμικού σε καρτεσιανές συντεταγμένες, εάν γνωρίζετε ότι βάσει της προσέγγισης των απείρων διαστάσεων, ισχύουν τα εξής

- Το δυναμικό δεν εξαρτάται από το z

Φυσική II – Δ. Κουζούδης

- Το δυναμικό εξαρτάται γραμμικά από τα x , y και το γινόμενο xy
- Επάνω στην πλάκα το δυναμικό δίνεται από την $V_0 = \lambda x$ όπου $\lambda = 2$ σε κατάλληλες μονάδες στο S.I.
- Επάνω στην πλάκα η γωνία του ηλεκτρικού πεδίου ως προς τον άξονα x δίνεται από την έκφραση $\theta_0 = \tan^{-1}(\pi - \pi x/16)$

β) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι δυναμικές γραμμές ως προς τον άξονα x , σε κάθε σημείο του χώρου

γ) Να σχεδιασθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες στο επίπεδο $x - y$ (οπότε στην ουσία είναι καμπύλες) για τιμές του δυναμικού 24, 28, 32, 36, 40 Volts και για x στα όρια $|x| < 16$. Λάβετε υπόψη σας ότι υπάρχει μια ασύμπτωτος στην καμπύλες που θα σχεδιάσετε σε κάποια τιμή του x και ότι οι καμπύλες σε αυτή την περιοχή δεν παρουσιάζουν ελάχιστα ή μέγιστα.

δ) Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές στην περιοχή που σχεδιάσατε τις ισοδυναμικές του παραπάνω υποερωτήματος γ.

Λύση:

α) Από την εκφώνηση, το δυναμικό είναι της μορφής

$$V(x, y) = ax + by + cxy + d$$

όπου a, b, c, d σταθερές σε κατάλληλες μονάδες στο S.I. Επάνω στην πλάκα έχουμε $y = 0$ και το δυναμικό γίνεται

$$V(x, 0) = ax + d$$

Από τα δεδομένα, η παραπάνω έκφραση είναι ίση με λx και άρα $d = 0$ και $a = \lambda = 2 \text{ Volts/m}$. Έτσι η συνάρτηση δυναμικού γίνεται

$$V(x, y) = \lambda x + by + cxy$$

Από τις Εξ. 5.2 οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου E σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι ίσες με:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\lambda - cy$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -b - cx$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Εφόσον δεν υπάρχει z -συνιστώσα του πεδίου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πρόβλημα είναι δισδιάστατο και να θεωρήσουμε μόνο το επίπεδο $x - y$. Επάνω στην πλάκα έχουμε $y = 0$ και η γωνία θ_0 που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο με τον άξονα x δίνεται από την

$$\tan \theta_0 = \frac{E_y}{E_x} = \frac{-b - cx}{-\lambda - c \cdot 0} = \frac{b}{\lambda} + \frac{c}{\lambda} x$$

Από την εκφώνηση η γωνία είναι ίση με

$$\theta_0 = \tan^{-1}(\pi - \pi x/16)$$

Αντικαθιστώντας

$$\tan[\tan^{-1}(\pi - \pi x/16)] = \frac{b}{\lambda} + \frac{c}{\lambda}x \Rightarrow$$

$$\pi - \frac{\pi}{16}x = \frac{b}{\lambda} + \frac{c}{\lambda}x$$

Επειδή η παραπάνω σχέση πρέπει να ισχύει για κάθε x , πρέπει να έχουμε ταυτοτικά $b/\lambda = \pi$ και $c/\lambda = -\pi/16$ οπότε η συνάρτηση δυναμικού γίνεται

$$V(x, y) = \lambda \left(x + \pi y - \frac{\pi}{16}xy \right) = 2 \left(x + \pi y - \frac{\pi}{16}xy \right)$$

β) Οι συνιστώσες του πεδίου ισούνται με

$$E_x = -\lambda - cy = -\lambda + \lambda \frac{\pi}{16}y = -2 + \frac{\pi}{8}y$$

$$E_y = -b - cx = -\lambda\pi + \lambda \frac{\pi}{16}x = -2\pi + \frac{\pi}{8}x$$

Η γωνία του E ως προς τον άξονα x δίνεται από την

$$\tan\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{-2\pi + \frac{\pi}{8}x}{-2 + \frac{\pi}{8}y} = \frac{-16\pi + \pi x}{-16 + \pi y}$$

Αφού το E είναι εφαπτόμενο στις δυναμικές γραμμές, η παραπάνω γωνία είναι και η γωνία που σχηματίζουν οι δυναμικές γραμμές ως προς τον άξονα x

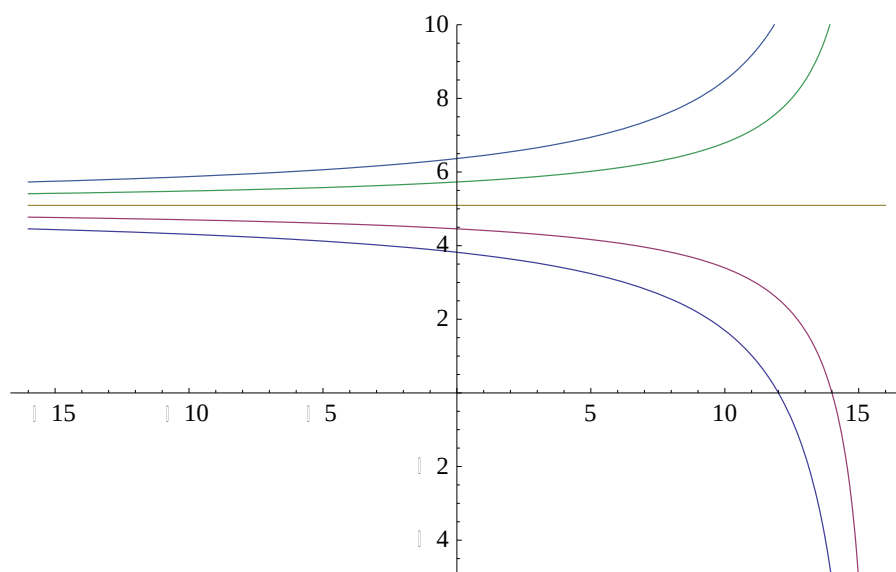
γ) Για να βρούμε τις ισοδυναμικές επιφάνειες θέτουμε $V = V_1$ όπου $V_1 =$ σταθερό και άρα

$$x + \pi y - \frac{\pi}{16}xy = \frac{V_1}{2}$$

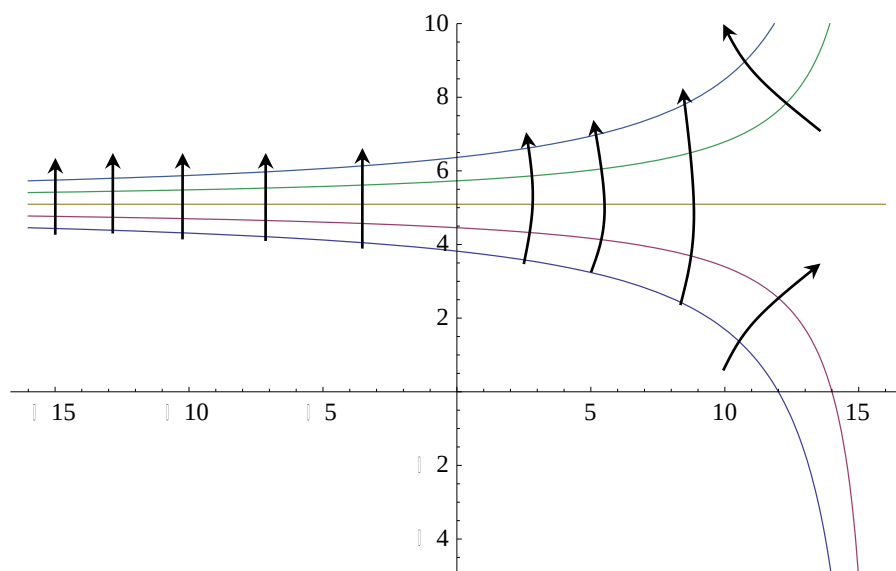
$$\pi y \left(1 - \frac{1}{16}x \right) = \frac{V_1}{2} - x$$

$$y = \frac{V_1 - 2x}{2\pi \left(1 - \frac{1}{16}x \right)}$$

Η παραπάνω έχει ασύμπτωτο στο $x = 16$. Επίσης τέμνει τον άξονα y στην τιμή $y = V_1/2\pi$ ενώ στο $x = -16$ έχει τιμή $y = (V_1 + 32)/4\pi$. Όσον αφορά τις δεδομένες τιμές του δυναμικού, η τιμή $32 V$ δίνει ταυτοτικά σταθερή τιμή $y = 16/\pi$, οι 36 και $40 V$ τείνουν στην ασύμπτωτο προς τα πάνω (δηλαδή $y \rightarrow \infty$) ενώ οι 24 και $28 V$ τείνουν στην ασύμπτωτο προς τα κάτω (δηλαδή $y \rightarrow -\infty$). Επομένως οι ισοδυναμικές μοιάζουν κάπως έτσι:

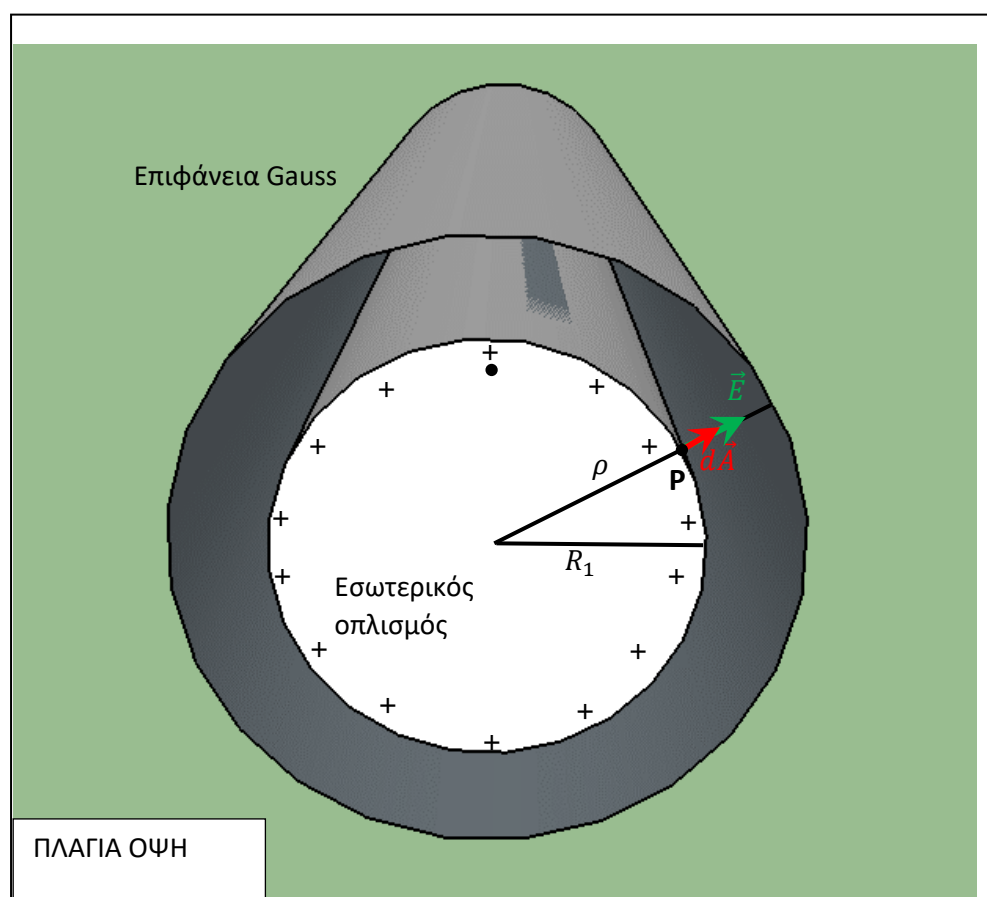
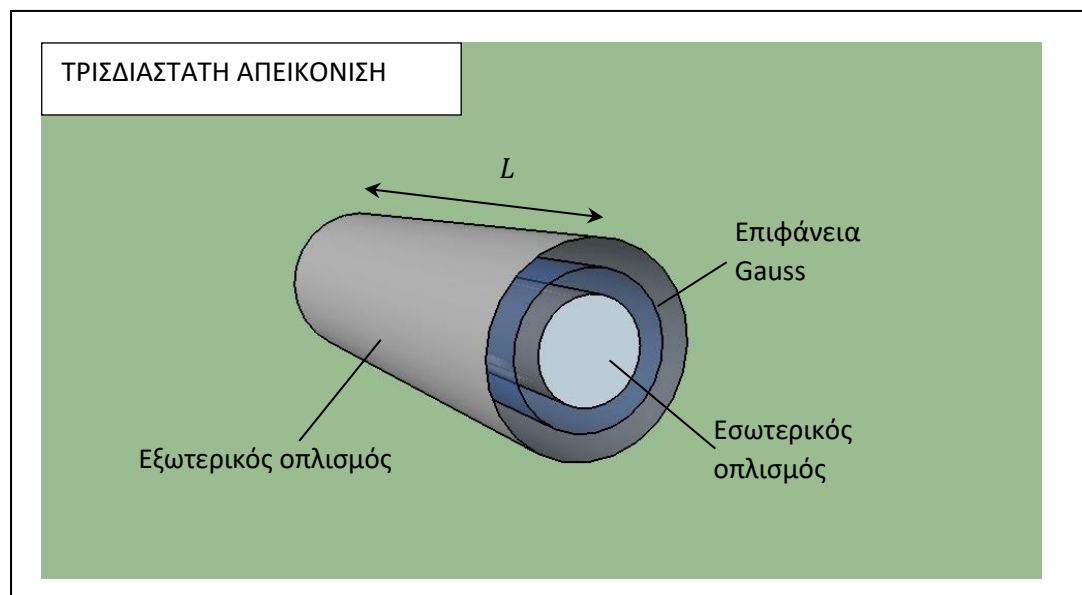


δ) Οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στις ισοδυναμικές οπότε μοιάζουν κάπως έτσι



Πρόβλημα 5.18 Έστω ένας πυκνωτής ο οποίος αποτελείται από έναν εσωτερικό οπλισμό σχήματος κυλίνδρου ακτίνας R_1 και μήκους L μαζί με ένα εξωτερικό λεπτό κυλινδρικό κέλυφος ακτίνας $R_2 > R_1$, ομοαξονικό με τον εσωτερικό οπλισμό και ίσου μήκους L . Να βρεθεί η μαθηματική εξίσωση των ισοδυναμικών επιφανειών στο εσωτερικό αυτού του πυκνωτή θεωρώντας ότι οι δυο οπλισμοί φέρουν φορτίο $\pm Q$, με τον εσωτερικό οπλισμό να είναι ο θετικός και ότι το μήκος L είναι πολύ μεγάλο (Σημείωση: Πρώτα πρέπει να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο και ακολούθως το δυναμικό στο εσωτερικό του πυκνωτή. Αυτό το πρόβλημα είναι παρόμοιο κάπως με το Πρόβλημα 5.5).

Λύση: Όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα, επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss ένα κύλινδρο μήκους L , ομοαξονικό με τους οπλισμούς και με ακτίνα ρ τέτοια ώστε η επιφάνεια Gauss να βρίσκεται στο εσωτερικό του πυκνωτή, δηλαδή $R_2 > \rho > R_1$



Εφόσον ο κύλινδρος είναι αγωγίμος, όλο το φορτίο κατανέμεται στην επιφάνειά του και $E = 0$ στο εσωτερικό του. Στον εξωτερικό χώρο, οι δυναμικές γραμμές είναι παρόμοιες με αυτές που είδαμε στο υπο-εδάφιο "Φορτισμένη γραμμή απείρων διαστάσεων", δηλαδή δισδιάστατες ακτινικές από

την επιφάνεια του κυλίνδρου προς το άπειρο (σαν τις ακτίνες της ρόδας του ποδηλάτου). Ακριβώς όπως δουλέψαμε με την γραμμή φορτίου, το $d\vec{A}$ στις δυο βάσεις B_1 και B_2 του κυλίνδρου Gauss είναι κάθετο στο $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ εκεί και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Στην παράπλευρη επιφάνεια Π βλέπουμε από την πλάγια όψη ότι το $d\vec{A}$ είναι παράλληλο με το $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$. Επομένως

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{\Pi} E dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

όπου Q είναι το περικλειόμενο φορτίο από τον κύλινδρο Gauss το οποίο είναι όλο το φορτίο του θετικού σπλισμού. Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το E είναι σταθερό επάνω στην Π και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E \int_{\Pi} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου Gauss είναι ίσο με $2\pi\rho L$ (βάση×ύψος). Επομένως

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{Q}{2\pi\rho L\epsilon_0}$$

Το δυναμικό προκύπτει με ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες από τη σχέση

$$E = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \Rightarrow V = -\int E d\rho = -\frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} \int \frac{1}{\rho} d\rho$$

ή

$$V = -\frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} \ln\rho + c$$

Ισοδυναμικές επιφάνειες είναι οι επιφάνειες στις οποίες V : σταθερό. Από την παραπάνω σχέση αυτό σημαίνει ρ : σταθερό. Από τον ορισμό του ρ στις κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c_1$$

όπου c_1 : σταθερά. Έτσι

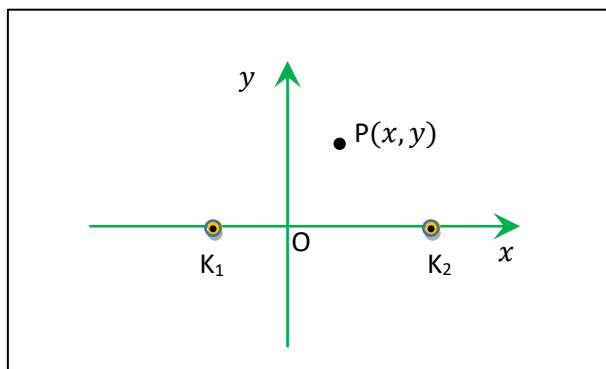
$$x^2 + y^2 = c_1^2$$

που είναι η εξίσωση κύκλου στο επίπεδο και κυλίνδρου στις 3 διαστάσεις

Πρόβλημα 5.19. Στο παρακάτω σχήμα δυο άπειρες φορτισμένες γραμμές απείρου μήκους K_1 και K_2 με θετική και αρνητική γραμμική πυκνότητα φορτίου λ και -2λ αντίστοιχα, τέμνουν κάθετα την σελίδα στα σημεία $(-1,0)$ και $(2,0)$ (σε m).

α) Να βρεθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες με τη βοήθεια της μεθόδου της επαλληλίας το ηλεκτρικό δυναμικό σε τυχαίο σημείο $P(x, y)$ που βρίσκεται επάνω στο επίπεδο x - y εάν $k\lambda = 1/2$ (σε μονάδες S.I. όπου k η γνωστή σταθερά του ηλεκτρισμού).

β) Να βρεθεί η εξίσωση των ισοδυναμικών επιφανειών σε μορφή πολωνυμικού κλάσματος.



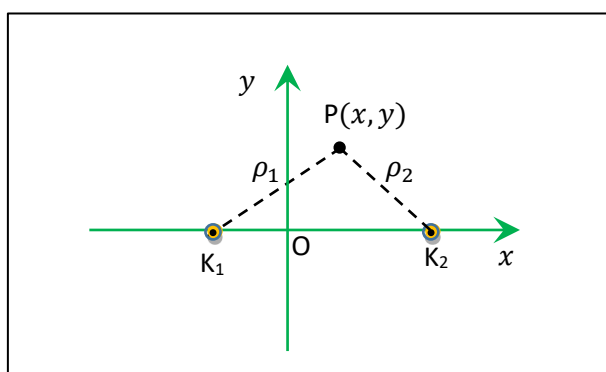
Λύση:

Στο επίπεδο x - y ενώνουμε τα σημεία τομής K_1 και K_2 με το τυχαίο σημείο P . Τα διανύσματα K_1P και K_2P έχουν μέτρα

$$\rho_1 = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

και

$$\rho_2 = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$$



Σύμφωνα με την Εξ. 2.6, το ηλεκτρικό πεδίο μιας άπειρης γραμμής φορτίου ισούται με

$$E = \frac{2k\lambda}{\rho}$$

Αφού στην ουσία το ρ είναι τα διάνυσμα θέσης στις πολικές συντεταγμένες και το E είναι κατά μήκος του μοναδιαίου $\vec{e}_\rho$ (δείτε Εξ. 2.7), τότε το αντίστοιχο δυναμικό $V(\rho)$ συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο E μέσω της

$$E = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

οπότε

$$V = -\int E d\rho = -2k\lambda \ln(\rho) + c$$

όπου το c είναι μια σταθερά. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα λόγω επαλληλίας έχουμε

$$V = -2k\lambda_1 \ln(\rho_1) - 2k\lambda_2 \ln(\rho_2) + c$$

όπου από το δεδομένο $k\lambda = 1/2$ έχουμε $2k\lambda_1 = 1$ και $2k\lambda_2$. Έτσι

$$V = -\ln\rho_1 + 2\ln\rho_2 + c$$

Οι ισοδυναμικές επιφάνειες αντιστοιχούν σε σταθερό δυναμικό δηλαδή πρέπει

$$-\ln\rho_1 + 2\ln\rho_2 = c'$$

όπου c' είναι μια άλλη σταθερά. Η παραπάνω γράφεται και ως

$$-\ln\rho_1 + \ln(\rho_2^2) = c'$$

Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων

$$\ln(\rho_2^2/\rho_1) = c'$$

ή

$$\rho_2^2/\rho_1 = e^{c'} \Rightarrow \frac{(x+1)^2 + y^2}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} = e^{c'} \Rightarrow$$

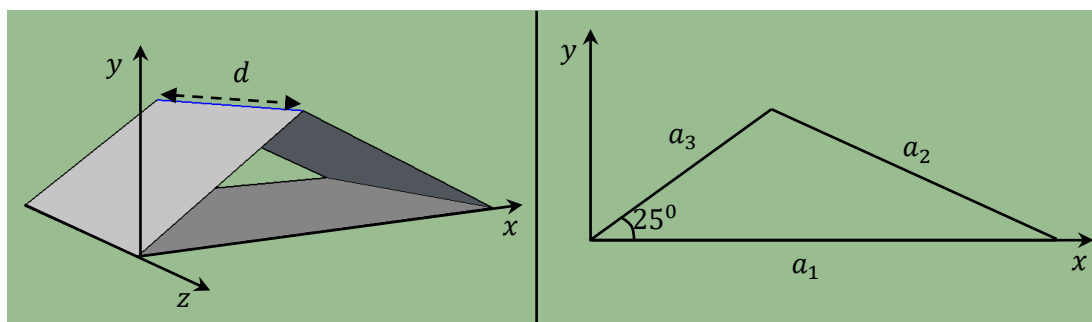
Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε

$$\frac{[(x+1)^2 + y^2]^2}{(x-2)^2 + y^2} = c''$$

όπου η $c'' = e^{2c'}$ είναι επίσης σταθερά.

Πρόβλημα 5.20.

Στο παρακάτω σχήμα, τρεις ορθογώνιες μονωτικές πλάκες με κοινό πλάτος $d = 2.5 \text{ m}$, ενώνονται έτσι ώστε τα κοινά τους πλάτη να εφάπτονται σε ένα τριγωνικό σκεποειδή σχηματισμό με τη μια γωνία του τριγώνου (στην πρόσοψη του σχήματος) να είναι 25° ενώ τα μήκη a_1 και a_3 είναι αντίστοιχα 4.2 m και 2.6 m . Οι πλάκες φέρουν ομοιόμορφα φορτία $q_1 = 25 \text{ nC}$, $q_2 = 35 \text{ nC}$ και $q_3 = -30 \text{ nC}$ με τους δείκτες των φορτίων να αντιστοιχούν στους δείκτες των τριών πλευρών. Θεωρώντας ότι οι διαστάσεις των πλακών είναι σχετικά μεγάλες, να χρησιμοποιήσετε μια κατάλληλη προσέγγιση ώστε να σχεδιάσετε τις ισοδυναμικές επιφάνειες στο επίπεδο x - y στον εσωτερικό χώρο του σκεποειδούς.



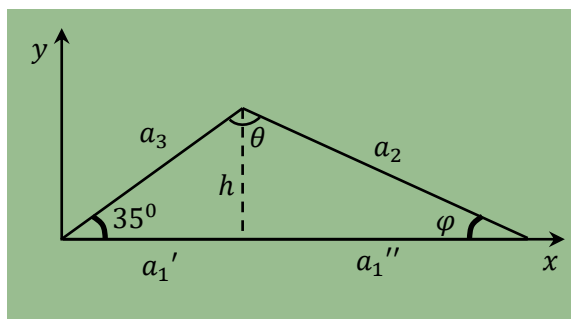
Τρισδιάστατη όψη

Πρόσοψη

Λύση:

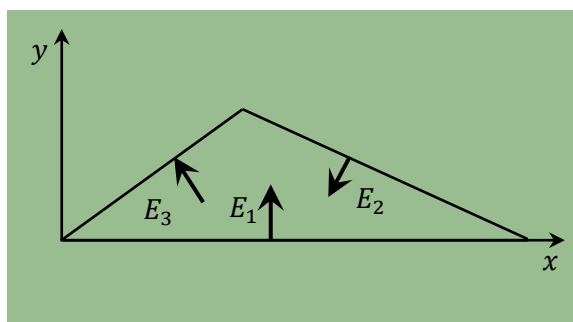
Κατ' αρχάς πρέπει να λύσουμε το τρίγωνο για να βρούμε όλες τις διαστάσεις του. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$\begin{aligned}
 a_1' &= a_3 \cos 25^\circ = 2.36 \text{ m} \\
 a_1'' &= a_1 - a_1' = 1.84 \text{ m} \\
 h &= a_3 \sin 35^\circ = 1.10 \text{ m} \\
 \varphi &= \tan^{-1}(h/a_1'') = 30.8^\circ \\
 \theta &= 180 - 35 - \varphi = 124.2^\circ \\
 a_2 &= a_1'' / \cos \varphi = 2.15 \text{ m}
 \end{aligned}$$



Πλάγια όψη

Θεωρώντας ότι οι διαστάσεις των πλακών είναι μεγάλες, μπορούμε να πάρουμε την προσέγγιση του άπειρου φύλλου με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με $E = \sigma/\epsilon_0$ με διεύθυνση κάθετα στο φύλλο. Έτσι τα ηλεκτρικά πεδία είναι όπως στο παρακάτω σχήμα, με τη φορά που σημειώνεται, κάθετα στις πλάκες και απομακρυνόμενα από αυτές για θετικά φορτία και προς αυτές για αρνητικά φορτία.



Πλάγια όψη

Η πυκνότητα φορτίου είναι ίση με το φορτίο ανά εμβαδό. Οι τρεις πλάκες είναι ορθογώνιες με εμβαδό $A_i = a_i d$ και η γωνία του κάθε πεδίου ως προς τον άξονα $-x$ είναι η συμπληρωματική (κατά μέτρο) της γωνίας που σχηματίζει το αντίστοιχο φύλλο με αυτό τον άξονα. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Πλάκα 1	Πλάκα 2	Πλάκα 3
Εμβαδό (m^2)	10.5	5.36	6.5
Επιφ. Πυκνότητα (nC/m^2)	2.38	6.52	4.62
Πεδίο E (N/C)	269	737	522
Γωνία του E	90^0	239^0	115^0
Συνιστώσα x	0	-377	-220
Συνιστώσα y	269	-633	473

Τα πεδία αυτά είναι εξ' ολοκλήρου στο επίπεδο x - y και το συνισταμένο πεδίο έχει συνιστώσες

$$E_x = -598 \text{ N/C}$$

$$E_y = 109 \text{ N/C}$$

Το αντίστοιχο δυναμικό $V(x, y)$ συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ μέσω των

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

αφού τα E_x και E_y είναι σταθερά, τότε με απλή ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$V = -E_x x - E_y y + c$$

όπου το c είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες αντιστοιχούν σε σταθερό δυναμικό δηλαδή πρέπει

$$E_x x + E_y y = c'$$

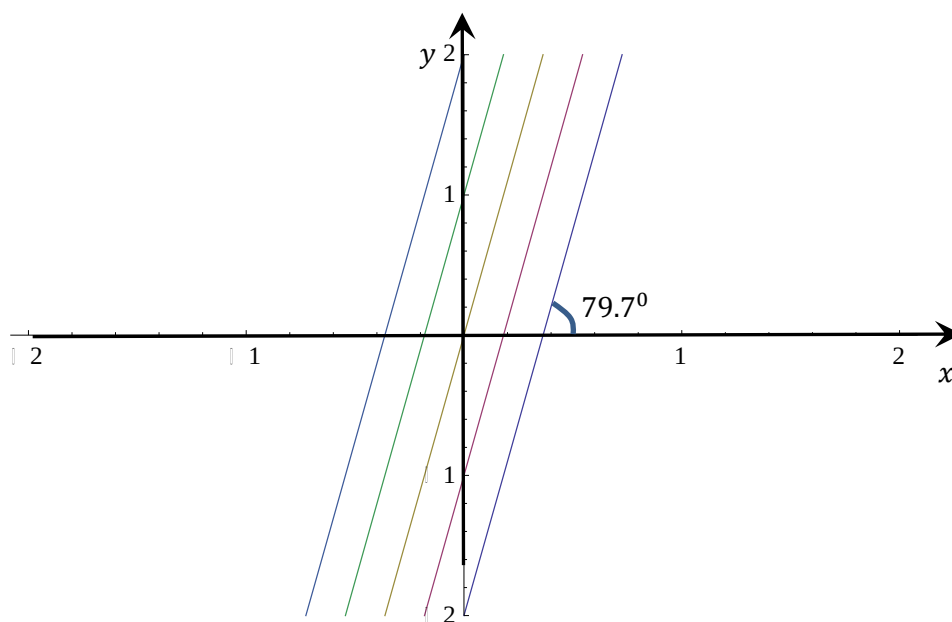
όπου c' είναι μια άλλη σταθερά. Έτσι

$$y = -\frac{E_x}{E_y}x + c''$$

όπου $c'' = c'/E_y$. Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες του πεδίου

$$y = 5.51x + c''$$

Στο επίπεδο x - y η παραπάνω έκφραση είναι μια ευθεία με σταθερή κλίση $\tan^{-1}(5.51) = 79.7^\circ$. Οι ζητούμενες ισοδυναμικές μοιάζουν κάπως έτσι



Πρόβλημα 5.21. Το ηλεκτρικό πεδίο ενός μονωτικού κυλίνδρου ακτίνας R και απείρου μήκους με τον άξονα συμμετρίας του κατά μήκος του άξονα z , ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου η (φορτίο/όγκος) δίνεται από την έκφραση $\vec{E} = E\vec{e}_\rho$ όπου $\vec{e}_\rho$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της πολικής ακτίνας ρ στις κυλινδρικές συντεταγμένες και

$$E = \begin{cases} \frac{\eta R^2}{2\epsilon_0 \rho} & \rho \geq R \\ \frac{\eta \rho}{2\epsilon_0} & \rho \leq R \end{cases}$$

(δείτε Πρόβλημα 3.8). Να βρεθεί το δυναμικό ενός τέτοιου κυλίνδρου εάν γνωρίζουμε ότι μηδενίζεται στο $\rho = 0$ (συννοριακή συνθήκη) και είναι μια συνεχής συνάρτηση του ρ (συνθήκη συνέχειας).

Λύση:

Από την Εξ. 5.6 βλέπουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο του παρόντος προβλήματος έχει μόνο ρ -συνιστώσα στις κυλινδρικές συντεταγμένες, δηλαδή $E_\phi = E_z = 0$ ενώ $E_\rho = E$ (το δεδομένο). Από την Εξ. 5.7α έχουμε $E_\rho = -dV/d\rho$ οπότε ολοκληρώνοντας ως προς ρ , οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$V = \begin{cases} -\frac{\eta\rho^2}{4\varepsilon_0} + c_A & \rho \leq R \\ -\frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0} \ln\rho + c_B & \rho \geq R \end{cases}$$

όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Από την συνοριακή συνθήκη $V = 0$ στο $\rho = 0$ παίρνουμε $c_A = 0$ ενώ από την συνέχεια στο $\rho = R$ παίρνουμε

$$-\frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0} \ln R + c_B = -\frac{\eta R^2}{4\varepsilon_0} \Rightarrow c_A = \frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0} \ln R - \frac{\eta R^2}{4\varepsilon_0}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των λογαρίθμων $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$ οδηγεί στο:

$$V = \begin{cases} -\frac{\eta\rho^2}{4\varepsilon_0} & \rho \leq R \\ -\frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{R}\right) - \frac{\eta R^2}{4\varepsilon_0} & \rho \geq R \end{cases}$$

Πρόβλημα 5.22. Έστω δυο κύλινδροι όπως αυτοί του προηγούμενου προβλήματος, ίσων ακτίνων R , ο ένας κατά μήκος του άξονα z με χωρική πυκνότητα φορτίου η_1 και ένας δεύτερος με χωρική πυκνότητα φορτίου $\eta_2 = 3\eta_1$, παράλληλος με τον πρώτο και μετατοπισμένος κατά μήκος $\Delta x = +a$ όπου $a = 5R$. (α) Με την βοήθεια της αρχής της επαλληλίας, να βρεθεί η τιμή του δυναμικού σε ένα σημείο κατά μήκος της ευθείας στο επίπεδο x - y που ενώνει τα κέντρα των δυο κυλίνδρων και απέχει απόσταση $3R$ από τον πρώτο (η απάντηση θα περιέχει τα η_1 , R και σταθερές). (β) Να βρεθεί η εξίσωση της ισοδυναμικής επιφάνειας των 0 Volts του συστήματος των δυο κυλίνδρων σε μορφή πολωνύμου σε x και y (αποτελείται από δυο παράγοντες με σχετικά μεγάλες δυνάμεις, δεν χρειάζεται να το αναπτύξετε), εάν γνωρίζουμε ότι η ισοδυναμική βρίσκεται εξ' ολοκλήρου εκτός των δυο κυλίνδρων.

Απάντηση: (α) $= -\eta_1 R^2 (2 + \ln 3 + 3 \ln 2) / 2\varepsilon_0$ (β) $(x^2 + y^2)^2 ((x - 5R)^2 + y^2)^6 = R^8 e^{-4}$

Λύση:

(α) Για τους δυο κυλίνδρους έχουμε

$$V_1 = \begin{cases} -\frac{\eta_1 \rho_1}{4\varepsilon_0} & \rho_1 \leq R \\ -\frac{\eta_1 R^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_1}{R}\right) - \frac{\eta_1 R^2}{4\varepsilon_0} & \rho_1 \geq R \end{cases}$$

όπου $\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ για τον πρώτο με κέντρο στο $(0,0)$ και

$$V_2 = \begin{cases} -\frac{\eta_2 \rho_1}{4\epsilon_0} & \rho_2 \leq R \\ -\frac{\eta_2 R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_2}{R}\right) - \frac{\eta_2 R^2}{4\epsilon_0} & \rho_2 \geq R \end{cases}$$

όπου $\rho_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ για τον δεύτερο με κέντρο στο $(a, 0)$. Ζητείται το δυναμικό στο σημείο $(3R, 0)$ οπότε είμαστε στο εξωτερικό και των δυο κυλίνδρων με $\rho_1 = 3R$ και $\rho_2 = 5R - 3R = 2R$. Από την αρχή της επαλληλίας

$$V = V_1 + V_2 = -\frac{\eta_1 R^2}{2\epsilon_0} \ln 3 - \frac{\eta_1 R^2}{4\epsilon_0} - \frac{\eta_2 R^2}{2\epsilon_0} \ln 2 - \frac{\eta_2 R^2}{4\epsilon_0}$$

Όμως $\eta_1 = 3\eta_2$ και έτσι

$$V = V_1 + V_2 = -\frac{\eta_1 R^2}{2\epsilon_0} (2 + \ln 3 + 3\ln 2)$$

(γ) Από την αρχή της επαλληλίας για την περιοχή εκτός των κυλίνδρων, έχουμε για μηδενικό δυναμικό:

$$V = V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\eta_1 R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_1}{R}\right) - \frac{\eta_1 R^2}{4\epsilon_0} - \frac{\eta_2 R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_2}{R}\right) - \frac{\eta_2 R^2}{4\epsilon_0} = 0$$

Όμως $\eta_1 = 3\eta_2$ και έτσι

$$\ln\left(\frac{\rho_1}{R}\right) + \frac{1}{2} + 3\ln\left(\frac{\rho_2}{R}\right) + \frac{3}{2} = 0$$

$$\ln\left(\frac{\rho_1}{R}\right) + \ln\left(\frac{\rho_2}{R}\right)^3 = -2$$

$$\ln\left[\left(\frac{\rho_1}{R}\right)\left(\frac{\rho_2}{R}\right)^3\right] = -2$$

$$\left(\frac{\rho_1}{R}\right)\left(\frac{\rho_2}{R}\right)^3 = e^{-2}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο για να φύγουν οι ρίζες από τα ρ και έχουμε

$$\rho_1^2 \rho_2^6 = R^8 e^{-4}$$

$$(x^2 + y^2)^2 ((x-a)^2 + y^2)^6 = R^8 e^{-4}$$

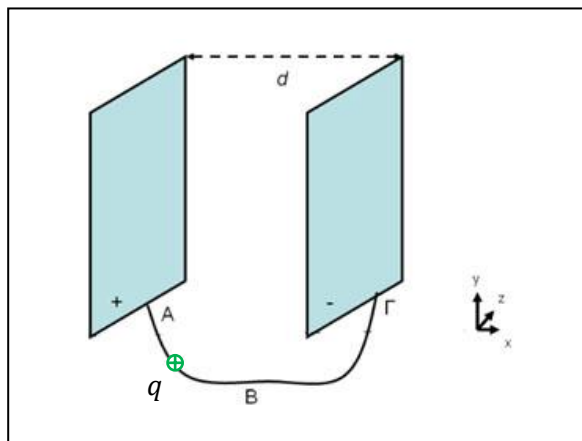
Τέλος αντικαθιστούμε $a = 5R$ και έχουμε

$$(x^2 + y^2)^2 ((x-5R)^2 + y^2)^6 = R^8 e^{-4}$$

6. ΠΥΚΝΩΤΕΣ - ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ

Πρόβλημα 6.1.

Στο παρακάτω σχήμα, ένα θετικό σημειακό φορτίο $q = 2 \mu\text{C}$ μεταφέρεται από τον θετικό οπλισμό προς τον αρνητικό οπλισμό ενός πυκνωτή μέσω του συρματινίου αγωγού ΑΒΓ. Ο πυκνωτής έχει εμβαδό οπλισμών $A = 0.5 \text{ cm}^2$, απόσταση οπλισμών μεταξύ τους $d = 2 \text{ mm}$ και διαθέτει φορτίο $Q = 0.02 \text{ C}$. Να βρεθεί η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του φορτίου.



Απάντηση: -181 kJ

Λύση:

Στο εσωτερικό του πυκνωτή

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Η διαφορά δυναμικού ισούται με

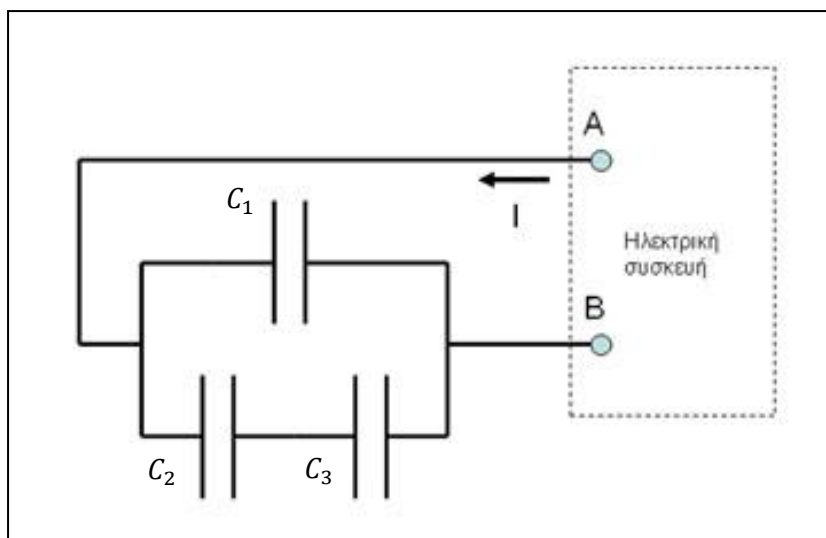
$$\Delta V = V_+ - V_- = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

Από τον ορισμό του δυναμικού θεωρώντας το σημειακό φορτίο ως δοκιμαστικό, έχουμε (προσέξτε ποια είναι η τελική και ποια η αρχική κατάσταση)

$$\Delta U = U_- - U_+ = q(V_- - V_+) = -\Delta V q = -\frac{qQd}{\epsilon_0 A}$$

Πρόβλημα 6.2.

Στο παρακάτω σχήμα, το σύστημα των τριών πυκνωτών με $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 4 \mu\text{F}$ και $C_3 = 5 \mu\text{F}$ συνδέεται στα σημεία Α και Β μιας ηλεκτρικής συσκευής η οποία βρίσκεται υπό διαφορά δυναμικού $V_{AB} = 1.5 \text{ V}$. Να βρεθεί η ενέργεια του πυκνωτή C_3 .



Απάντηση: $1.11 \mu J$

Λύση:

Η ολική χωρητικότητα των δυο πυκνωτών στον χαμηλότερο κλάδο (πυκνωτές σε σειρά) ισούται με

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

Ο πάνω και κάτω κλάδος είναι συνδεδεμένοι παράλληλα και άρα βρίσκονται υπό την ίδια διαφορά δυναμικού που είναι η V_{AB} και έτσι μπορώ να γράψω για το φορτίο του ισοδύναμου C_{23} ότι είναι ίσο με

$$q_{23} = C_{23} V_{AB} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} V_{AB}$$

Οι πυκνωτές σε σειρά έχουν το ίδιο φορτίο και άρα το εισερχόμενο φορτίο από την συσκευή, το οποίο είναι το q_{23} , κατανέμεται εξ' ίσου στον καθένα πυκνωτή της σειράς και άρα

$$q_3 = q_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} V_{AB}$$

Η ενέργεια του C_3 ισούται με

$$U_3 = \frac{1}{2C_3} q_3^2 = \frac{1}{2C_3} \left(\frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \right)^2 V_{AB}^2$$

Πρόβλημα 6.3.

Ένας φοιτητής κατασκευάζει ένα επίπεδο πυκνωτή χρησιμοποιώντας δυο ορθογώνια μεταλλικά φύλλα διαστάσεων $0.5 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$ τα οποία τα τοποθετεί επάνω σε μια ειδική ευθύγραμμη τροχιά από πλαστικό υλικό ώστε να μπορεί να μεταβάλλει συνεχόμενα την απόσταση x μεταξύ των πυκνωτών από μια ελάχιστη τιμή 0.5 mm έως μια μέγιστη τιμή 5 mm . α) Να γίνει η γραφική

παράσταση της χωρητικότητας συναρτήσει του x για 10 ενδιαμέσες τιμές αυτού. β) Να επαναληφθεί το προηγούμενο βήμα εάν ο φοιτητής τοποθετεί σακουλάκια συσκευασίας πολυαιθυλενίου πάχους 0.5 mm το καθένα, κολλητά μεταξύ τους μεταξύ των οπλισμών ώστε αυτά να γεμίζουν πλήρως τον χώρο μεταξύ των οπλισμών. γ) Τώρα ο φοιτητής συνδέει μια σταθερή πηγή τάσης 24 V στα άκρα του πυκνωτή. Να γίνει η γραφική παράσταση του φορτίου Q του θετικού οπλισμού συναρτήσει του x για τα δυο παραπάνω βήματα α και β. δ) Σε διαφορετικό πείραμα, ο φοιτητής τοποθετεί φορτίο $\pm 2 \mu\text{C}$ στους δυο οπλισμούς και ακολούθως αφήνει τα άκρα του πυκνωτή ελεύθερα. Να γίνει η γραφική παράσταση της διαφοράς δυναμικού V μεταξύ των οπλισμών συναρτήσει του x για τα δυο παραπάνω βήματα α και β.

Λύση:

(α) Από τα δεδομένα, η επιφάνεια των οπλισμών του πυκνωτή είναι ίση με

$$A = 0.5 \times 0.25 = 0.125 \text{ m}^2$$

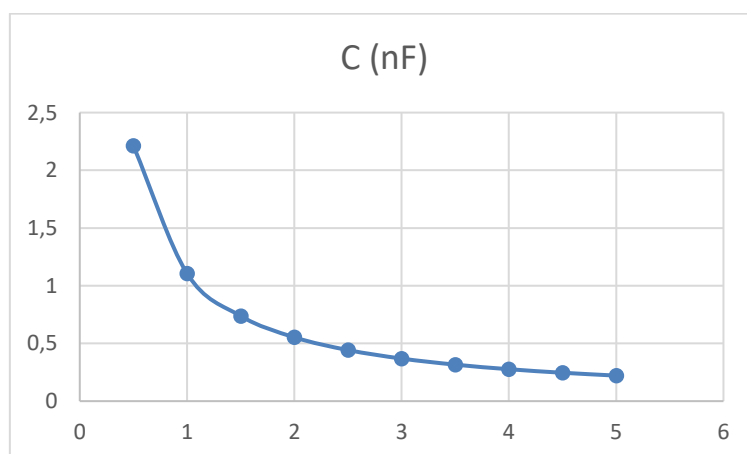
Σύμφωνα με την Εξ. 6.4 του βιβλίου, η χωρητικότητα ενός επιπέδου πυκνωτή είναι ίση με

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

όπου $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ S.I.}$ Έτσι για τις παρακάτω δέκα τιμές του d , το C παίρνει τις εξής τιμές:

$d \text{ (mm)}$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$C \text{ (nF)}$	2.21	1.11	0.74	0.55	0.44	0.37	0.32	0.28	0.25	0.22

Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω



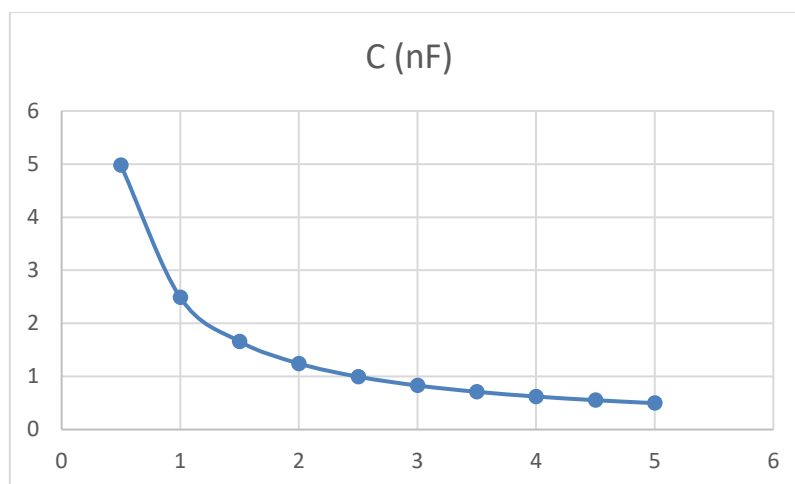
(β) Σύμφωνα με τον Πίνακα 6.1, το Πολυαιθυλένιο έχει σχετική διηλεκτρική σταθερά $\kappa = 2.25$ και επομένως στον τύπο της χωρητικότητας πρέπει να αντικαταστήσουμε το ε_0 με το

$$\varepsilon = \kappa \varepsilon_0 = 2.25 \times 8.85 \times 10^{-12} = 2.00 \times 10^{-11}$$

Οι παραπάνω τιμές γίνονται

$x \text{ (mm)}$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$C \text{ (nF)}$	4.98	2.49	1.66	1.24	1.00	0.83	0.71	0.62	0.55	0.50

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η παρακάτω

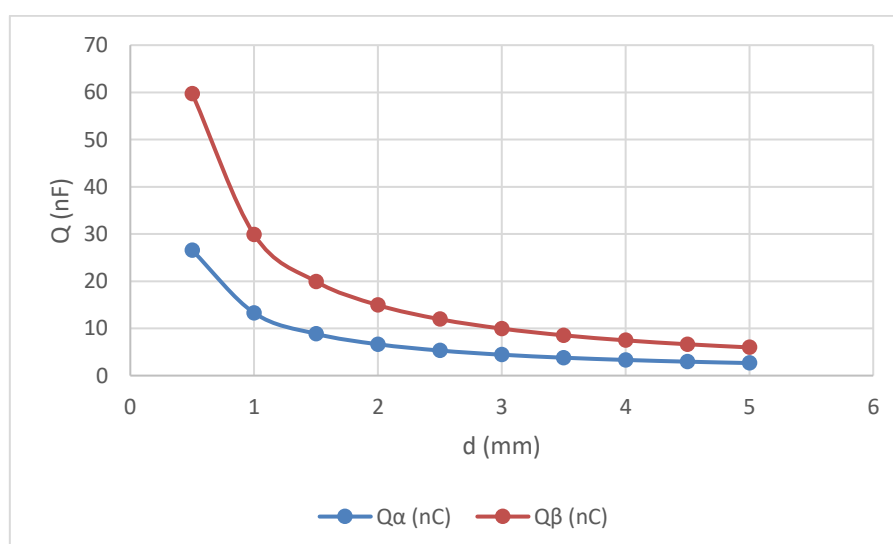


Στην ουσία είναι σαν να πολλαπλασιάζουμε όλες τις τιμές με το κ

(γ) Το φορτίο σε ένα πυκνωτή ισούται με $Q = CV$ και έτσι έχουμε

x (mm)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Q _α (nC)	26.55	13.28	8.85	6.64	5.31	4.43	3.79	3.32	2.95	2.66
Q _β (nC)	59.74	29.87	19.91	14.93	11.95	9.96	8.53	7.47	6.64	5.97

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η παρακάτω

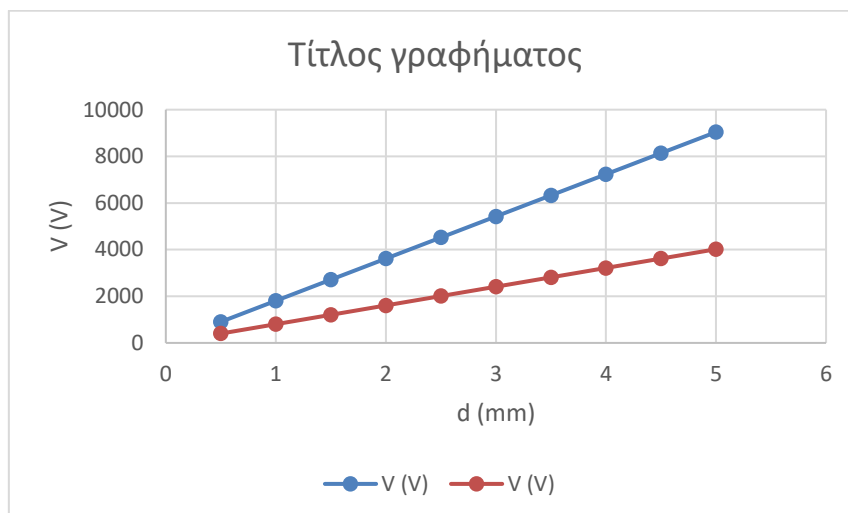


(δ) Τώρα το φορτίο $C = \pm 2 \mu C$ είναι σταθερό γιατί ο (εκάστοτε) πυκνωτής είναι χωρίς συνδέσεις και έτσι έχουμε

x (mm)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
--------	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---

V_α (V)	904	1808	2712	3616	4520	5424	6328	7232	8136	9040
V_β (V)	402	804	1205	1607	2009	2411	2812	3214	3616	4018

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η παρακάτω



Πρόβλημα 6.4.

Ένας φοιτητής κατασκευάζει ένα επίπεδο πυκνωτή χρησιμοποιώντας δυο ορθογώνια μεταλλικά φύλλα διαστάσεων $0.5\text{ m} \times 0.25\text{ m}$ σε απόσταση 0.5 mm μεταξύ τους. Εάν δεχθούμε ότι το σημείο αναφοράς του δυναμικού είναι το ιδεατό επίπεδο που ισαπέχει από τους δυο οπλισμούς (το επίπεδο συμμετρίας που διχοτομεί τον πυκνωτή), να υπολογισθεί το δυναμικό για τις εξής περιπτώσεις: α) Σε σημεία τα οποία απέχουν 0.1 mm και 0.25 mm από τον θετικό οπλισμό, τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του πυκνωτή. β) Σε σημεία τα οποία απέχουν 0.1 mm και 0.25 mm από τον αρνητικό οπλισμό, τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του πυκνωτή.

Πρόβλημα 6.5. Ένας πυκνωτής αποτελείται από έναν σφαιρικό εσωτερικό οπλισμό ακτίνας R_1 ο οποίος περιβάλλεται από εξωτερικό λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας $R_2 > R_1$, ομόκεντρο με τον εσωτερικό οπλισμό. Να υπολογισθεί η χωρητικότητά του (Σημείωση: Ακολουθήστε παρόμοια βήματα με αυτά του κυλινδρικού πυκνωτή που μελετήσαμε στο εδάφιο "Άλλες Γεωμετρίες" του παρόντος κεφαλαίου και θεωρήστε π.χ. ότι ο θετικός οπλισμός είναι ο εσωτερικός).

Λύση:

Στην εσωτερικό χώρο μεταξύ της σφαίρας και του κελύφους θεωρούμε μια σφαιρική επιφάνεια Gauss, ομόκεντρη με τη σφαίρα και με ακτίνα $R_2 > r > R_1$. Το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία, η κατανομή των Δ.Γ. είναι ακτινική και το $\vec{E}$ τέμνει κάθετα τη σφαίρα Gauss. Το $d\vec{A}$ είναι παράλληλο στο $\vec{E}$ και έτσι το εσωτερικό τους γινόμενο γίνεται

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA \cos 0^\circ = EdA$$

Ο νόμος του Gauss γίνεται

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint E dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Η ολοκλήρωση γίνεται επάνω στην σφαίρα Gauss όπου το E είναι σταθερό. Το περικλειόμενο φορτίο είναι μόνο το θετικό φορτίο $+Q$. Επομένως

$$E \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Το δυναμικό προκύπτει με ολοκλήρωση σε σφαιρικές συντεταγμένες από τη σχέση

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V = -\int E dr = -\frac{kQ}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr$$

ή

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + c$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο σπλισμών είναι ίση με

$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Από τον ορισμό της χωρητικότητας

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

έχουμε τελικά

$$C = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Πρόβλημα 6.6. Ένας φοιτητής συνδέει πέντε πυκνωτές σε σειρά σε μπαταρία που παρέχει διαφορά δυναμικού V . Η χωρητικότητα του πρώτου πυκνωτή (του πλησιέστερου προς τον θετικό πόλο της πηγής) είναι $C_1 = C$, ενώ οι υπόλοιποι πυκνωτές έχουν χωρητικότητες οι οποίες είναι η διπλάσια του προηγούμενου πυκνωτή στη σειρά δηλαδή $C_2 = 2C_1$, $C_3 = 2C_2$ κ.ό.κ. Να βρεθούν:

α) Το φορτίο του κάθε πυκνωτή, β) η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή, γ) η ενέργεια του κάθε πυκνωτή.

Πρόβλημα 6.7. Να γενικευτεί το προηγούμενο πρόβλημα για ένα αριθμό άπειρων πυκνωτών με την ιδιότητα $C_{n+1} = 2C_n$ με τον πρώτο να έχει χωρητικότητα $C_1 = C$ και να είναι όλοι τοποθετημένοι σε σειρά και σε πηγή τάσης V . Να βρεθούν

α) Το φορτίο του κάθε πυκνωτή, β) η ενέργεια του κάθε πυκνωτή (Σημείωση: Θα πρέπει να γίνει χρήση μιας γνωστής σειράς ακολουθίας από τα μαθηματικά).

Λύση:

α) Η ολική χωρητικότητα $C_{ολ}$ δίνεται από την

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

Από την αναδρομική σχέση έχουμε

$$C_1 = C$$

$$C_2 = 2C_1 = 2C$$

$$C_3 = 2C_2 = 2 \cdot 2C = 2^2 C$$

$$C_4 = 2C_3 = 2 \cdot 2^2 C = 2^3 C$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία είναι η εξής

$$C_n = 2^{n-1} C$$

Επομένως Η ολική χωρητικότητα $C_{ολ}$ δίνεται από την

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} + \frac{1}{2^2 C} + \dots = \frac{1}{C} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right)$$

Η έκφραση μέσα στην παρένθεση είναι η γεωμετρική σειρά $A = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ με $x = 1/2$. Αυτή η σειρά A ικανοποιεί την εξίσωση $A = 1 + xA$ οπότε λύνοντας παίρνουμε $A = 1/(1 - x)$. Επομένως

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{C}{2}$$

Αφού η συστοιχία συνδέεται σε μπαταρία τάσης V τότε ο ισοδύναμος πυκνωτής θα αποκτήσει φορτίο

$$Q = C_{ολ} V = \frac{CV}{2}$$

Όταν οι πυκνωτές βρίσκονται σε σειρά, το φορτίο τους είναι το ίδιο και είναι ίσο με το φορτίο του ισοδύναμου πυκνωτή (δείτε τη συζήτηση για δυο πυκνωτές σε σειρά στις σημειώσεις του μαθήματος). Επομένως

$$Q_n = \frac{CV}{2}$$

(ανεξάρτητο του n)

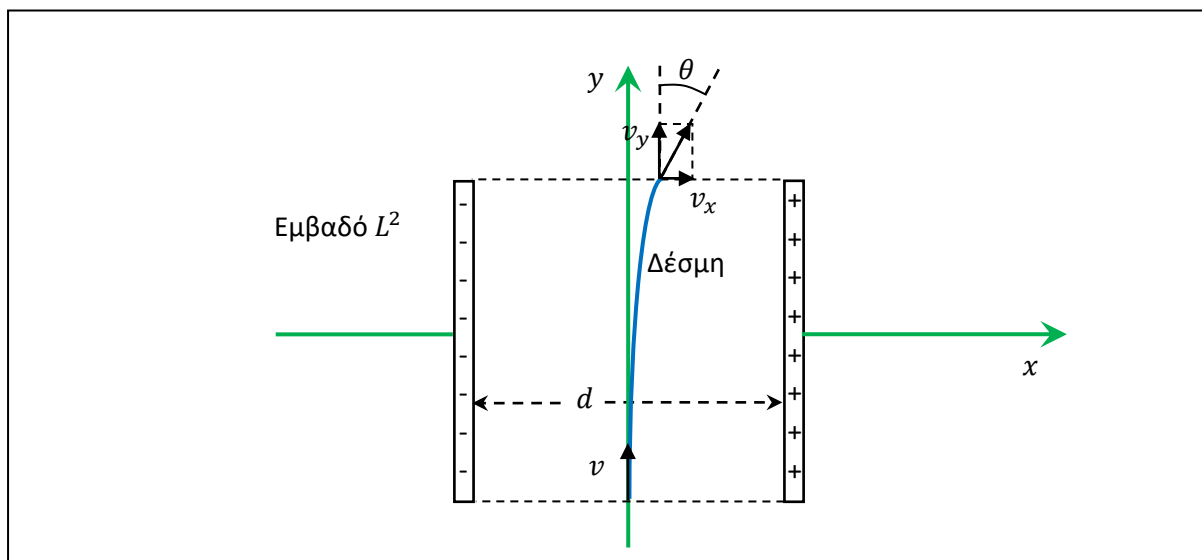
β) Ο τύπος της ενέργειας είναι

$$U_n = \frac{1}{2C_n} Q_n^2 = \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1} C} \left(\frac{CV}{2} \right)^2 = \frac{CV^2}{2^{n+2}}$$

Πρόβλημα 6.8. Ένας φοιτητής συνδέει πέντε πυκνωτές παράλληλα και φορτίζει το όλο σύστημα με συνολικό φορτίο $\pm Q$. Η χωρητικότητα του πρώτου πυκνωτή είναι $C_0 = C$, ενώ οι υπόλοιποι πυκνωτές έχουν χωρητικότητες οι οποίες είναι η μισή του προηγούμενου πυκνωτή σε σειρά δηλαδή $C_1 = C_0/2$, $C_2 = C_1/2$ κ.ό.κ. Να βρεθούν α) Το φορτίο του κάθε πυκνωτή, β) η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή, γ) Η ενέργεια του κάθε πυκνωτή.

Πρόβλημα 6.9. Να γενικευτεί το προηγούμενο πρόβλημα για ένα αριθμό N πυκνωτών με την ιδιότητα $C_n = C_{n+1}/2$ με τον πρώτο να έχει χωρητικότητα $C_0 = C$ και να είναι όλοι τοποθετημένοι παράλληλα και να έχουν φορτιστεί με συνολικό φορτίο $\pm Q$. Να βρεθούν α) Το φορτίο του κάθε πυκνωτή, β) η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή, γ) Η ενέργεια του κάθε πυκνωτή (Σημείωση: Θα πρέπει να γίνει χρήση μιας γνωστής σειράς ακολουθίας από τα μαθηματικά).

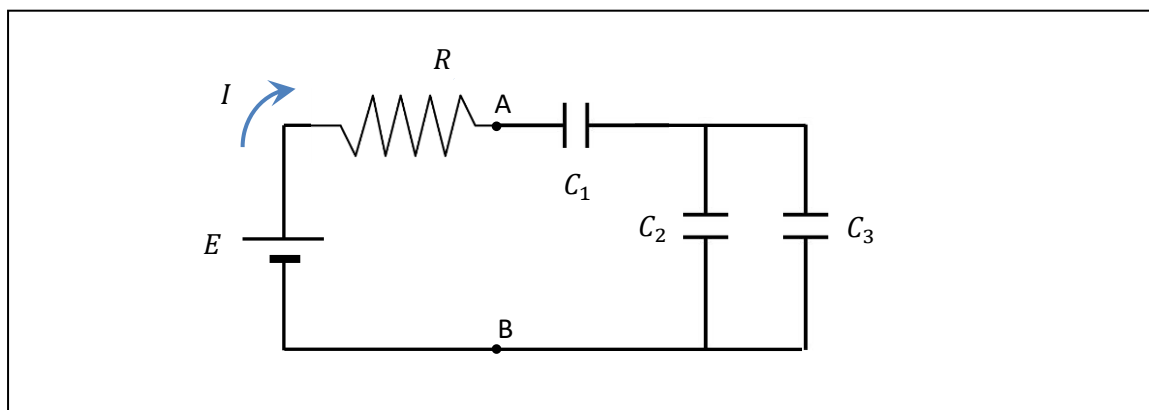
Πρόβλημα 6.10. Στο παρακάτω σχήμα μια δέσμη ηλεκτρονίων που αρχικά κινείται με μεγάλη ταχύτητα v επάνω στον άξονα y , εισέρχεται στον εσωτερικό χώρο ενός πυκνωτή ο οποίος έχει τους οπλισμούς του κάθετα στον άξονα x και συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η δέσμη αποκλίνει κατά γωνία θ η οποία μπορεί να υπολογισθεί από τις συνιστώσες της ταχύτητας των ηλεκτρονίων κατά την έξοδό τους από τον πυκνωτή, κάνοντας τις εξής παραδοχές: α) η απόκλιση είναι μικρή και άρα $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$, β) για τον ίδιο λόγο η v_x είναι μικρή και έτσι προσεγγιστικά $v_y \approx v$, γ) το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού ομοιόμορφο και σταθερό στο εσωτερικό του πυκνωτή, σαν οι οπλισμοί του να ήταν απείρου επιφανείας. Δίνονται τα χαρακτηριστικά των οπλισμών του πυκνωτή: Τετραγωνικού σχήματος διαστάσεων L^2 σε απόσταση d μεταξύ τους και με φορτίο $\pm Q$. Θεωρήστε δεδομένο το φορτίο q_e και τη μάζα m_e του ηλεκτρονίου. Πως θα άλλαζε η απάντησή σας εάν αντί για δέσμη ηλεκτρονίων είχαμε δέσμη πρωτονίων ή δέσμη νετρονίων;



Πρόβλημα 6.11. Ένας φοιτητής θέλει να κατασκευάζει ένα πυκνωτή με τους εξής γεωμετρικούς περιορισμούς: Ορθογώνιοι οπλισμοί με τον καθένα να έχει σταθερή περιφέρεια (άθροισμα πλευρών) 4 cm και απόσταση μεταξύ τους από 0.4 έως 0.6 mm . Με βάση τους δεδομένους περιορισμούς, ποια είναι η μέγιστη χωρητικότητα που μπορεί να έχει ο φοιτητής, σχεδιάζοντας κατάλληλα τον πυκνωτή

του; Εάν τον συνδέσει σε μπαταρία 12 V , πόσο θα είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του; Πόσο το φορτίο του;

Πρόβλημα 6.12. Στο παρακάτω κύκλωμα, να εξηγηθεί πως ρέει το ρεύμα στο κύκλωμα στην αρχή του χρόνου, όπου όλοι οι πυκνωτές είναι αφόρτιστοι, όταν ένα αρχικό φορτίο dq ωθείται από τον θετικό πόλο της πηγής, στον αριστερό οπλισμό του 1^{ου} πυκνωτή C_1 . Πόσο θα είναι το φορτίο στα υπόλοιπα μέρη του κυκλώματος εάν $C_3 = 3C_2$;



Πρόβλημα 6.13. Στο σχήμα του προηγούμενου προβλήματος, να βρεθεί η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα των τριών πυκνωτών εάν σε άπειρο χρόνο η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B φτάνει οριακά στην τάση της πηγής $V_0 = 12\text{ V}$. Δίνονται $C_1 = 4\text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 1\text{ }\mu\text{F}$ και $C_3 = 3\text{ }\mu\text{F}$. Να βρεθεί το οριακό φορτίο του κάθε πυκνωτή.

Πρόβλημα 6.14. Για τον πυκνωτή του Σχήματος 6.3 ο οποίος αποτελείται από έναν κυλινδρικό οπλισμό ακτίνας R_1 και μήκους L και ο οποίος περιβάλλεται από εξωτερικό λεπτό κυλινδρικό κέλυφος ακτίνας $R_2 > R_1$, ομοαξονικό με τον εσωτερικό οπλισμό και ίσου μήκους με αυτόν, να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες στο εσωτερικό του. Θεωρήστε ότι οι δυο οπλισμοί φέρουν φορτίο $\pm Q$ με τον εσωτερικό οπλισμό να είναι ο θετικός.

Πρόβλημα 6.15. Να γίνει το ίδιο και για τον πυκνωτή του Προβλήματος 6.3 ο οποίος αποτελείται από έναν σφαιρικό εσωτερικό οπλισμό ακτίνας R_1 ο οποίος περιβάλλεται από εξωτερικό λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας $R_2 > R_1$, ομόκεντρο με τον εσωτερικό οπλισμό. Θεωρήστε ότι ο θετικός οπλισμός είναι ο εσωτερικός.

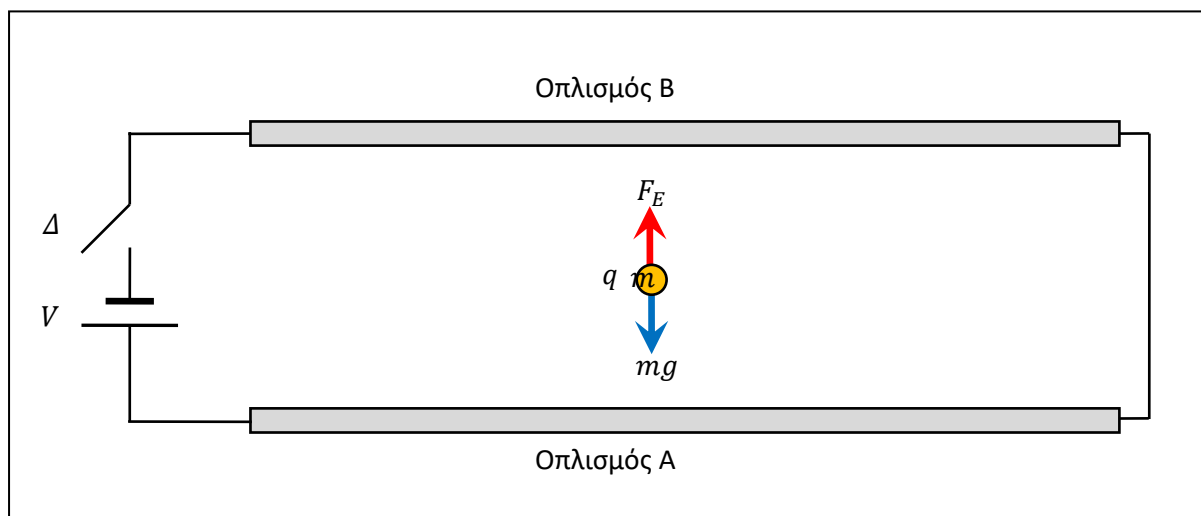
Πρόβλημα 6.16. Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται ένας επίπεδος πυκνωτής με οριζόντιους οπλισμούς ο οποίος συνδέεται μέσω διακόπτη Δ με ηλεκτρική πηγή τάσης $V = 100\text{ Volt}$. Μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή ισορροπεί φορτισμένο σωματίδιο μάζας m ενός μιλιγραμμαρίου με ηλεκτρικό φορτίο $q = 1\text{ nC}$. Ο θετικός πόλος της πηγής συνδέεται με τον οπλισμό A του πυκνωτή που βρίσκεται κάτω από το φορτισμένο σωματίδιο, ενώ ο αρνητικός πόλος της πηγής συνδέεται με τον διακόπτη και στην συνέχεια με τον οπλισμό B του πυκνωτή που βρίσκεται πάνω από το φορτισμένο σωματίδιο.

α) Με κλειστό τον διακόπτη Δ , να βρείτε το πρόσημο του φορτίου του σωματιδίου και την απόσταση d μεταξύ των οπλισμών.

β) Εάν ανοίξουμε τον διακόπτη να βρείτε την μεταβολή του φορτίου του πυκνωτή. Θα συνεχίζει να ισορροπεί το φορτισμένο σωματίδιο;

γ) Κλείνουμε ξανά τον διακόπτη και εισάγουμε ακαριαία κάποιο αέριο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή με διπλάσια διηλεκτρική σταθερά από αυτή του αέρα. Θα συνεχίζει να ισορροπεί το φορτισμένο σωματίδιο; Ποια είναι η μεταβολή της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή σε σχέση με την αρχική της τιμή;

δ) Με κλειστό τον διακόπτη διπλασιάζουμε ακαριαία την απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. Τι θα συμβεί στο φορτισμένο σωματίδιο; Πως θα μεταβληθεί η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή;



Λύση:

α) Το πρόσημο του φορτίου του σωματιδίου όπως φαίνεται και από την γεωμετρία του σχήματος είναι θετικό. Την απόσταση μεταξύ των οπλισμών μπορούμε να την υπολογίσουμε από την ισορροπία του σωματιδίου στον κατακόρυφο άξονα.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_E = B \Rightarrow qE = m g$$

Από την Εξ. 6.3

$$\frac{V}{d} q = m g \Rightarrow d = \frac{Vq}{mg}$$

Αντικαθιστώντας $d = 1 \text{ cm}$.

β) Όταν ανοίγουμε τον διακόπτη, τα ηλεκτρικά φορτία παραμένουν στους οπλισμούς του πυκνωτή αφού δεν υπάρχει αγωγή διαδρομή για να μετακινηθούν. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να παραμένει σταθερή και η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή. Ο πυκνωτής παραμένει φορτισμένος. Η δύναμη που δέχεται το σωματίδιο από το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση

$$F_E = Eq = \frac{V}{d} q$$

Αντικαθιστώντας $F = 10^{-5} \text{ N}$. Άρα η δύναμη παραμένει σταθερή και το σωματίδιο συνεχίζει να ισορροπεί.

γ) Με την εισαγωγή του διηλεκτρικού, μεταβάλλεται η χωρητικότητα του πυκνωτή επειδή αλλάζει η διηλεκτρική σταθερά του από ϵ_0 σε $\epsilon = 2\epsilon_0$ και όπως συζητήσαμε στο εδάφιο "Διηλεκτρικά", η νέα χωρητικότητα εμπεριέχει το ϵ στη θέση του ϵ_0 , δηλαδή ισούται με

$$C' = \epsilon \frac{A}{d} = 2\epsilon_0 \frac{A}{d} = 2C$$

Επομένως η χωρητικότητα διπλασιάζεται. Αφού έχουμε κλειστό τον διακόπτη Δ , η διαφορά δυναμικού παραμένει σταθερή και ίση με αυτή της πηγής. Από την Εξ. 6.3, αυτό σημαίνει ότι και το ηλεκτρικό πεδίο παραμένει σταθερό και άρα και η δύναμη που δέχεται το φορτίο παραμένει σταθερή και έτσι το φορτίο συνεχίζει να παραμένει ακίνητο. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή διπλασιάζεται αφού από την Εξ. 6.8 έχουμε

$$U' = \frac{1}{2} C' V^2 = \frac{1}{2} 2C V^2 = 2U$$

και άρα η μεταβολή της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή ισούται με $\Delta U = 2U - U = U$, δηλαδή ίση με την αρχική τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας.

δ) Η χωρητικότητα του πυκνωτή σε αυτή την περίπτωση υποδιπλασιάζεται αφού από την Εξ. 6.8 φαίνεται ότι η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι αντιστρόφως ανάλογη με την απόσταση μεταξύ των οπλισμών. Επίσης, από την Εξ. 6.3 βλέπουμε ότι υποδιπλασιάζεται και το ηλεκτρικό πεδίο

$$E' = \frac{V}{d'} = \frac{V}{2d} = \frac{E}{2}$$

και άρα και η δύναμη που δέχεται το φορτισμένο σωματίδιο από το πεδίο του πυκνωτή υποδιπλασιάζεται. Αυτό σημαίνει ότι το σωματίδιο θα κινηθεί προς τα κάτω με επιτάχυνση που υπολογίζεται από την σχέση

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{mg - F'}{m} = \frac{mg - F/2}{m} = \frac{mg - mg/2}{m} = \frac{mg/2}{m} = \frac{g}{2}$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι στην αρχική ισορροπία $F = mg$). Αφού η χωρητικότητα του πυκνωτή υποδιπλασιάζεται, η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου γίνεται

$$U' = \frac{1}{2} C' V^2 = \frac{U}{2}$$

Πρόβλημα 6.17. Αν θεωρήσουμε ότι το ομοαξονικό καλώδιο που μεταφέρει το σήμα της καλωδιακής τηλεόρασης στο σπίτι μας είναι ένας κυλινδρικός πυκνωτής με εξωτερική ακτίνα 1 cm και είναι γεμισμένο με πολυαιθυλένιο, υλικό που όπως φαίνεται από τον πίνακα 6.1 έχει σχετική διηλεκτρική σταθερά 2.25, να υπολογίσετε την εσωτερική ακτίνα αν γνωρίζετε ότι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του καλωδίου είναι 40 pF/m .

Απάντηση: 0.249 cm

Λύση:

Η χωρητικότητα του κυλινδρικού πυκνωτή υπολογίζεται από την Εξ. 6.5. Η εσωτερική ακτίνα R_1 βρίσκεται ως εξής:

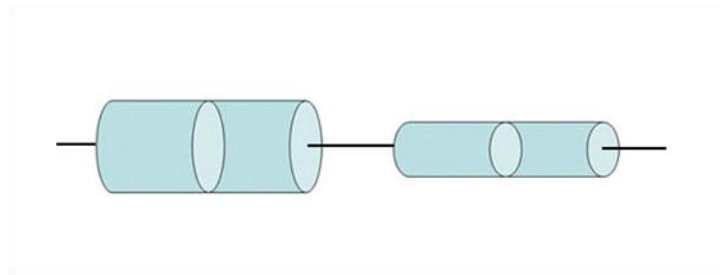
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{2\pi\epsilon_0}{\frac{C}{L}} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = e^{\frac{2\pi\epsilon_0 L}{C}} \Rightarrow R_1 = R_2 e^{\frac{-2\pi\epsilon_0 L}{C}}$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε την τιμή $R_1 = 0.249 \text{ cm}$.

7. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ και ο ΝΟΜΟΣ του ΟΗΜ

Πρόβλημα 7.1. Δυο κυλινδρικοί αγωγοί αλουμινίου ίσου μήκους μήκους $L = 2.5 \text{ m}$ έχουν διάμετρο $d_1 = 1.6 \text{ mm}$, και d_2 αντίστοιχα. Όταν τους συνδέουμε σε σειρά έχουν αντίσταση $R = 0.1 \Omega$. Εάν η ειδική αντίσταση του αλουμινίου είναι $2.65 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$, να βρεθεί η διάμετρος d_1 σε m . Δίνονται τα L , R και d_2 (σε αντιστοιχία):



Απάντηση: 1.12 mm

Λύση:

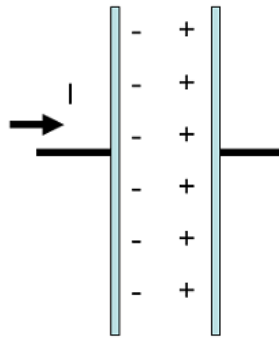
$$R = \frac{4\rho L}{\pi d_1^2} + \frac{4\rho L}{\pi d_2^2} \Rightarrow \frac{4\rho L}{\pi d_2^2} = R - \frac{4\rho L}{\pi d_1^2} \Rightarrow$$

$$\pi d_2^2 = \frac{4\rho L}{R - \frac{4\rho L}{\pi d_1^2}} \Rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{4\rho L}{\pi \left(R - \frac{4\rho L}{\pi d_1^2} \right)}}$$

Πρέπει

$$R > \frac{4\rho L}{\pi d_1^2}$$

Πρόβλημα 7.2. Στον πυκνωτή του παρακάτω σχήματος υπάρχει αρχικά αποθηκευμένο φορτίο $q = 2 \mu\text{C}$ με την πολικότητα που δείχνεται. Ξαφνικά εφαρμόζεται για συνολικό χρόνο $\Delta t = 1.4 \text{ ms}$ ένα σταθερό ρεύμα $I = 1.5 \text{ mA}$ με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε το τελικό φορτίο του πυκνωτή.

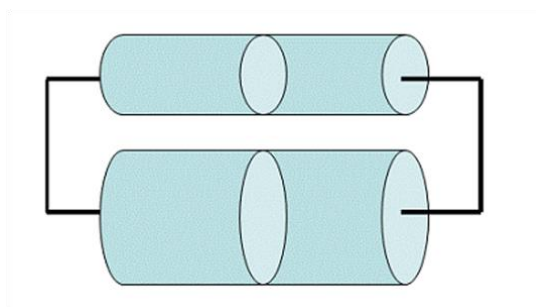


Απάντηση: $Q(t) = 0.1 \mu C$

Λύση: Σε αυτό το πρόβλημα τονίζεται η σημασία του συμβατικού ρεύματος ως ρεύμα θετικών φορτίων. Έτσι στον αριστερό οπλισμό το ρεύμα μεταφέρει θετικό φορτίο q_I το οποίο σε χρόνο Δt θα ισούται με $q_I = I\Delta t$. Το ήδη υπάρχον φορτίο εκεί είναι αρνητικό και ίσο με $-q$ και άρα το συνολικό φορτίο θα ισούται με $Q = q_I - q = I\Delta t - q$. Στον αρνητικό οπλισμό τα πρόσημα είναι αντίστροφα, δηλαδή το ρεύμα αφαιρεί φορτία από το αρχικά τοποθετημένο φορτίο εκεί. Όπως και να έχει, κατ' απόλυτη τιμή το τελικό φορτίο στους οπλισμούς είναι

$$Q(t) = |-q + I\Delta t|$$

Πρόβλημα 7.3. Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής συνδέει παράλληλα δυο συρμάτινους κυλινδρικούς αγωγούς του ίδιου υλικού και του ίδιου μήκους αλλά με διαφορετικές διαμέτρους d_1 και $d_2 = \kappa d_1$ όπου $\kappa > 1$. Εάν η αντίσταση του λεπτού αγωγού είναι ίση με R , να βρεθεί η ολική αντίσταση σε Ω . Δίνονται τα κ και R :



Απάντηση: $R/(\kappa^2 + 1)$

Λύση:

Η αντίσταση του 1^{ου} αγωγού είναι

$$R = \frac{4\rho L}{\pi d_1^2}$$

ενώ του 2^{ου} αγωγού:

$$R' = \frac{4\rho L}{\pi d_2^2} = \frac{4\rho L}{\kappa^2 \pi d_1^2} = \frac{R}{\kappa^2}$$

Αφού οι δυο αγωγοί συνδέονται παράλληλα, η ολική αντίσταση θα δίνεται από την

$$R_{ολ} = \frac{RR'}{R + R'} = \frac{R \cdot \frac{R}{\kappa^2}}{R + \frac{R}{\kappa^2}} = \frac{R}{\kappa^2 + 1}$$

Πρόβλημα 7.4.

Ένας φοιτητής συνδέει παράλληλα δυο συρματινούς κυλινδρικούς αγωγούς του ίδιου μήκους $L = 2 \text{ cm}$ αλλά διαφορετικού υλικού, έστω u_1 και u_2 και με διαφορετικές ακτίνες $a_1 = 0.4 \text{ mm}$ και $a_2 = 2a_1$ αντίστοιχα και μετράει την αντίστασή τους ίση με $R_{\pi} = 2.4 \Omega$. Όταν τους συνδέει σε σειρά βρίσκει αντίστασή $R_{\sigma} = 10 \Omega$. Να βρεθεί η ειδική αντίσταση του κάθε αγωγού εάν γνωρίζετε ότι η μεγαλύτερη από αυτές δεν είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της μικρότερης.

Λύση:

Έστω R_1 και R_2 οι αντιστάσεις του κάθε αγωγού. Από τα δεδομένα έχουμε

$$R_1 + R_2 = 10$$

και

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2.4$$

Η δεύτερη με την βοήθεια της πρώτης γίνεται

$$R_1 R_2 = 24$$

η οποία όταν αντικατασταθεί στην πρώτη, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$R_1 + 24/R_1 = 10 \Rightarrow R_1^2 - 10R_1 + 24 = 0$$

η λύση του οποίου δίνει $R_1 = 4$ ή $R_1 = 6 \Omega$. Από τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε αντίστοιχα $R_2 = 6$ ή $R_2 = 4 \Omega$. Από την σχέση αντίστασης – ειδικής αντίστασης έχουμε:

$$R_1 = \rho_1 \frac{L}{A_1} = \rho_1 \frac{L}{\pi a_1^2}$$

$$R_2 = \rho_2 \frac{L}{A_2} = \rho_2 \frac{L}{\pi a_2^2}$$

Μπορούμε να λύσουμε τις παραπάνω ως προς ρ . Για το πρώτο ζεύγος τιμών έχουμε:

$$\rho_1 = \pi \frac{R_1 a_1^2}{L} = \pi \frac{4(0.4 \times 10^{-3})^2}{2 \times 10^{-2}} = 1.00 \times 10^{-4} \Omega \cdot m$$

$$\rho_2 = \pi \frac{R_2 a_2^2}{L} = \pi \frac{6(0.8 \times 10^{-3})^2}{2 \times 10^{-2}} = 6.03 \times 10^{-4} \Omega \cdot m$$

Αφού όμως από τα δεδομένα η μεγαλύτερη από αυτές δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της μικρότερης, αυτό το ζεύγος λύσεων απορρίπτεται. Για το δεύτερο ζεύγος τιμών έχουμε:

$$\rho_1 = \pi \frac{R_1 a_1^2}{L} = \pi \frac{6(0.4 \times 10^{-3})^2}{2 \times 10^{-2}} = 4.02 \times 10^{-4} \Omega \cdot m$$

$$\rho_2 = \pi \frac{R_2 a_2^2}{L} = \pi \frac{4(0.8 \times 10^{-3})^2}{2 \times 10^{-2}} = 1.51 \times 10^{-4} \Omega \cdot m$$

Αυτή η λύση είναι αποδεκτή αφού $3\rho_2 < \rho_1$.

8. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Πρόβλημα 8.1.

Μια πηγή ηλεκτρονίων εκπέμπει ηλεκτρόνια με ρυθμό 10^{10} ανά δευτερόλεπτο και με ταχύτητα $v = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$ με την ίδια φορά όπως το φορτίο που εικονίζεται στο Σχήμα 8.5. Να βρεθούν τα εξής: (α) Το ρεύμα εισόδου των ηλεκτρονίων στον μαγνήτη. (β) Η δύναμη που ασκείται στο κάθε ηλεκτρόνιο εάν το πεδίο του μαγνήτη είναι ίσο με 5 T . (γ) Το ρεύμα εξόδου των ηλεκτρονίων από τον μαγνήτη. (δ) Τη φορά του ρεύματος εξόδου εάν υποθέσουμε ότι ο μαγνήτης στρίβει τη δέσμη κατά γωνία 90° . (ε) Η ισχύς σε *Watt* που αποδίδεται στη δέσμη των ηλεκτρονίων

Λύση:

(α) Ο ορισμός του ρεύματος I είναι φορτίο ανά μονάδα χρόνου. Το φορτίο ενός ηλεκτρονίου είναι ίσο με

$$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

και αφού τα ηλεκτρόνια εξέρχονται με ρυθμό 10^{10} ανά δευτερόλεπτο, τότε η πηγή παρέχει ένα ηλεκτρόνιο ανά χρόνο $t = 10^{-10} \text{ s}$ στη δέσμη και επομένως

$$I = \frac{q}{t} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{10^{-10}} = 1.6 \times 10^{-9} \text{ A}$$

(β) Η δύναμη είναι ίση με

$$F = qvB = 1.6 \times 10^{-19} \times 2.5 \times 10^4 \times 5 = 2.0 \times 10^{-14} \text{ N}$$

(γ) Ο μαγνήτης δεν επιταχύνει ή επιβραδύνει τα ηλεκτρόνια, απλά τους αλλάζει κατεύθυνση και επομένως ο ρυθμός εξόδου θα είναι ίσος με τον ρυθμός εισόδου και το ρεύμα εξόδου θα είναι το ίδιο με το ρεύμα εισόδου

(δ) Ο νόμος του δεξιού χεριού εφαρμόζεται σε θετικά φορτία. Σε μια τέτοια περίπτωση η δύναμη θα ήταν προς τα έξω της σελίδας (δείτε και το Σχήμα 8.7). Αφού το ηλεκτρόνιο είναι αρνητικά φορτισμένο, η δύναμη έχει την ακριβώς αντίθετη φορά και έτσι είναι προς τα μέσα της σελίδας.

(ε) Η δύναμη αυτή είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα του ηλεκτρονίου και άρα και κάθετη στη στοιχειώδη μετατόπιση ds ενός ηλεκτρονίου μέσα σε χρόνο dt . Άρα το αντίστοιχο έργο dW είναι μηδέν αφού

$$dW = Fds \cos 90^\circ = 0$$

και άρα και η ισχύς είναι μηδέν:

$$P = \frac{dW}{ds} = 0$$

Στην ουσία αυτή η δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου και όπως είδαμε στη Φυσική I, η δύναμη αυτή δεν αφαιρεί ούτε προσθέτει ενέργεια στην κυκλική τροχιά και άρα το έργο της σε οποιαδήποτε διαδρομή της τροχιάς είναι μηδέν.

Πρόβλημα 8.2.

Θεωρήστε ένα σωματίδιο με μάζα $m = 10^{-3} \text{ kg}$ και θετικό φορτίο $q = 1.2 \times 10^{-3} \text{ C}$ το οποίο εισέρχεται στην περιοχή ενός μεγάλου μαγνήτη κάθετα στις δυναμικές του γραμμές με ταχύτητα $v = 20 \text{ m/s}$. Πόσο πρέπει να είναι το μαγνητικό πεδίο ώστε σε χρόνο $t = 10 \text{ s}$ να έχει αναγκάσει το ηλεκτρόνιο να περιστραφεί κατά γωνία 90° σε σχέση με την αρχική του πορεία;

Λύση:

Η μαγνητική δύναμη είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα του φορτίου και στην ουσία παίζει το ρόλο της κεντρομόλου αναγκάζοντας το φορτίο να κινηθεί σε κύκλο ακτίνας R με γωνιακή ταχύτητα $\omega = v/R$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow qB = \frac{mv}{R} = m\omega$$

Εφόσον παίρνει 10 s για μια στροφή 90° , τότε θα χρειαστεί τετραπλάσιος χρόνος 40 s για μια γωνία 360° και άρα στην ουσία αυτός ο χρόνος είναι η περίοδος $T = 40 \text{ s}$ και άρα

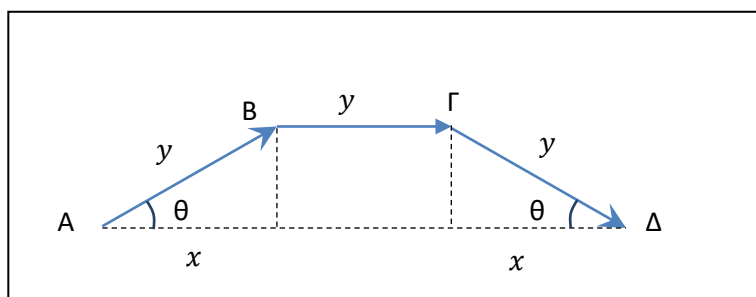
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{20}$$

Λύνοντας ως προς B και αντικαθιστώντας τα δεδομένα, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$B = \frac{m\omega}{q} = \frac{10^{-3} \times \pi}{1.2 \times 10^{-3} \times 20} = 0.131 \text{ T}$$

Πρόβλημα 8.3.

Στο παρακάτω σχήμα, ο ρευματοφόρος αγωγός ΑΒΓΔ βρίσκεται μέσα στη σελίδα και αποτελείται από τρία συνδεδεμένα ευθύγραμμα τμήματα με ίσο μήκος y το καθένα. Το ρεύμα του αγωγού είναι I με τη φορά που δείχνεται και υπάρχει μαγνητικό πεδίο B κάθετο στη σελίδα το οποίο ασκεί μια δύναμη μέτρου F στον αγωγό. Να βρεθεί το μήκος y δεδομένων των F , B , θ , και I



Απάντηση: $y = F/B I (2\cos\theta + 1)$

Λύση:

Η δύναμη σε αγωγό τυχαίου σχήματος ισούται με

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

όπου $\vec{L}$ είναι το διάνυσμα που ενώνει τις δυο άκρες του αγωγού, δηλαδή το διάνυσμα $\vec{AD}$ με μήκος $2x + y$. Επειδή αυτό το διάνυσμα είναι κάθετο στο $\vec{B}$, τότε το μέτρο της δύναμης είναι ίσο με

$$F = BIL\sin 90^\circ = BIL = BI(2x + y)$$

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας μπορούμε να βρούμε το x :

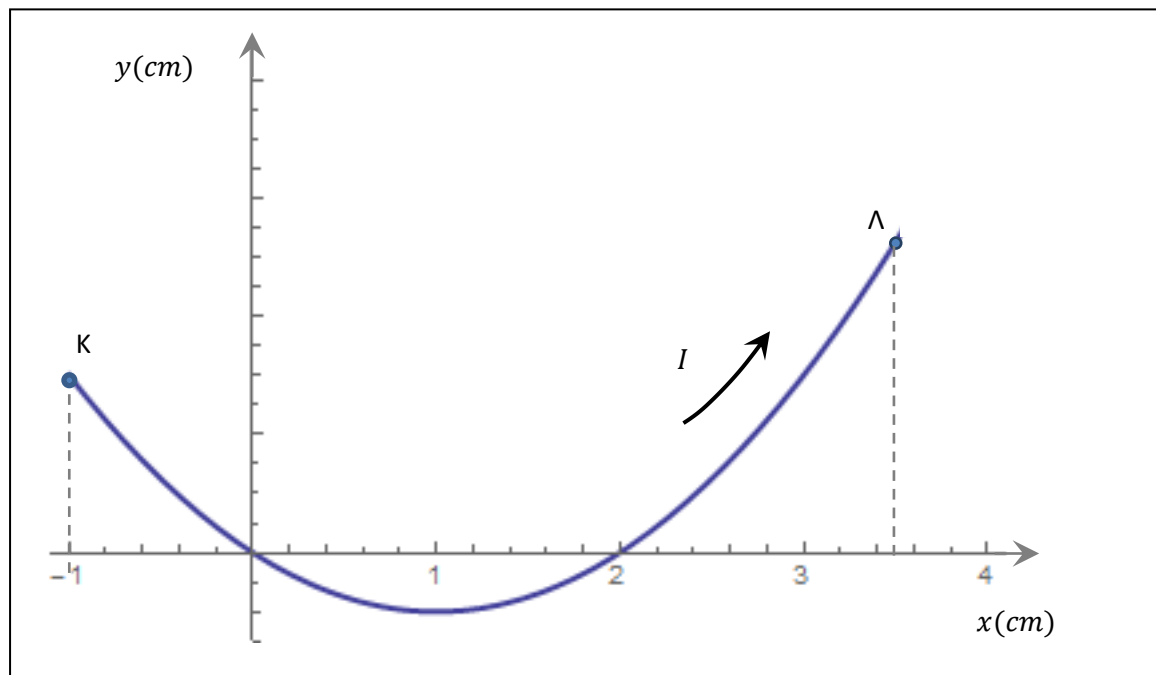
$$x = y\cos\theta$$

Οπότε

$$F = BI(2\cos\theta + 1)y \Rightarrow y = \frac{F}{BI(2\cos\theta + 1)}$$

Πρόβλημα 8.4.

Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα της καμπύλης ΚΛ μεταξύ $x = -1$ και $x = 3.5$ αντιστοιχεί σε ένα αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα $I = 1.5 \text{ A}$ με τη φορά που δείχνεται. Η καμπύλη είναι δευτεροβάθμια ως προς x με ρίζες στα $x = 0$ και $x = 2$ και ελάχιστο στο $y = -2$. Ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0(\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_y)$ όπου $B_0 = 0.4 \text{ T}$ εφαρμόζεται στην περιοχή όπου ανήκει ο αγωγός. Να βρεθεί η αντίστοιχη μαγνητική δύναμη σε Newton που ασκείται στον αγωγό. (Σημείωση: Θυμηθείτε ότι $\tan(-x) = -\tan x$ και αντιστρόφως)



Απάντηση: 0.0738 N , προς τα μέσα της σελίδας.

Λύση: Η δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό δίνεται από την

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

όπου $\vec{L}$ το διάνυσμα που ενώνει την αρχή και το πέρας του αγωγού, δηλαδή $\vec{L} = \overrightarrow{KL}$. Η καμπύλη περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = ax(x - 2)$$

με ελάχιστο εκεί όπου

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow (x - 2) + x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y(1) = -a$$

Από τα δεδομένα στο ελάχιστο $y = -2$ άρα $a = 2$ και $y = 2x(x - 2)$. Οι συντεταγμένες στα σημεία Κ και Λ είναι

$$K: \quad y_K = y(-1) = 2(-1)(-1 - 2) = 6$$

$$L: \quad y_L = y(3.5) = 7(1.5) = 10.5$$

Το διάνυσμα $\vec{L} = \overrightarrow{KL}$ έχει συντεταγμένες τη διαφορά των συντεταγμένων των Λ και Κ:

$$x_L - x_K = 3.5 - (-1) = 4.5$$

και

$$y_L - y_K = 10.5 - 6 = 4.5$$

(ίσα x και y) και άρα έχει μέτρο

$$L = \sqrt{4.5^2 + 4.5^2} = 4.5\sqrt{2} \text{ cm} = 0.045\sqrt{2} \text{ m}$$

και γωνία

$$\theta_L = \text{atan}\left(\frac{4.5}{4.5}\right) = 45^\circ$$

Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0(\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_y)$ έχει συντεταγμένες $B_x = B_0$ και $B_y = -B_0\sqrt{3}$ και άρα έχει μέτρο

$$B = \sqrt{B_0^2 + 3B_0^2} = B_0\sqrt{4} = 2B_0 = 0.8 \text{ T}$$

και γωνία

$$\theta_B = \text{atan}\left(\frac{-B_0\sqrt{3}}{B_0}\right) = \text{atan}(-\sqrt{3}) = -30^\circ$$

Η γωνία θ μεταξύ των δυο αυτών διανυσμάτων ισούται με

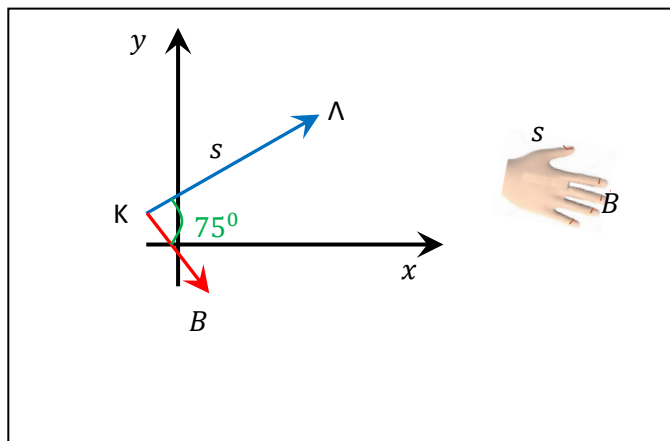
$$\theta = \theta_L - \theta_B = 45^\circ - (-30^\circ) = 75^\circ$$

Η μαγνητική δύναμη στον αγωγό ισούται με

$$F = ILB \sin \theta = 0.045 \sqrt{2} IB \sin(75^\circ) = 1.5 \times 0.045 \sqrt{2} \times 0.8 \times \sin(75^\circ) \text{ N}$$

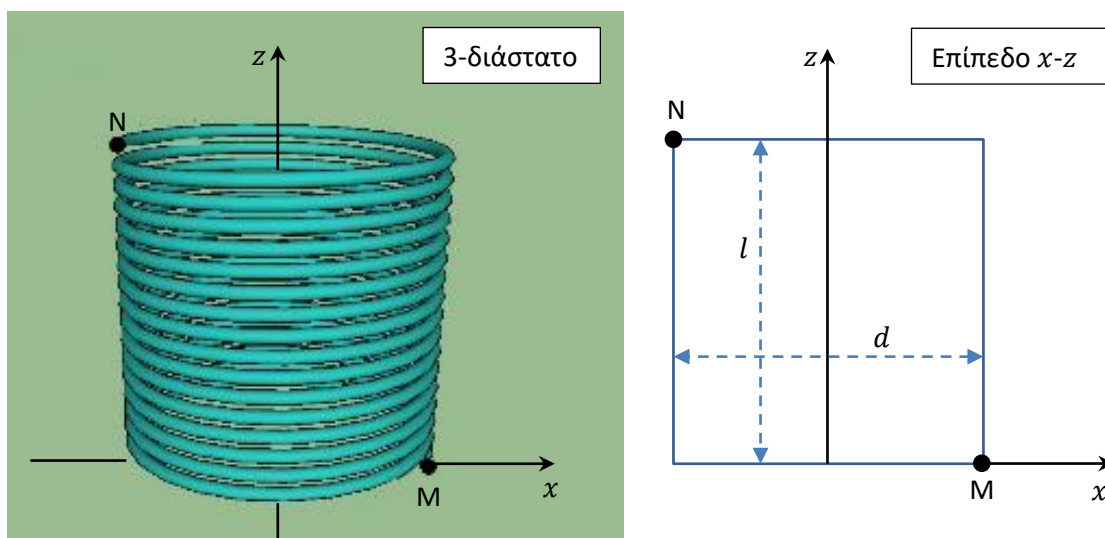
$$F = 0.0738 \text{ N}$$

Η φορά της δύναμης σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού είναι προς τα μέσα της σελίδας.



Πρόβλημα 8.5.

Ο παρακάτω αγωγός έχει το σχήμα πηνίου συμμετρικά τυλιγμένου γύρω από τον άξονα z , έχει μήκος $l = 5 \text{ cm}$, διάμετρο $d = 4.2 \text{ cm}$ και αποτελείται συνολικά από 16.5 (δεκαεξίμιση) σπείρες. Διαρρέεται από ρεύμα $I = 3.5 \text{ A}$ το οποίο εισέρχεται στο σημείο M και εξέρχεται στο σημείο N , με τα σημεία M και N να ανήκουν και τα δυο στο επίπεδο x - z . Εάν στο χώρο που βρίσκεται αυτό το πηνίο, εφαρμοστεί ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\vec{e}_z$ με $B = 1.8 \text{ T}$, τότε να βρεθεί η μαγνητική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο πηνίο.



Απάντηση: 0.265 N , προς τα μέσα της σελίδας.

Λύση:

Η δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό δίνεται από την

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

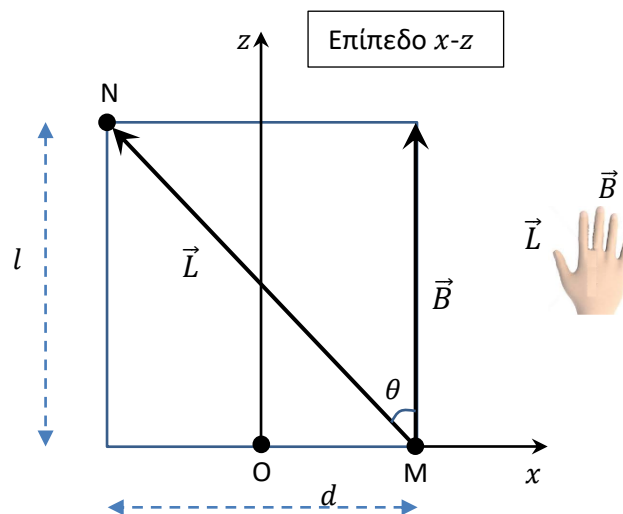
όπου $\vec{L}$ το διάνυσμα που ενώνει την αρχή και το πέρας του αγωγού, δηλαδή $\vec{L} = \overrightarrow{MN}$. Εφόσον τα Μ και Ν ανήκουν στο επίπεδο x - z , τότε και το $\vec{L}$ ανήκει σε αυτό το επίπεδο και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, σχηματίζει γωνία θ με το μαγνητικό πεδίο. Το μέτρο της δύναμης ισούται με

$$F = ILB\sin\theta$$

Από απλή τριγωνομετρία, το γινόμενο $L\sin\theta$ είναι ίσο με την διάμετρο d του πηνίου και έτσι

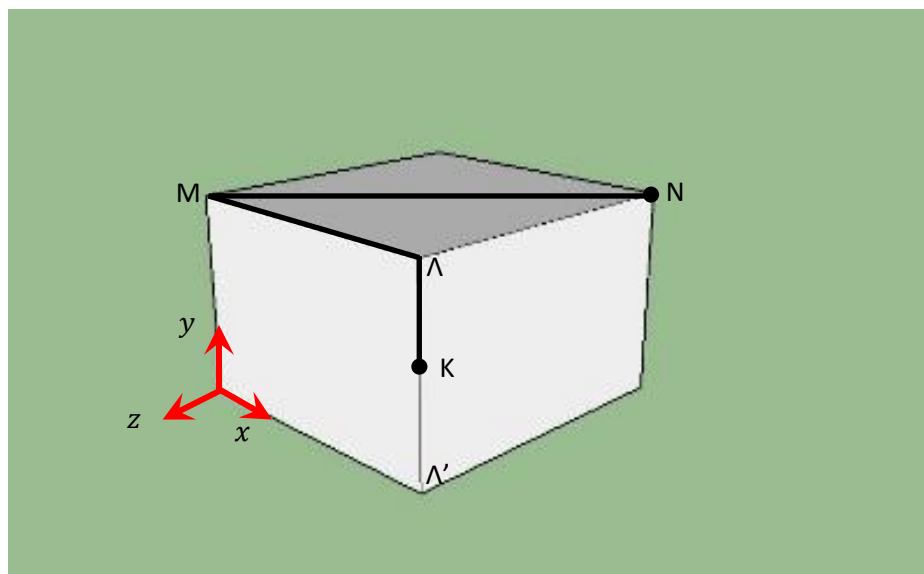
$$F = IBd = 3.5 \times 1.8 \times 0.042 = 0.265 \text{ N}$$

Η φορά της δύναμης δίνεται από τον νόμο της δεξιάς παλάμης (φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω σχήμα) και είναι προς τα μέσα της σελίδας.

Πρόβλημα 8.6.

Ο παρακάτω αγωγός ΚΛΜΝ αποτελείται από 3 ευθύγραμμα τμήματα με τα σημεία Λ, Μ και Ν να είναι τρεις από τις οκτώ κορυφές ενός κύβου πλευράς $a = 2.8 \text{ cm}$ και το σημείο Κ να είναι το μέσο της ακμής ΛΛ' του κύβου. Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα $I = 1.5 \text{ A}$ το οποίο εισέρχεται στο σημείο Κ και εξέρχεται στο σημείο Ν. Εάν στο χώρο που βρίσκεται αυτός ο

αγωγός, εφαρμοστεί ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = -B\vec{e}_z$ με $B = 0.7\text{ T}$, τότε να βρεθεί η μαγνητική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στον αγωγό.



Απάντηση: 0.0147 N , προς την κατεύθυνση $-x$.

Λύση:

Η δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό δίνεται από την

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

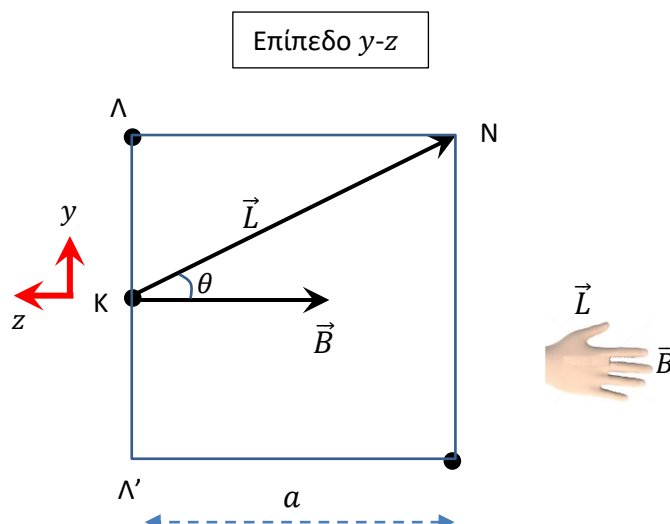
όπου $\vec{L}$ το διάνυσμα που ενώνει την αρχή και το πέρας του αγωγού, δηλαδή $\vec{L} = \overrightarrow{KN}$. Εφόσον τα K και N ανήκουν στο επίπεδο $y-z$, τότε και το $\vec{L}$ ανήκει σε αυτό το επίπεδο και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, σχηματίζει γωνία θ με το μαγνητικό πεδίο. Το μέτρο της δύναμης ισούται με

$$F = ILB\sin\theta$$

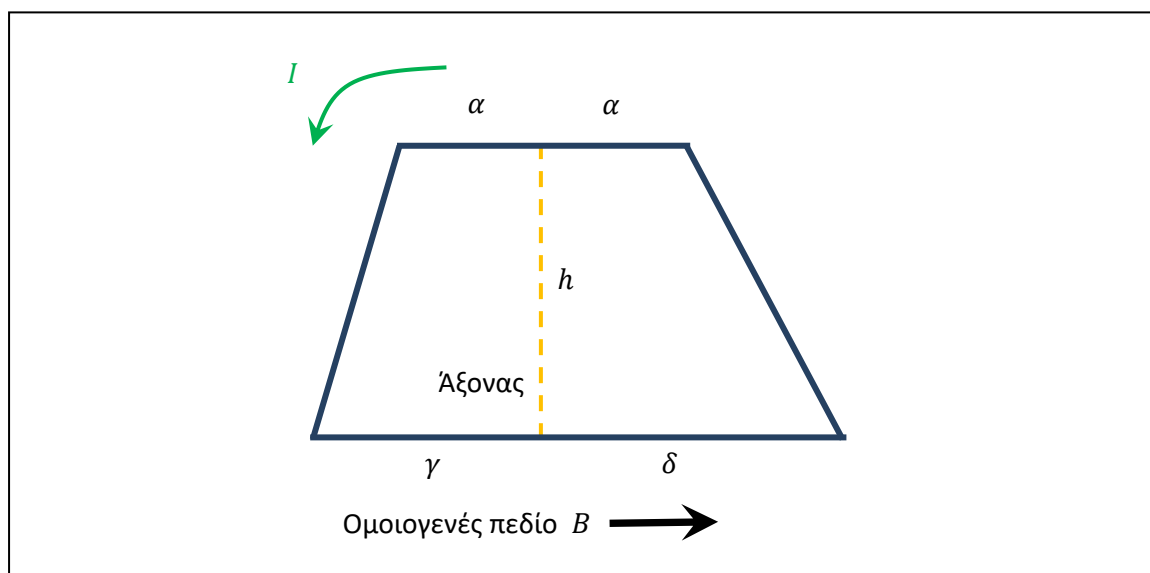
Από απλή τριγωνομετρία, το γινόμενο $L\sin\theta$ είναι ίσο με το μήκος ΛK το οποίο ισούται με την μισή πλευρά $a/2 = 0.014\text{ m}$ του κύβου και έτσι

$$F = I Ba = 1.5 \times 0.7 \times 0.014 = 0.0147\text{ N}$$

Η φορά της δύναμης δίνεται από τον νόμο της δεξιάς παλάμης (φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω σχήμα) και είναι προς τα μέσα της σελίδας δηλαδή προς την κατεύθυνση $-x$.

Πρόβλημα 8.7.

Στο παρακάτω σχήμα ένας κλειστός αγωγός σχήματος τραπεζίου διαρρέεται από ρεύμα I , με τις δυο παράλληλες πλευρές του να έχουν μήκος 2α και $\gamma + \delta$ αντίστοιχα και να απέχουν απόσταση h μεταξύ τους. Ο αγωγός τοποθετείται μέσα σε περιοχή με ομοιογενές μαγνητικό πεδίο το οποίο είναι παράλληλο με τις δυο παράλληλες πλευρές του αγωγού. α) Να υπολογισθεί η μαγνητική δύναμη και η ροπή που δρα στην κάθε πλευρά του αγωγού ξεχωριστά. β) Να υπολογισθεί η συνολική μαγνητική δύναμη και η συνολική ροπή που δράνε στον αγωγό. Όλες οι ροπές να υπολογισθούν γύρω από τον άξονα που τέμνει την πάνω πλευρά κάθετα στο μέσο της, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Λύση:

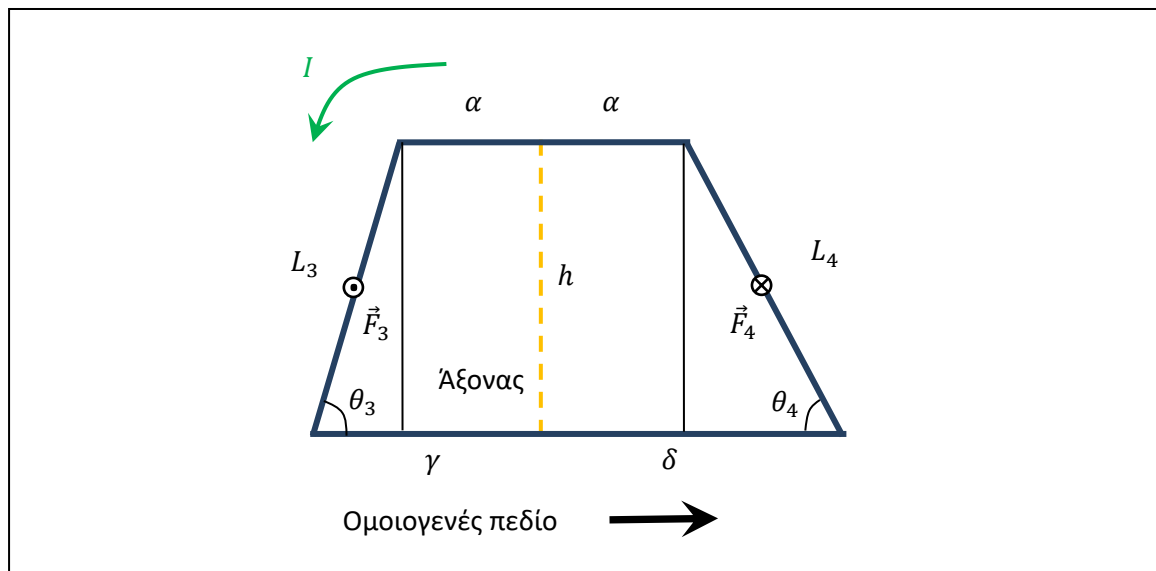
Η μαγνητική δύναμη είναι ίση κατά μέτρο με

$$F = BIL\sin\theta$$

όπου B , I , L και θ είναι αντίστοιχα το μαγνητικό πεδίο, το ρεύμα, το μήκος και η γωνία θ μεταξύ του αγωγού και του πεδίου. Έτσι στις πάνω και κάτω πλευρές $F_1 = F_2 = 0$ επειδή το πεδίο B είναι παράλληλο με τον αγωγό. Στην αριστερή πλευρά έχουμε

$$F_3 = IL_3 B \sin\theta_3$$

όπου L_3 είναι το μήκος της όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και η θ_3 η γωνία στην κάτω αριστερή γωνία:



Από το τρίγωνο στα αριστερά

$$\sin\theta_3 = \frac{h}{L_3} \Rightarrow L_3 \sin\theta_3 = h$$

οπότε

$$F_3 = BIh$$

Η φορά αυτής της δύναμης είναι προς τα έξω της σελίδας. Εάν θεωρήσουμε ότι δρα στο κέντρο τα αριστερής πλευράς του τραπεζίου (κέντρο μάζας της πλευράς) τότε η απόστασή της από τον δεδομένο άξονα (διακεκομμένη γραμμή) είναι ίση με $r_3 = (\alpha + \gamma)/2$ η οποία είναι η μέση τιμή των α και γ . Επομένως η ροπή αυτής της δύναμης είναι ίση με

$$\tau_3 = F_3 r_3 = BIh \frac{(\alpha + \gamma)}{2}$$

Ομοίως στη δεξιά πλευρά, η δύναμη ισούται με

$$F_4 = IL_4 B \sin\theta_4 = BIh$$

με φορά προς τα μέσα της σελίδας και η αντίστοιχη ροπή ισούται με

$$\tau_4 = F_4 r_4 = BIh \frac{(\alpha + \delta)}{2}$$

όπου $r_3 = (\alpha + \gamma)/2$ είναι η μέση τιμή των α και γ . Βλέπουμε ότι οι δυο δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες και έτσι η συνιστάμενη δύναμη είναι μηδέν. Οι δυο ροπές όμως τείνουν να περιστρέψουν προς την ίδια περιστροφική φορά ως προς τον δεδομένο άξονα και έτσι αθροίζονται. Η συνιστάμενη ροπή λοιπόν ισούται με

$$\Sigma \tau = \tau_3 + \tau_4 = BIh \frac{\alpha + \gamma + \alpha + \delta}{2} = BIh \frac{2\alpha + (\gamma + \delta)}{2}$$

Το κλάσμα στα δεξιά είναι το ημι-άθροισμα των δυο βάσεων του τραpezίου το οποίο επί το ύψος του h μας δίνει το εμβαδό A του τραpezίου (δείτε γεωμετρία). Έτσι η συνολική ροπή γίνεται

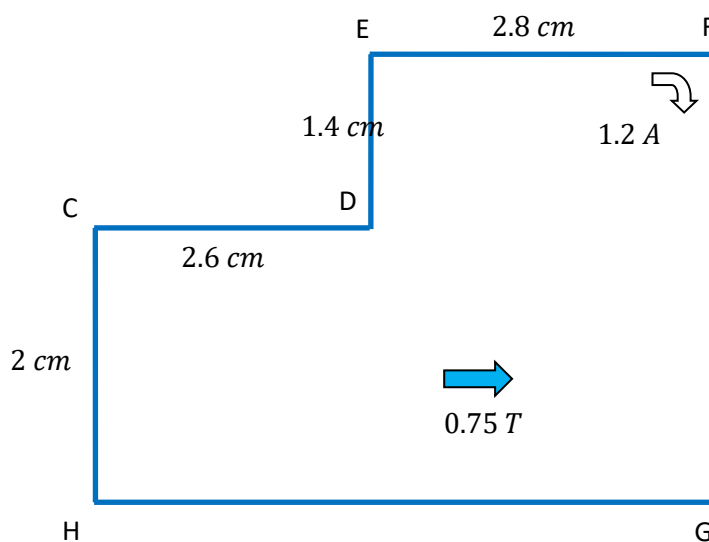
$$\Sigma \tau = BIA$$

που είναι ο ίδιος ακριβώς τύπος με τα ορθογώνιο πλαίσιο και άρα αυτός ο τύπος ισχύει για πλαίσιο οποιουδήποτε γεωμετρικού σχήματος αρκεί να μπορούμε να υπολογίσουμε την επιφάνειά του.

Πρόβλημα 8.8.

Το παρακάτω συρμάτινο πλαίσιο διαρρέεται από ρεύμα 1.2 A με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο 0.75 T εφαρμόζεται στο επίπεδο της σελίδας και οριζόντια. Υπολογίστε:

- Τη δύναμη στο κάθε τμήμα του βρόχου, όπως τα CD, DE, EF κτλ.
- Τη συνολική δύναμη στο βρόχο και
- Τη ροπή δύναμης στο βρόχο γύρω από άξονα που περνάει από τα σημεία E και D.



Λύση:

- α) Οι δυνάμεις $F_{CD} = F_{EF} = F_{GH} = 0$ επειδή είναι παράλληλες στο B

Τις άλλες θα τις υπολογίσουμε από την σχέση $F = BIL$, με φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού:

Φυσική II – Δ. Κουζούδης

$$F_{HC} = 0.75 \times 1.2 \times 0.02 = 0.018 \text{ N, προς τα μέσα της σελίδας}$$

$$F_{DE} = 0.75 \times 1.2 \times 0.014 = 0.0126 \text{ N, προς τα μέσα της σελίδας}$$

Μήκος της FG ίσο με $2 + 1.4 = 3.4 \text{ cm}$

$$F_{FG} = 0.75 \times 1.2 \times 0.034 = 0.0306 \text{ N, προς τα έξω της σελίδας}$$

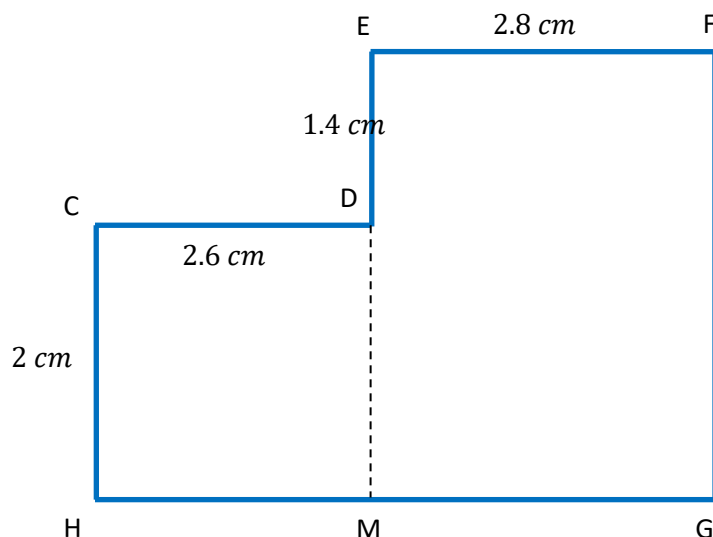
β) Αν χρησιμοποιήσουμε τη σύμβαση προσήμου (+) για "προς τα μέσα" και (-) για "προς τα έξω", έχουμε για τη συνολική δύναμη

$$F_{HC} + F_{DE} - F_{FG} = 0.018 + 0.0126 - 0.0306 = 0 \text{ N}$$

γ) Η συνολική ροπή σε ένα βρόχο δίνεται από την

$$\tau = N B A \sin \alpha$$

Εδώ $N = 1$, $B = 0.75 \text{ T}$ και γωνία $\alpha = 90^\circ$ αφού η κάθετος του πλαισίου είναι η κάθετος της σελίδας και το B είναι μέσα στη σελίδα. Για να βρούμε το εμβαδό χωρίζουμε την επιφάνεια του πλαισίου σε δύο ορθογώνια:



$$\text{Επιφάνεια του CDMH} = 0.026 \times 0.02 = 5.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\text{Επιφάνεια του EFGM} = 0.028 \times (0.02 + 0.014) = 9.52 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Φυσική II – Δ. Κουζούδης

Συνολική επιφάνεια $A = 14.72 \times 10^{-4} m^2$. Έτσι

$$\tau = 0.75 \times 14.72 \times 10^{-4} = 1.1 \times 10^{-3} Nm$$

Φυσικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε ξεχωριστά την ροπή της κάθε δύναμης γύρω από τον δεδομένο άξονα και να τις προσθέσουμε μια-μια. Αφήνεται ως άσκηση να αποδειχθεί ότι τα δυο αποτελέσματα είναι τα ίδια.

9. ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

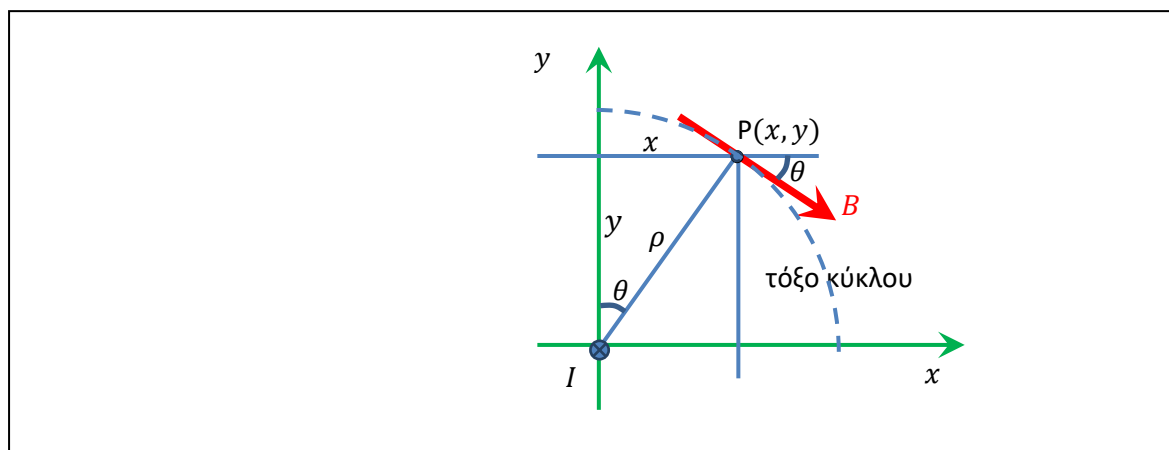
Πρόβλημα 9.1.

Ένα μακρύ ευθύγραμμο τμήμα σύρματος τέμνει την σελίδα κάθετα στο σημείο $(0,0)$ και διαρρέεται από ρεύμα $I = 3.83 \text{ A}$ με φορά προς τα μέσα της σελίδας. (α) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το παραγόμενο (από τον ευθύγραμμο αγωγό) πεδίο $\vec{B}$ σε σχέση με τον άξονα x , σε τυχαίο σημείο της σελίδας με συντεταγμένες $x = 3.2 \text{ cm}$ και $y = 2.1 \text{ cm}$ (β) Βρείτε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου.

Απάντηση: (α) -56.7° , (β) $2 \times 10^{-5} \text{ T}$

Λύση:

(α) Το παραγόμενο πεδίο ενός ευθύγραμμου αγωγού μεγάλου μήκους βρίσκεται εφαπτόμενο επάνω σε κύκλους με κέντρο επάνω στον αγωγό (κυκλικές δυναμικές γραμμές) όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η ακτίνα ρ ενός κύκλου τέμνει κάθετα την εφαπτομένη του και άρα το διάνυσμα $\vec{B}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$. Έτσι η γωνία θ που σχηματίζει το πεδίο $\vec{B}$ σε σχέση με τον άξονα x είναι ίση με τη συμπληρωματική γωνία που σχηματίζει το $\vec{r}$ με τον άξονα x και έτσι μπορούμε να την υπολογίσουμε εύκολα από απλή τριγωνομετρία ως εξής:

$$\tan \theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{3.2}{2.1} \right) = 56.7^\circ$$

Βέβαια με την δεδομένη φορά του ρεύματος, το μαγνητικό πεδίο είναι προς τα κάτω και έτσι η γωνία του είναι αρνητική, δηλαδή

$$\theta = -56.7^\circ$$

Εναλλακτική λύση:

Αφού το διάνυσμα $\vec{B}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης $\vec{\rho}$ τότε το μεταξύ τους εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν:

$$\vec{B} \cdot \vec{\rho} = 0 \Rightarrow B_x x + B_y y = 0 \Rightarrow \frac{B_y}{B_x} = -\frac{x}{y}$$

Όμως ο λόγος B_y/B_x είναι ίσος με την εφαπτομένη του διανύσματος $\vec{B}$ και έτσι

$$\tan \theta = -\frac{x}{y}$$

που οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα και με το σωστό πρόσημο.

(β) Το μέτρο του πεδίου είναι ίσο με

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

Από απλό Πυθαγόρειο

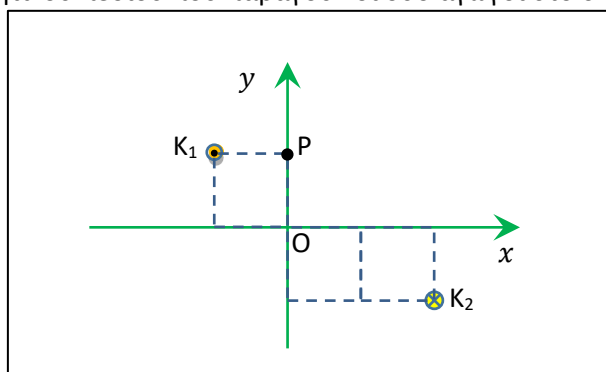
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3.2^2 + 2.1^2} = 3.83 \text{ cm} = 0.0383 \text{ m}$$

Έτσι:

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3.83}{2\pi \times 0.0383} = 2 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Πρόβλημα 9.2.

Στο παρακάτω σχήμα δυο λεπτοί ευθύγραμμοι αγωγοί K_1 και K_2 απείρου μήκους τέμνουν κάθετα την σελίδα στα σημεία $(-2,1)$ και $(4,-1)$ αντίστοιχα (σε cm) και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα $I = 2.2 \text{ A}$ και με τη φορά που σημειώνεται. Να βρεθούν οι συνιστώσες του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγουν οι δυο αγωγοί στο σημείο P.



Απάντηση:

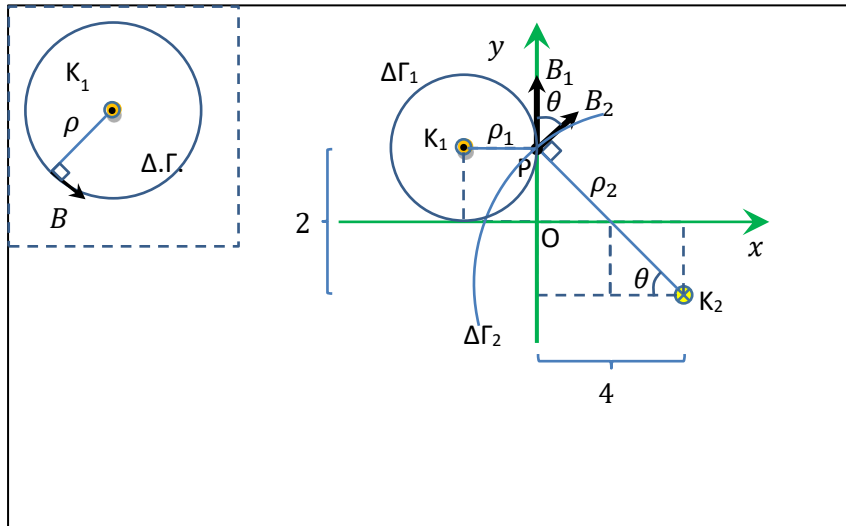
$$\vec{B} = (2.20, 3.08) \times 10^{-5} \text{ T}$$

Λύση:

Είδαμε ότι ο ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους ο οποίος είναι κατά μήκος του άξονα z δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο σε απόσταση ρ από αυτόν που δίνεται από την:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

Οι αντίστοιχες δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο επάνω στον αγωγό όπως αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα στο ένθετο (με διακεκομμένη), και το $\vec{B}$ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο και άρα κάθετο στην ακτίνα του ρ .



Επομένως στο σημείο P υπάρχουν δυο πεδία, το B_1 που παράγεται από τον αγωγό K_1 με φορά προς τα πάνω και το B_2 που παράγεται από τον αγωγό K_2 το οποίο είναι κάθετο στην ευθεία K_2P η οποία παίζει το ρόλο της ακτίνας του κύκλου $\Delta\Gamma_2$. Από τις συντεταγμένες των σημείων K_1 και K_2 μπορούμε να βρούμε τις αποστάσεις

$$\rho_1 = 2 \text{ cm}$$

και

$$\rho_2 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \text{ cm}$$

και τη γωνία θ ως εξής:

$$\tan\theta = \frac{2}{4} \Rightarrow \theta = 26.6^\circ$$

Επομένως τα μέτρα των B_1 και B_2 ισούνται με

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7} I}{2\pi\rho_1} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 2.2}{2 \times 10^{-2}} = 2.2 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} I}{2\pi\rho_2} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 2.2}{\sqrt{20} \times 10^{-2}} = 0.984 \times 10^{-5} \text{ T}$$

ενώ οι συντεταγμένες τους είναι ίσες με

$$B_{1x} = 0 \text{ T}$$

$$B_{1y} = 2.2 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_{2x} = 0.984 \times 10^{-5} \sin(26.6^\circ) = 0.44 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_{2y} = 0.984 \times 10^{-5} \cos(26.6^\circ) = 0.88 \times 10^{-5} T$$

Έτσι το συνιστάμενο πεδίο έχει συνιστώσες

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = 2.20 \times 10^{-5} T$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = 3.08 \times 10^{-5} T$$

Πρόβλημα 9.3.

Στο προηγούμενο πρόβλημα να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο στην αρχή των αξόνων Ο

Απάντηση:

$$\vec{B} = (2.02, 1.92) \times 10^{-5} T$$

Λύση:

Είδαμε ότι ο ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους ο οποίος είναι κατά μήκος του άξονα z δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο σε απόσταση ρ από αυτόν που δίνεται από την:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

Οι αντίστοιχες δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο επάνω στον αγωγό όπως αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα στο ένθετο (με διακεκομμένη), και το $\vec{B}$ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο και άρα κάθετο στην ακτίνα του ρ .

Επομένως στην αρχή Ο υπάρχουν δυο πεδία (παρουσιάζονται σε δυο ξεχωριστά σχήματα για λόγους ευκρίνειας), το B_1 που παράγεται από τον αγωγό K_1 με φορά προς τα πάνω & δεξιά και το B_2 που παράγεται από τον αγωγό K_2 το οποίο είναι επίσης προς τα πάνω & δεξιά (κανόνας δεξιού χεριού). Τα δυο πεδία είναι κάθετα αντίστοιχα στα ευθύγραμμα τμήματα K_1O και K_2O τα οποία παίζουν το ρόλο της ακτίνας των αντίστοιχων κύκλων $\Delta\Gamma_1$ και $\Delta\Gamma_2$. Από τις συντεταγμένες των σημείων K_1 και K_2 μπορούμε να βρούμε τις αποστάσεις

$$\rho_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

και

$$\rho_2 = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \text{ cm}$$

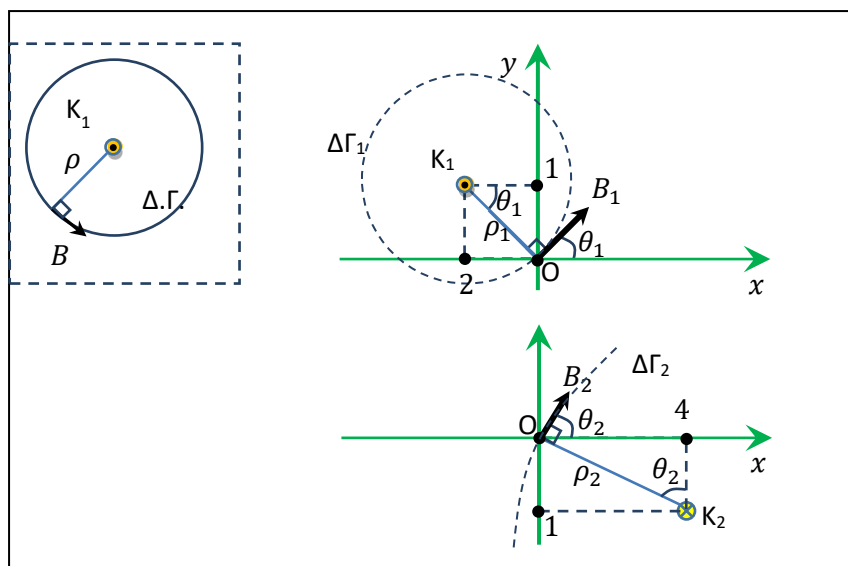
και τις γωνίες θ_1 και θ_2 ως εξής:

$$\tan\theta_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26.6^\circ$$

και

$$\tan\theta_2 = \frac{4}{1} \Rightarrow \theta = 76.0^\circ$$

Αυτές οι δυο γωνίες είναι ίσες λόγω καθετότητας με τις γωνίες που σχηματίζουν τα πεδία B_1 και B_2 αντίστοιχα με τον άξονα x .



Επομένως τα μέτρα των B_1 και B_2 ισούνται με

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7} I}{2\pi\rho_1} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 2.2}{\sqrt{5} \times 10^{-2}} = 1.97 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} I}{2\pi\rho_2} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 2.2}{\sqrt{17} \times 10^{-2}} = 1.07 \times 10^{-5} \text{ T}$$

ενώ οι συντεταγμένες τους είναι ίσες με

$$B_{1x} = 1.97 \times 10^{-5} \cos(26.6^\circ) = 1.76 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_{1y} = 1.97 \times 10^{-5} \sin(26.6^\circ) = 0.88 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_{2x} = 1.07 \times 10^{-5} \cos(76.0^\circ) = 0.26 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_{2y} = 1.07 \times 10^{-5} \sin(76.0^\circ) = 1.04 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Έτσι το συνιστάμενο πεδίο έχει συνιστώσες

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = 2.02 \times 10^{-5} \text{ T}$$

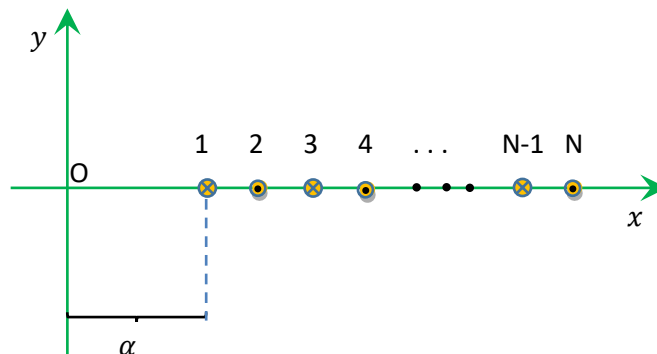
$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = 1.92 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Πρόβλημα 9.4.

Θεωρήστε την παρακάτω συστοιχία κατά μήκος του άξονα x που αποτελείται από ένα ζυγό πλήθος N ευθύγραμμων αγωγών απείρου μήκους οι οποίοι τέμνουν κάθετα τη σελίδα. Ο πρώτος αγωγός βρίσκεται σε απόσταση ad από την αρχή των αξόνων, όπου d μια απόσταση σε μέτρα και a ένας καθαρός αριθμός, ο δεύτερος σε απόσταση $a^2 d$, τρίτος $a^3 d$ κ.ό.κ. Όλοι οι αγωγοί διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I αλλά με εναλλασσόμενη φορά όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το συνιστάμενο μαγνητικό πεδίο που παράγει η συστοιχία στο σημείο Ο για $I = 10 \text{ A}$, $d = 1 \text{ cm}$, $N = 20$ και $a = 1.2$. Σημείωση: Πρώτα να αναπτύξετε το

παρακάτω γινόμενο γιατί καταλήγει σε ένα εξαιρετικά απλό αποτέλεσμα που μπορεί να σας φανεί πολύ χρήσιμο στον υπολογισμό της γεωμετρικής σειράς:

$$(1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots \lambda^{N-1})$$



Απάντηση: $8.85 \times 10^{-5} T$

Λύση:

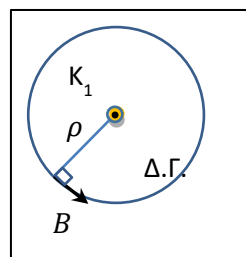
Το ανάπτυγμα δίνει $(1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots \lambda^{N-1}) = 1 - \lambda^N$ και άρα μπορούμε να γράψουμε ταυτοτικά για τη γεωμετρική σειρά ότι

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots \lambda^{N-1} = \frac{1 - \lambda^N}{1 - \lambda}$$

Είδαμε ότι ο ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους ο οποίος είναι κατά μήκος του άξονα z δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο σε απόσταση ρ από αυτόν που δίνεται από την:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

Οι αντίστοιχες δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο επάνω στον αγωγό όπως αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και το $\vec{B}$ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο και άρα κάθετο στην ακτίνα του ρ .



Επομένως στο σημείο O του δεδομένου σχήματος, η φορά του μαγνητικού πεδίου που παράγει ο κάθε αγωγός είναι εναλλασσόμενα προς τα πάνω και κάτω (κανόνας δεξιού χεριού) και έχει μέτρο

$$B_n = \frac{\mu_0 I}{2\pi d \alpha^n}$$

με $n = 1, 2, 3 \dots N$. Αθροίζοντας σε όλους τους αγωγούς

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d\alpha} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d\alpha^2} + \frac{\mu_0 I}{2\pi d\alpha^3} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d\alpha^4} \dots$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} \dots \frac{1}{\alpha^{N-1}} \right)$$

Προσέξτε ότι τα πρόσημα εναλλάσσονται. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά με $\lambda = -1/\alpha$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d\alpha} \left(\frac{1 - \left(\frac{-1}{\alpha}\right)^N}{1 - \left(\frac{-1}{\alpha}\right)} \right)$$

Επειδή ο N είναι ζυγός αριθμός, έχουμε

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d\alpha} \left(\frac{1 - \frac{1}{\alpha^N}}{1 + \frac{1}{\alpha}} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \left(\frac{1 - \frac{1}{\alpha^N}}{\alpha + 1} \right)$$

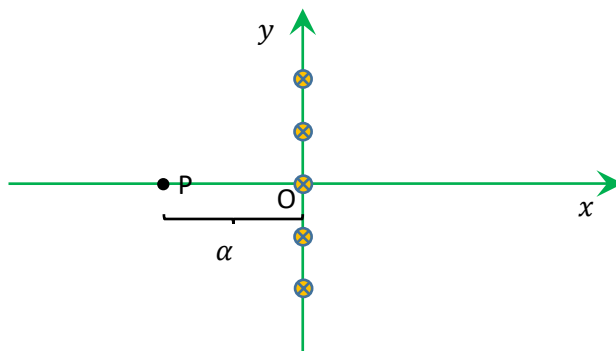
Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχουμε

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 10^{-2}} \left(\frac{1 - \frac{1}{1.2^{20}}}{1.2 + 1} \right) =$$

$$|| 2 \times 10^{-4} \left(\frac{1 - 0.0217}{2.2} \right) = 8.85 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Πρόβλημα 9.5.

Θεωρήστε την παρακάτω συστοιχία κατά μήκος του άξονα y που αποτελείται από ένα πλήθος $N = 5$ ευθύγραμμων αγωγών με τον καθένα να είναι κάθετος στη σελίδα, να έχει άπειρο μήκος και να ισαπέχει απόσταση $c = 0.3 \text{ m}$ από τους γειτονικούς αγωγούς, ενώ ο μεσαίος αγωγός βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Όλοι οι αγωγοί διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα $I = 3 \text{ A}$ με τη φορά που σημειώνεται. Υπολογίστε το μέτρο και τη φορά του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγει η συστοιχία στο σημείο P με συντεταγμένες $(-a, 0)$ όπου $a = 0.4 \text{ m}$.



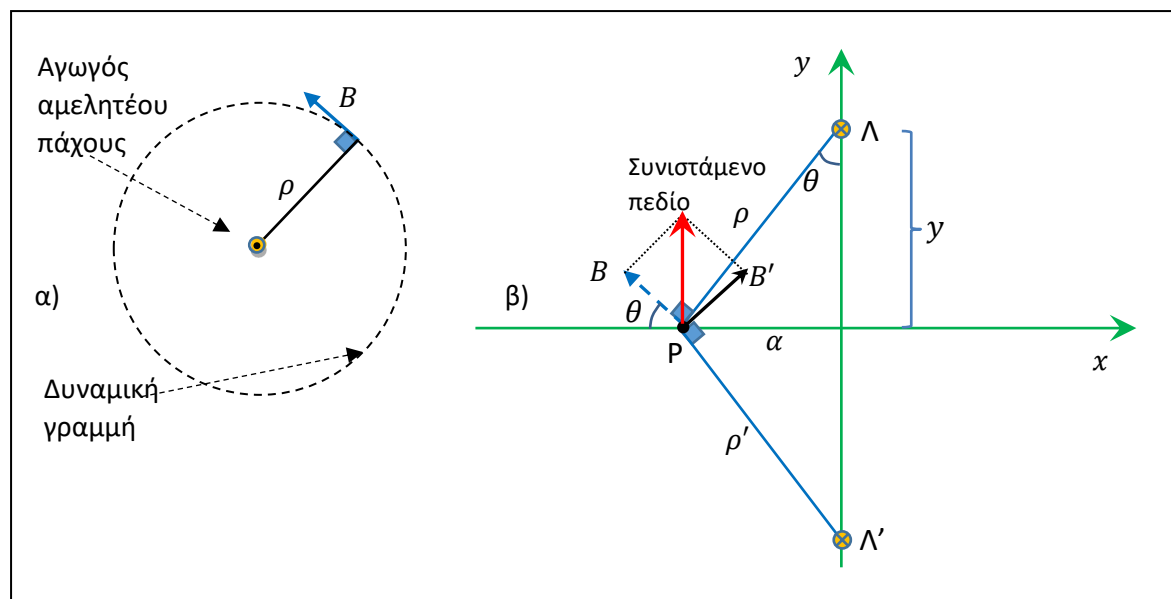
Απάντηση: $4.34 \times 10^{-6} \text{ T}$

Λύση:

Όπως περιγράφεται στο βιβλίο, όταν ένας ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους βρίσκεται κατά μήκος του άξονα z δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο σε απόσταση ρ από αυτόν που δίνεται από την:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

Οι αντίστοιχες δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο επάνω στον αγωγό όπως αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα στο α) με το $\vec{B}$ εφαπτόμενο στον κύκλο και άρα κάθετο στην ακτίνα του ρ . Εάν τώρα θεωρήσουμε δυο από τους αγωγούς της συστοιχίας όπως ο Λ και ο Λ' στο παρακάτω σχήμα στο β) τότε οι ευθείες ΛΡ και Λ'Ρ παίζουν το ρόλο της ακτίνας ρ και άρα τα αντίστοιχα παραγόμενα πεδία B και B' είναι κάθετα σε αυτά και το συνιστάμενο πεδίο, λόγω συμμετρίας είναι κατακόρυφο προς τα πάνω. Από τους δεδομένους 5 αγωγούς υπάρχουν 2 τέτοια ζευγάρια και έτσι περισσεύει ο αγωγός στο Ο. Αλλά και το πεδίο αυτού του αγωγού προκύπτει κατακόρυφο από τον νόμο του δεξιού χεριού. Έτσι το ολικό συνιστάμενο πεδίο είναι κατά μήκος του άξονα y . Επομένως θα θεωρήσουμε μόνο την y -συνιστώσα του κάθε πεδίου.



Π.χ. για τον αγωγό Λ στο παραπάνω σχήμα, εάν βρίσκεται σε απόσταση y από το O , τότε η απόσταση LP είναι ίση με

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + y^2}$$

και η y -συνιστώσα του πεδίου B που παράγει στο σημείο P είναι ίση με

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \sin\theta$$

Από απλή τριγωνομετρία

$$\sin\theta = \frac{\alpha}{\rho}$$

και έτσι

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2} \alpha = \frac{\mu_0 I \alpha}{2\pi(\alpha^2 + y^2)}$$

Οι 5 αγωγοί βρίσκονται στις θέσεις $y = 0, \pm 0.3, \pm 0.6 \text{ m}$ και έτσι έχουν αντίστοιχα B_y ίσα με:

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3}{2\pi \times 0.4} = 15 \times 10^{-7} \text{ T}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2} \alpha = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 0.4}{2\pi(0.3^2 + 0.4^2)} = 9.6 \times 10^{-7} \text{ T}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2} \alpha = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 0.4}{2\pi(0.6^2 + 0.4^2)} = 4.61 \times 10^{-7} \text{ T}$$

Έτσι το συνολικό πεδίο είναι ίσο με

$$B_{O\Lambda} = (15 + 2 \times 9.6 + 2 \times 4.61) \times 10^{-7} \text{ T} = 4.34 \times 10^{-6} \text{ T}$$

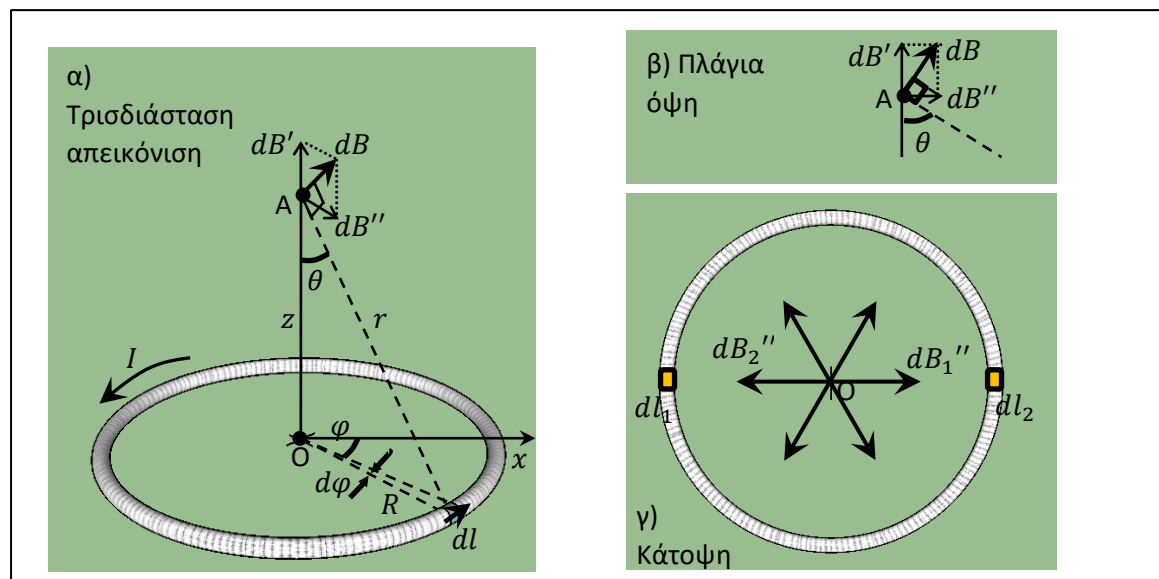
(οι παράγοντες "2" είναι για τους αγωγούς που λαμβάνονται κατά ζεύγη)

Πρόβλημα 9.6.

Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο που βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός αγωγού σχήματος κυκλικού βρόγχου ακτίνας R που φέρει ρεύμα I και σε απόσταση z από το κέντρο του.

Λύση:

Έστω στο παρακάτω σχήμα στην τρισδιάστατη απεικόνιση ένας λεπτός δακτύλιος με αμελητέο πάχος, ακτίνα R και ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I . Θέλουμε το παραγόμενο μαγνητικό πεδίο σε σημείο A που βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετό του και απέχει απόσταση z από το κέντρο του. Όπως φαίνεται και στο σχήμα στα αριστερά, για τον υπολογισμό του πεδίου "τεμαχίζουμε" τον δακτύλιο σε απειροστά κομμάτια που αντιστοιχούν σε στοιχειώδη γωνία $d\varphi$ και έχουν στοιχειώδες μήκος $dl = R d\varphi$.



Σχήμα 2.5

Ορίζουμε το διάνυσμα στοιχειώδους μήκους $d\vec{l}$ το οποίο έχει μέτρο dl και φορά αυτή του ρεύματος, καθώς και το $\vec{r}$ το οποίο είναι το διάνυσμα που ενώνει το $d\vec{l}$ με το σημείο παρατήρησης A . Έστω θ η γωνία που σχηματίζει το $\vec{r}$ με τον άξονα z . Σύμφωνα με τον νόμο των Biot-Savart, το μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$ που δημιουργεί το $d\vec{l}$ είναι ίσο με

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Προσέξτε ότι το $d\vec{l}$ ως εφαπτόμενο στον κυκλικό αγωγό είναι αυτομάτως κάθετο στην ακτίνα του R . Επομένως είναι κάθετο και στο τρίγωνο που εικονίζεται στο σχήμα το οποίο αποτελείται από τα R , z και r και άρα και κάθετο και στο $\vec{r}$. Επομένως στο παραπάνω εξωτερικό γινόμενο δεν υπάρχει όρος ημιτόνου και το μέτρο του στοιχειώδους μαγνητικού πεδίου είναι ίσο με

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

Λόγω επίσης του εξωτερικού γινομένου, το $d\vec{B}$ είναι κάθετο τόσο στο $d\vec{l}$ όσο και στο $\vec{r}$. Έτσι και το $d\vec{B}$ βρίσκεται στο επίπεδο του προαναφερθέντος τριγώνου (ώστε να είναι κάθετο στο $d\vec{l}$) και σχηματίζει βεβαίως γωνία 90° με το $\vec{r}$. Με αναφορά στην πλάγια όψη του παραπάνω σχήματος, μπορούμε να αναλύσουμε το $d\vec{B}$ σε δυο συνιστώσες, την dB' η οποία είναι κατά μήκος του άξονα z και την dB'' η οποία είναι κατά μήκος της ακτίνας R . Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η γωνία μεταξύ των dB'' και dB είναι ίση με τη θ επειδή αυτά τα δυο διανύσματα είναι κάθετα στις πλευρές του τριγώνου που σχηματίζουν τη θ . Έτσι $dB' = dB \sin \theta$ και $dB'' = dB \cos \theta$. Εάν ολοκληρώσουμε σε όλο τον δακτύλιο, τότε όλες οι συνιστώσες dB'' σχηματίζουν ένα διανυσματικό αστέρα παρόμοιο με αυτό που εικονίζεται στην κάτοψη του παραπάνω σχήματος, π.χ. τα αντιδιαμετρικά dl_1 και dl_2 δημιουργούν δυο αντίστοιχες αντιδιαμετρικές συνιστώσες dB_1'' και dB_2'' οι οποίες λόγω συμμετρίας είναι ίσες κατά μέτρο και έτσι αλληλο-αναιρούνται. Έτσι ο αστέρας ισοδυναμεί με το μηδενικό διάνυσμα και οι συνιστώσες dB' δεν συνεισφέρουν κάτι στο ολικό και πεδίο και θα τις αγνοήσουμε. Η z -συνιστώσα είναι ίση με

$$dB' = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \theta$$

όπου θ είναι η γωνία του κώνου η οποία είναι σταθερή όπως περιστρεφόμαστε επάνω στο δακτύλιο. Δε μένει παρά να ολοκληρώσουμε επάνω στον δακτύλιο και να βγάλουμε τις σταθερές εκτός ολοκληρώματος όπως και τα I , r και θ αφού είναι και αυτά είναι σταθερά. Γράφοντας το διαφορικό dl ως $Rd\varphi$ έχουμε:

$$B = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^2} \sin \theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I R}{2 r^2} \sin \theta$$

Από απλή τριγωνομετρία $\sin \theta = R/r$ οπότε

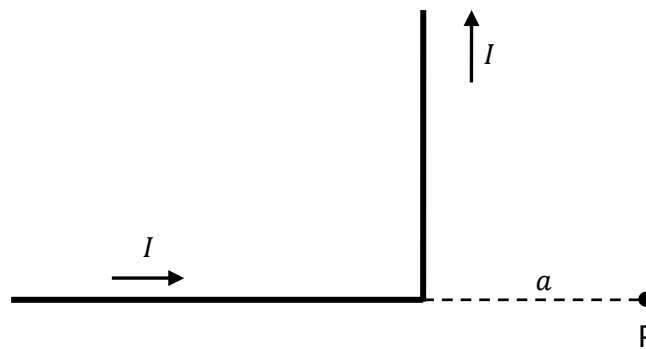
$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2 r^3}$$

Το r δεν είναι δεδομένο του προβλήματος αλλά μπορούμε να το γράψουμε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος συναρτήσει των z και R . Το τελικό αποτέλεσμα είναι το

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Πρόβλημα 9.7.

Το σύρμα του παρακάτω σχήματος έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα I . Υπολογίστε με τη βοήθεια του νόμου του Biot-Savart με ολοκλήρωση το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα στο σημείο P. (Σημείωση: Οι τελικοί υπολογισμοί απλουστεύονται εάν εκφραστούν όλες οι μεταβλητές μήκους συναρτήσει μιας γωνίας).



Λύση:

Ο νόμος των Biot-Savart στην Εξ. 8.13 μας δίνει το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$ που παράγει το στοιχειώδες μήκος $d\vec{l}$ ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα I σε απόσταση $\vec{r}$ από το στοιχειώδες μήκος:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Θα χωρίσουμε τον δεδομένο αγωγό στα δυο κάθετα κομμάτια και θα ολοκληρώσουμε επάνω σε αυτά για να βρούμε το ολικό πεδίο $\vec{B}$. Για τον αγωγό στα αριστερά ισχύει

$$d\vec{l} \times \vec{r} = 0$$

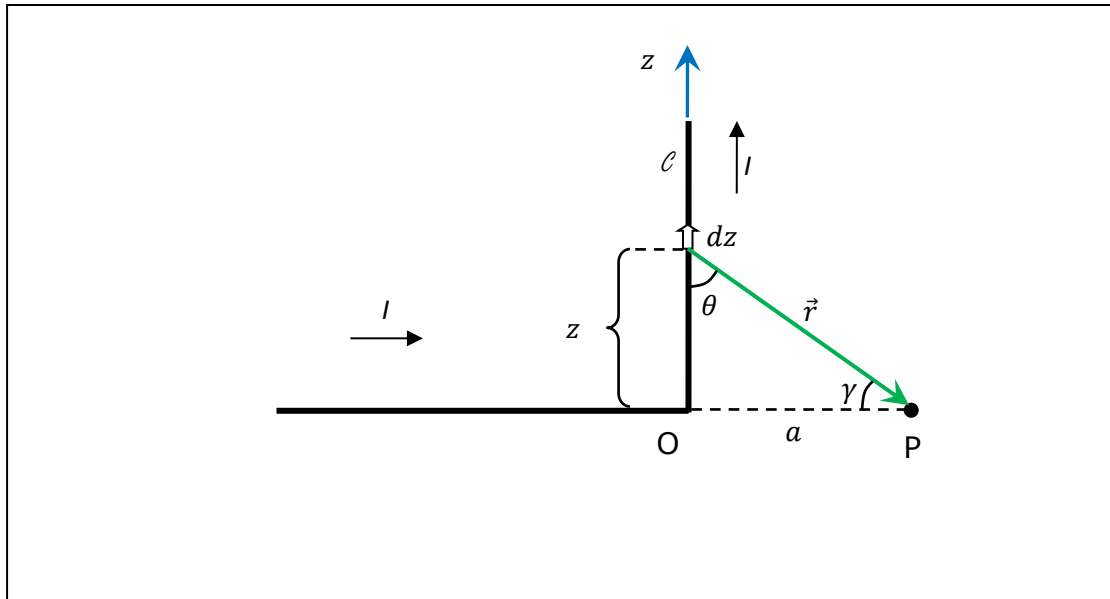
αφού τόσο το $d\vec{l}$ είναι οριζόντιο όσο και το διάνυσμα $\vec{r}$ που το συνδέει με το σημείο παρατήρησης P. Επομένως το οριζόντιο τμήμα του αγωγού δεν συνεισφέρει κάτι στον υπολογισμό και έτσι θα ολοκληρώσουμε μόνο στο κατακόρυφο τμήμα. Η ολοκλήρωση ακολουθεί την ολοκλήρωση που έχουμε στις σημειώσεις για ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους με τη διαφορά ότι ο αγωγός είναι ημι-άπειρος.

Έτσι παίρνουμε σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα τον άξονα z κατά μήκος του αγωγός ℓ και αναζητούμε το μαγνητικό πεδίο στη δεδομένη απόσταση a από τον αγωγό. Για το λόγο αυτό "τεμαχίζουμε" τον αγωγό σε στοιχειώδη τμήματα μήκους dz το καθένα και επιλέγουμε ως την αρχή των συντεταγμένων O στο κάτω άκρο του αγωγού. Το διάνυσμα $d\vec{l}$ που εμφανίζεται στην Εξ. 8.13 είναι το $d\vec{l} = dz\vec{e}_z$ ενώ το $\vec{r}$ είναι αυτό που ενώνει το $d\vec{l}$ με το σημείο παρατήρησης P. Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου $d\vec{l} \times \vec{r}$ στην Εξ. 8.13 ισούται με

$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = rdz\sin\theta$$

ενώ σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού η φορά του είναι προς τα μέσα της σελίδας (δηλαδή κατά μήκος του άξονα- y ο οποίος είναι κάθετος στην σελίδα με φορά προς τα μέσα). Ολοκληρώνοντας την Εξ. 8.13 σε όλο τον αγωγό οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\vec{B} = \int_C d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_y \int_C \frac{rdz\sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_y \int_C \frac{\sin\theta}{r^2} dz$$



Στο παραπάνω ολοκλήρωμα εμφανίζονται τρεις μεταβλητές, οι θ , r και z . Με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας μπορούμε να τις εκφράσουμε όλες συναρτήσει της γωνίας γ που είναι η συμπληρωματική της θ . Έτσι από το παραπάνω σχήμα έχουμε

$$\sin\theta = \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\cos\gamma}{a}$$

$$\tan\gamma = \frac{z}{a} \Rightarrow dz = \frac{a}{\cos^2\gamma} d\gamma$$

Τα όρια του αγωγού είναι τα $z = 0$ έως ∞ που αντιστοιχούν σε $\gamma = 0$ έως $\pi/2$. Έτσι το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_y \int_{\gamma=0}^{\pi/2} \cos\gamma \frac{\cos^2\gamma}{\rho^2} \frac{\rho}{\cos^2\gamma} d\gamma = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \vec{e}_y \int_{\gamma=0}^{\pi/2} \cos\gamma d\gamma$$

Τελικά

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi\rho} \vec{e}_y$$

Πρόβλημα 9.8.

Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένας ευθύγραμμος αγωγός πεπερασμένου μήκους L που διαρρέεται από ρεύμα I σε σημείο P επάνω στη μεσοκάθετο του αγωγού και που απέχει απόσταση ρ από αυτόν.

Λύση:

Η λύση είναι παρόμοια με αυτή του προηγούμενου προβλήματος στην περίπτωση του κατακόρυφου αγωγού με τη διαφορά ότι τώρα αντί για ημι-άπειρο αγωγό, έχουμε αγωγό πεπερασμένου μήκους L οπότε μπορούμε να πάρουμε συμμετρικά όρια για το $z = \pm L/2$ που αντιστοιχούν σε όρια $\pm \gamma_0$ της γωνίας γ όπου $\tan \gamma_0 = z/\rho = L/2\rho$. Έτσι η ολοκλήρωση γίνεται

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \cos\gamma d\gamma = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \sin\gamma_0$$

με φορά έξω από τη σελίδα. Αφού $\sin x = 1/\sqrt{1 + \cot^2 x}$ έχουμε

$$\sin\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \gamma_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\rho}{L}\right)^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4\rho^2}}$$

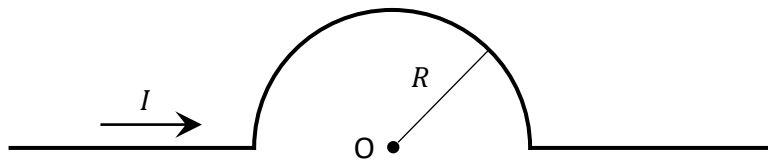
οπότε

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \cos\gamma d\gamma = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4\rho^2}}$$

με φορά έξω από τη σελίδα.

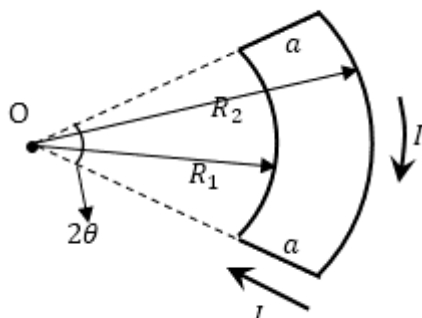
Πρόβλημα 9.9.

Το σύρμα του παρακάτω σχήματος έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα I . Βρείτε το δημιουργούμενο μαγνητικό πεδίο B στο σημείο O (μέτρο και φορά).



Πρόβλημα 9.10

Το κλειστό καλώδιο του παρακάτω σχήματος βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στη σελίδα, διαρρέεται από ρεύμα I και έχει τη μορφή δυο ομόκεντρων τόξων ίσης γωνίας 2θ συνδεδεμένων μεταξύ τους στα άκρα τους με δυο ευθύγραμμα τμήματα μήκους a το καθένα. Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα στο σημείο O , δεδομένων των R_1 , R_2 , a και θ .

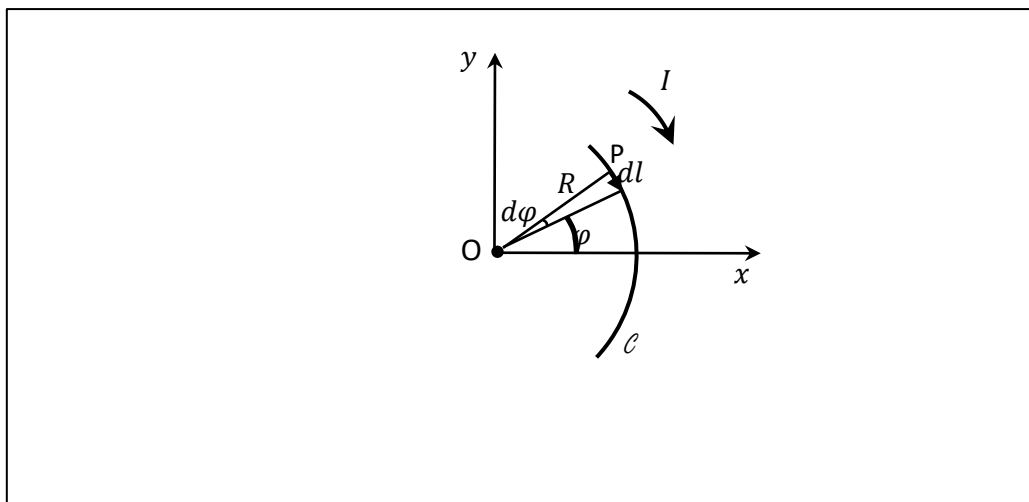
Λύση:

Θεωρήστε πρώτα στο παρακάτω Σχήμα ένα τόξο $\mathcal{C}$ ακτίνας R το οποίο διαρρέεται από ρεύμα I . Θα υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που παράγει στην αρχή των αξόνων O . Παίρνουμε για ευκολία το τόξο συμμετρικά ως προς τον άξονα x και έστω ότι έχει ένα γωνιακό άνοιγμα 2θ . Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο, "τεμαχίζουμε" το τόξο σε μικρότερα στοιχειώδη τόξα με γωνιακό άνοιγμα $d\varphi$ όπως αυτό που εικονίζεται σε τυχαίο σημείο P με μήκος dl ίσο με $Rd\varphi$. Το στοιχειώδες διάνυσμα μήκους $d\vec{l}$ το οποίο εμφανίζεται στον νόμο των Biot-Savart στην Εξ. 9.3 είναι εφαπτόμενο στο τόξο με φορά αυτή του ρεύματος και έχει μέτρο ίσο με dl . Το άλλο διάνυσμα μήκους $\vec{r}$ που εμφανίζεται στον νόμο είναι στην ουσία το αντίθετο της ακτίνας R του κύκλου (το $\vec{r}$ ορίζεται από τον αγωγό προς το σημείο παρατήρησης που εδώ είναι το O). Έτσι το εξωτερικό γινόμενο στο σημείο P έχει μέτρο ίσο με

$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = Rd\varphi R \sin(90^\circ) = R^2 d\varphi$$

Η γωνία του εξωτερικού γινομένου προκύπτει ορθή επειδή το $d\vec{l}$ ως εφαπτόμενο διάνυσμα είναι κάθετο στην ακτίνα $\vec{r}$. Όσον αφορά την φορά του εξωτερικού γινομένου, αυτή είναι κάθετη στη σελίδα και προς τα μέσα, δηλαδή είναι αντίθετα από το μοναδιαίο $\vec{e}_z$. Έτσι

$$d\vec{l} \times \vec{r} = -R^2 d\varphi \vec{e}_z$$



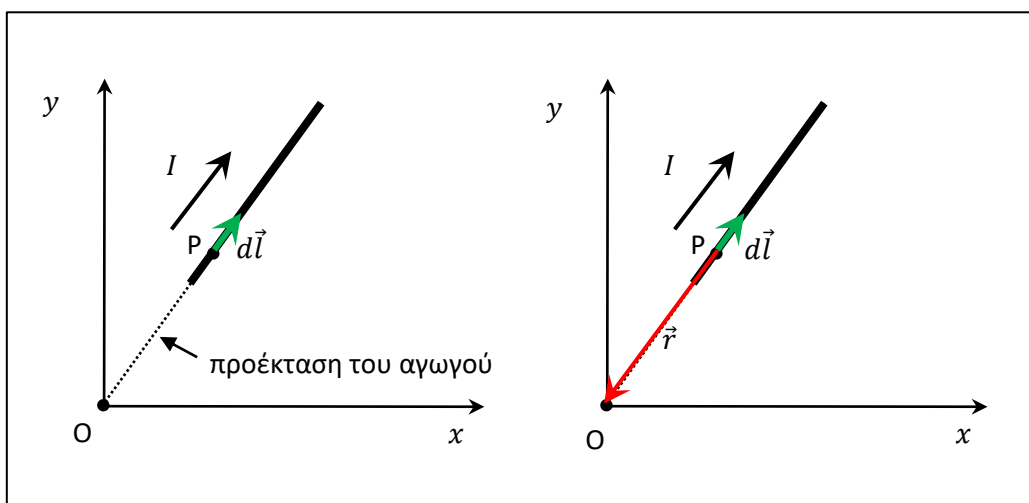
Για να εφαρμόσουμε τον νόμο των Biot-Savart στην Εξ. 9.3, πρέπει να ολοκληρώσουμε σε όλο το τόξο. Αφού από τα δεδομένα το τόξο έχει γωνιακό άνοιγμα 2θ , θα πάρουμε όρια ολοκλήρωσης από $\varphi = -\theta$ έως και $\varphi = \theta$. Έτσι έχουμε:

$$\vec{B}_C = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-\vec{e}_z) \int_{\varphi=-\theta}^{\theta} \frac{R^2 d\varphi}{R^3} = -\frac{\theta}{2\pi} \frac{\mu_0 I}{R} \vec{e}_z$$

Στο παρόν πρόβλημα έχουμε δυο τόξα C_1 και C_2 με ακτίνες R_1 και R_2 αλλά με αντίθετη φορά ρεύματος και έτσι η συνεισφορά τους στο πεδίο είναι η

$$\vec{B}_{C1} + \vec{B}_{C2} = \mu_0 I \frac{\theta}{2\pi} \vec{e}_z \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Ας εξετάσουμε τώρα τη συνεισφορά των ευθύγραμμων αγωγών όπως ο αγωγός γ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I . Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, "τεμαχίζουμε" τον αγωγό σε απειροστά στοιχειώδη μήκη dl και ορίζουμε τα διανύσματα $d\vec{l}$ κατά μήκος του αγωγού με τη φορά του ρεύματος, όπως το διάνυσμα $d\vec{l}$ στο σημείο P. Προσέξτε ότι η προέκταση του αγωγού γ περνάει από την αρχή O όπως και τα δυο δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα του προβλήματος.



Το διάνυσμα μήκους $\vec{r}$ το οποίο εμφανίζεται στον νόμο των Biot-Savart στην Εξ. 9.3 είναι στην ουσία το διάνυσμα $\vec{PO}$ (στο σχήμα στα δεξιά) το οποίο είναι αντιπαράλληλο με το $d\vec{l}$ και έτσι

$$d\vec{l} \times \vec{r} = 0$$

(λόγω του όρου $\sin 180^\circ$ που εμφανίζεται στο εξωτερικό γινόμενο). Από τον νόμο των Biot-Savart στην μορφή της Εξίσωσης 9.3 φαίνεται αμέσως ότι

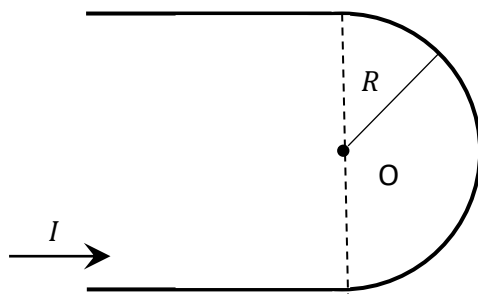
$$\vec{B}_V = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = 0$$

δηλαδή οι δυο ευθύγραμμοι αγωγοί δεν συνεισφέρουν στο συνιστάμενο πεδίο. Επομένως το συνιστάμενο πεδίο $\vec{B}$ του όλου καλωδίου είναι ίσο με το άθροισμα $\vec{B}_{C1} + \vec{B}_{C2}$ που είδαμε παραπάνω. Έτσι η τελική απάντηση είναι η

$$\vec{B} = \mu_0 I \frac{\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \vec{e}_z$$

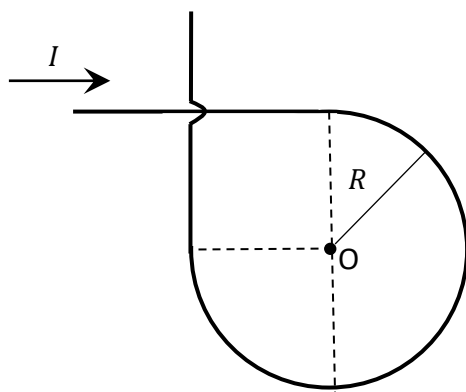
Πρόβλημα 9.10.

Το σύρμα του παρακάτω σχήματος έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα I . Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα στο σημείο O .

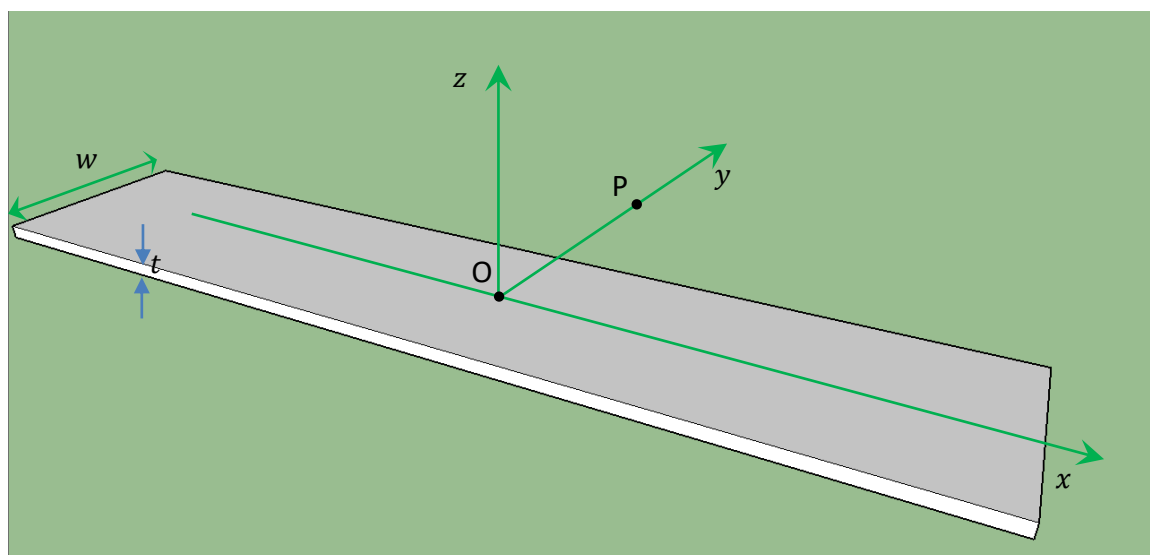


Πρόβλημα 9.11.

Το σύρμα του παρακάτω σχήματος έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα I . Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα στο σημείο O (μπορείτε να αγνοήσετε την μικρή καμπύλη η οποία απλώς υποδηλώνει ότι τα δυο κομμάτια του αγωγού δεν τέμνονται)

Πρόβλημα 9.12.

Ο παρακάτω αγωγός έχει το σχήμα λεπτής λωρίδας μήκους L , πλάτους w και πολύ μικρού πάχους $t \ll w$. Εάν διαρρέεται από πυκνότητα ρεύματος J (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας κάθετη στη ροή του ρεύματος, δείτε Εξ. 7.6) κατά τον θετικό άξονα x , να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο σε σημείο P που βρίσκεται επάνω στον θετικό άξονα y και απέχει απόσταση $a > w$ από την αρχή των συντεταγμένων O η οποία βρίσκεται συμμετρικά στο κέντρο του αγωγού. (Υπόδειξη: Μπορείτε να χωρίσετε την λωρίδα σε ένα πλήθος ευθύγραμμων αγωγών πεπερασμένου μήκους L και να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα προηγούμενου προβλήματος). Πάρτε για εφαρμογή $L = 2 \text{ cm}$, $w = 0.5 \text{ cm}$, $a = 1 \text{ cm}$ και $J = 10 \text{ A/cm}^2$ ενώ $t = 0.01 \text{ cm}$.

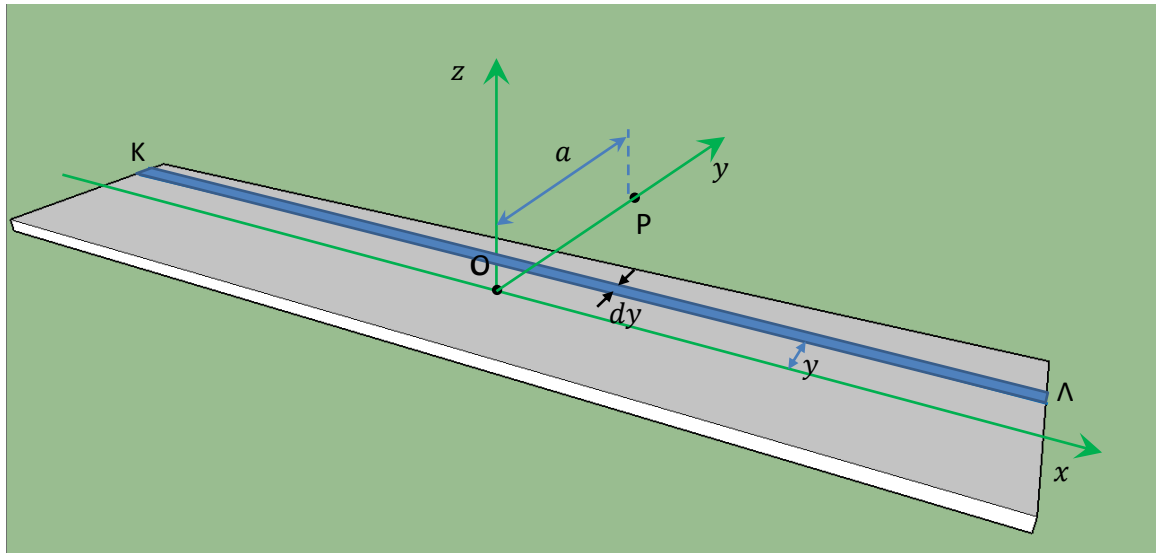


Απάντηση: $3.66 \times 10^{-9} \vec{e}_z \text{ T}$

Λύση: Είδαμε στο Πρόβλημα 9.8. ότι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένας ευθύγραμμος αγωγός πεπερασμένου μήκους L που διαρρέεται από ρεύμα I σε σημείο P επάνω στη μεσοκάθετο του και σε απόσταση ρ από αυτόν δίνεται από την

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4\rho^2}}$$

με φορά κάθετα στην λωρίδα, δηλαδή κατά μήκος του άξονα z . Μπορούμε να κάνουμε χρήση αυτού του αποτελέσματος, "τεμαχίζοντας" τον δεδομένο αγωγό όπως στο παρακάτω σχήμα, σε ευθύγραμμους ράβδους όπως η ΚΛ κατά μήκος του άξονα- x , με πλάτος dy και πάχος t .



Η διατομή αυτού του στοιχειώδους αγωγού ΚΛ κάθετα στη φορά του ρεύματος είναι ίση με $t \times dy$ (ορθογώνια) και επομένως το ρεύμα που τη διαρρέει είναι ίσο με $dI = Jtdy$. Κάνοντας χρήση του αποτελέσματος του Προβλήματος 9.8., βλέπουμε ότι ο ΚΛ δημιουργεί στο σημείο P ένα μαγνητικό πεδίο με μέτρο

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi\rho} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4\rho^2}} = \frac{\mu_0 Jt}{2\pi\rho} \frac{dy}{\sqrt{L^2 + 4\rho^2}}$$

με φορά κατά μήκος του άξονα z . Εάν ο ΚΛ απέχει απόσταση y από την αρχή O, τότε η απόστασή του από το σημείο P είναι ίση με $\rho = a - y$ και $d\rho = -dy$. Έτσι σε διανυσματική μορφή, έχουμε το αποτέλεσμα

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Jt}{2\pi\rho} \frac{-d\rho}{\sqrt{L^2 + 4\rho^2}} \vec{e}_z$$

Το ολικό πεδίο προκύπτει με ολοκλήρωση. Το y έχει ως όρια τα $\pm w/2$ και άρα τα όρια του ρ είναι $a \mp w/2$. Έτσι

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = -\frac{\mu_0 Jt}{2\pi} \vec{e}_z \int_{\rho=a+w/2}^{\rho=a-w/2} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{L^2 + 4\rho^2}} = -\frac{\mu_0 Jt}{2\pi L} \vec{e}_z \int_{\rho=a+w/2}^{\rho=a-w/2} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{1 + 4\rho^2/L^2}}$$

Θέτουμε $u = 2\rho/L$ και έχουμε

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 Jt}{2\pi L} \vec{e}_z \int_{u=u_1}^{u_2} \frac{du}{u\sqrt{1 + u^2}}$$

όπου τα όρια είναι ίσα με

$$u_1 = \frac{2a}{L} + \frac{w}{L}$$

και

$$u_2 = \frac{2a}{L} - \frac{w}{L}$$

Από πίνακες ολοκληρωμάτων ή από Μαθηματικά λογισμικά βρίσκουμε για το ολοκλήρωμα ότι είναι ίσο με

$$\ln(u) - \ln[2(1 + \sqrt{1 + u^2})]$$

οπότε αντικαθιστώντας μπορούμε να βρούμε το τελικό αποτέλεσμα. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα νούμερα έχουμε για τα όρια

$$u_1 = \frac{2a}{L} + \frac{w}{L} = \frac{2 \times 1}{2} + \frac{0.5}{2} = 1.25$$

$$u_2 = \frac{2a}{L} - \frac{w}{L} = \frac{2 \times 1}{2} - \frac{0.5}{2} = 0.75$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\ln(u_2) - \ln[2(1 + \sqrt{1 + u_2^2})] - \ln(u_1) + \ln[2(1 + \sqrt{1 + u_1^2})] = -0.366$$

και έτσι

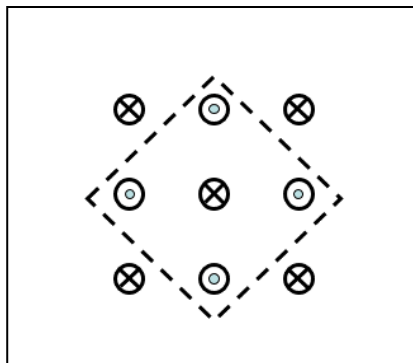
$$\vec{B} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 0.01}{2\pi \times 2} 0.366 \vec{e}_z \text{ T}$$

$$\vec{B} = 3.66 \vec{e}_z \text{ nT}$$

Πρόβλημα 9.13. Να γίνει το ίδιο στο προηγούμενο πρόβλημα εάν τώρα το σημείο παρατήρησης P βρίσκεται επάνω στον άξονα z σε απόσταση a από την αρχή των αξόνων.

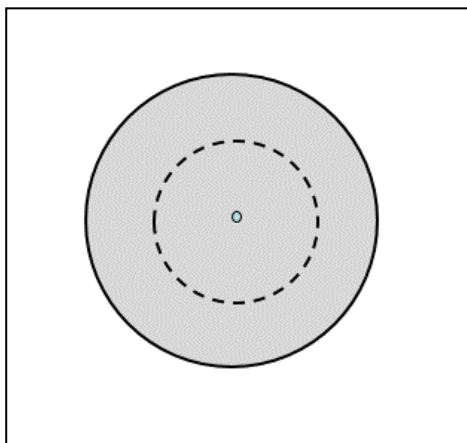
Πρόβλημα 9.14.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια διάταξη 3×3 λεπτών ρευματοφόρων αγωγών απείρου μήκους με τον καθένα να φέρει ρεύμα I και να τέμνει κάθετα την σελίδα με την φορά των ρευμάτων όπως δείχνεται. Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, η ποσότητα $1/\mu_0 \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ επάνω στη διακεκομμένη διαδρομή (το $d\vec{l}$ είναι το στοιχειώδες διάνυσμα μήκους) ισούται με: α) $3I$ β) I γ) $4I$ δ) 0

Πρόβλημα 9.15.

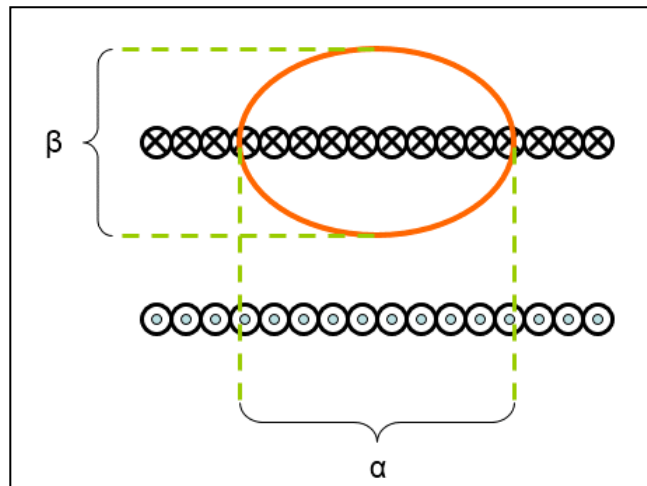
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας κυλινδρικός ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους και ακτίνας R που τέμνει κάθετα την σελίδα και διαρρέεται από ομοιόμορφο ρεύμα I . Ένας φοιτητής για να υπολογίσει την ένταση B του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου εφαρμόζει τον νόμο του Ampere επάνω στον διακεκομμένο νοητό κύκλο της σελίδας ο οποίος έχει ακτίνα $r = R/2$. Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, η ποσότητα $1/\mu_0 \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ επάνω στη διακεκομμένη διαδρομή (το $d\vec{l}$ είναι το στοιχειώδες διάνυσμα μήκους) ισούται με:

- α) I β) $2I$ γ) $4I$ δ) $I/4$

Πρόβλημα 9.16.

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται η πλάγια τομή ενός πηνίου με μεγάλο αριθμό σπειρών N και μεγάλο μήκος L . Εάν το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα I τότε σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, η ποσότητα $1/\mu_0 \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ επάνω στην νοητή έλλειψη (το $d\vec{l}$ είναι το στοιχειώδες διάνυσμα μήκους) ισούται με:

- α) NI β) NI/L γ) NaI/L δ) $N\beta I/L$

Πρόβλημα 9.17.

Να αποδείξετε με τον νόμο του Ampere την Εξ. 9.4 που εκφράζει το παραγόμενο μαγνητικό πεδίο από ένα ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους, η οποία αποδείχθηκε με τη βοήθεια του νόμου των Biot-Savart.

Πρόβλημα 9.18.

Το μαγνητικό πεδίο επάνω σε ένα νοητό κύκλο ακτίνας R με κέντρο επάνω στην αρχή των αξόνων δίνεται από την σχέση $B = B_0 \vec{e}_\varphi$ όπου $\vec{e}_\varphi$ είναι το μοναδιαίο της γωνίας φ στις πολικές συντεταγμένες. Να βρεθεί το ρεύμα διαμέσου του κύκλου εάν θεωρήσουμε ότι τέμνει κάθετα την επιφάνεια του κύκλου.

Πρόβλημα 9.19.

Το μαγνητικό πεδίο σε κάποιο χώρο δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την έκφραση

$$B = \frac{c}{\rho} \vec{e}_\varphi$$

όπου c είναι μια σταθερά, ρ η πολική ακτίνα και $\vec{e}_\varphi$ το μοναδιαίο της γωνίας φ . Να βρεθεί το ρεύμα I διαμέσου ενός νοητού κύκλου ακτίνας R που βρίσκεται στο επίπεδο $x-y$ με κέντρο επάνω στην αρχή των αξόνων εάν θεωρήσουμε ότι το I τέμνει κάθετα την επιφάνεια του κύκλου.

Λύση: Από τον νόμο του Ampere έχουμε

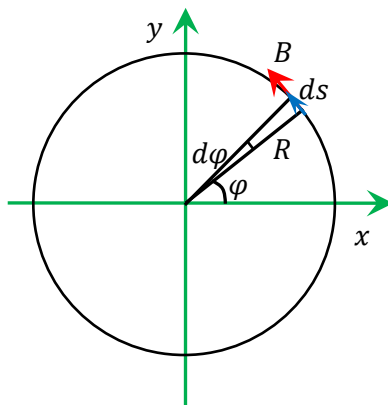
$$I = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

όπου επιλέγουμε ως καμπύλη Ampere τον δεδομένο κύκλο ο οποίος εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης στο ίδιο σχήμα φαίνεται και το εφαπτόμενο διάνυσμα $d\vec{s}$ του στοιχειώδους μήκους της καμπύλης το οποίο έχει μέτρο $ds = R d\theta$, καθώς και το μαγνητικό

πεδίο $\vec{B}$ σε τυχαίο σημείο με πολικές συντεταγμένες $\rho = R$ (πολική ακτίνα, επάνω στον κύκλο) και φ (πολική γωνία). Και τα δυο διανύσματα είναι κατά μήκος του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{e}_\varphi$ και έτσι το εσωτερικό γινόμενο μέσα στο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = B ds = \frac{c}{R} R d\theta = c d\theta$$

όπου αντικαταστήσαμε $\rho = R$ στην δεδομένη έκφραση του μαγνητικού πεδίου.



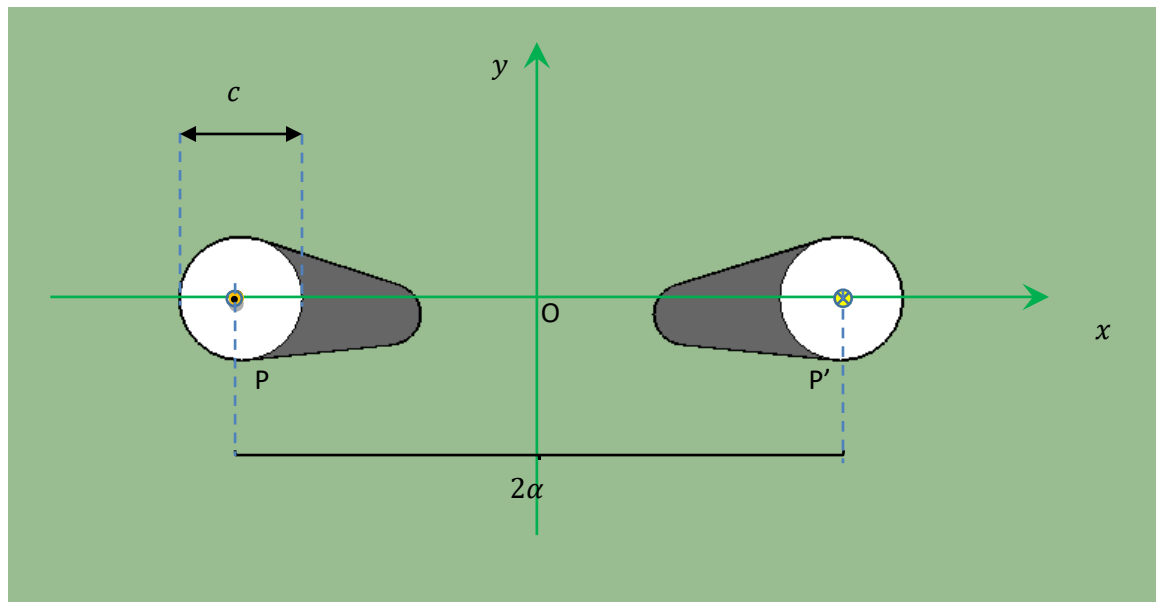
Αφού το c είναι σταθερό, η ολοκλήρωση είναι εύκολη και οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$I = \frac{c}{\mu_0} \oint d\theta = \frac{2\pi c}{\mu_0}$$

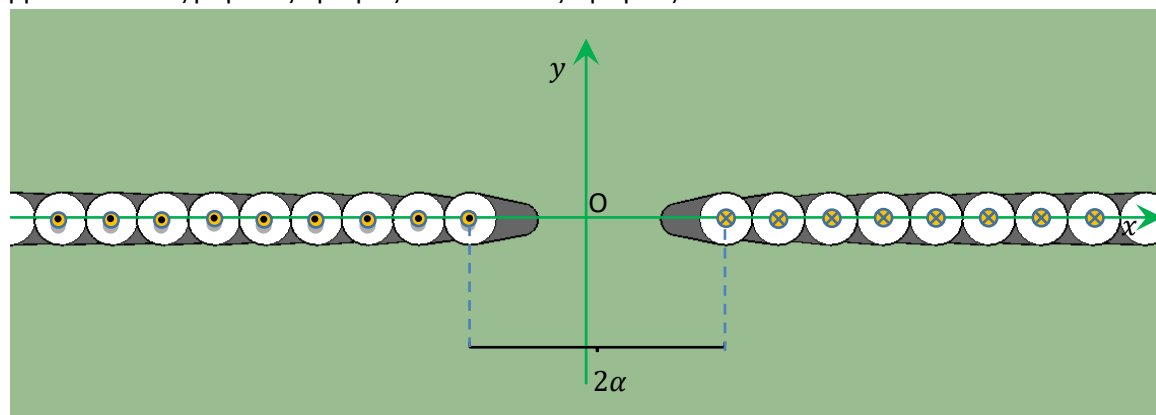
Πρόβλημα 9.20.

Στο παρακάτω σχήμα οι δυο λεπτοί κυλινδρικοί αγωγοί P και P' διαμέτρου c ο καθένας, τέμνουν τη σελίδα κάθετα, είναι απείρου μήκους και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I και με τη φορά που σημειώνεται.

α) Να βρεθεί το μέτρο και η φορά του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγουν οι δυο αγωγοί στο σημείο O της σελίδας το οποίο ισαπέχει από αυτούς και που το λαμβάνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων



β) Θεωρήστε τις παρακάτω δυο πεπερασμένες συστοιχίες αγωγών όπως αυτών στο μέρος α, οι οποίες βρίσκονται επάνω στον άξονα x συμμετρικά ως προς το O , η μια μεταξύ των ορίων $x = \alpha$ και $x = \beta$, ενώ η άλλη μεταξύ των $x = -\alpha$ και $x = -\beta$. Όλοι οι αγωγοί διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I με τη φορά που σημειώνεται. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του μέρους α, υπολογίστε με ολοκλήρωση το μέτρο και τη φορά του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγουν οι δυο συστοιχίες στο σημείο O . Σημείωση: Θεωρήστε ότι η διάμετρος c του κάθε αγωγού είναι πολύ μικρή $c \rightarrow 0$ και έτσι σε ένα μικρό απειροστό μήκος dx βρίσκεται ένας μεγάλος αριθμός από τέτοιους αγωγούς.



Λύση:

α) Είδαμε ότι στο εξωτερικό του χώρο, ένας κυλινδρικός αγωγός συμπεριφέρεται σαν ευθύγραμμος λεπτός αγωγός και έτσι το μαγνητικό του πεδίο δίνεται από την Εξ. 8.16

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

Στο σημείο O τα δυο παραγόμενα πεδία έχουν φορά προς τα κάτω και έτσι το συνιστάμενο πεδίο είναι κατά τη διεύθυνση $-y$. Και οι δυο αγωγοί απέχουν απόσταση $\rho = \alpha$ από το σημείο O και έτσι το μέτρο του συνιστάμενου πεδίου ισούται με

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} = \frac{\mu_0 I}{\pi\alpha}$$

β) Μπορούμε να θεωρήσουμε τους αγωγούς σε ζεύγη και να πούμε ότι σε τυχαία απόσταση $\pm x$ από το Ο βρίσκεται ένα τέτοιο ζεύγος το οποίο σύμφωνα με το αποτέλεσμα του μέρους α παράγει στο Ο πεδίο

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi x}$$

προς τα κάτω. Εάν τεμαχίσω τον άξονα- x σε απειροστά τμήματα μήκους dx το καθένα, τότε θα υπάρχει ένας συνολικός αριθμός $dN = dx/c$ τέτοιων αγωγών μέσα σε αυτό και άρα θα παράγουν μαγνητικό πεδίο στο Ο ίσο με:

$$dB = dN \frac{\mu_0 I}{\pi x} = \frac{\mu_0 I}{\pi c x} dx$$

Επειδή όλα τα dB είναι συγγραμμικά, μπορούμε απλά να αθροίσουμε τα μέτρα τους. Με ολοκλήρωση από το $x = a$ έως το $x = \beta$ παίρνουμε:

$$B = \int_{x=a}^{\beta} dB = \frac{\mu_0 I}{\pi c} \int_{x=a}^{\beta} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{\pi c} (\ln \beta - \ln a) = \frac{\mu_0 I}{\pi c} \ln \left(\frac{\beta}{a} \right)$$

Πρόβλημα 9.21.

Με τη βοήθεια του νόμου του Ampere να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο ενός σωλήνα απείρου μήκους με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική ακτίνα R_2 , ο οποίος διαρρέεται από ομοιόμορφο (κατά όγκο) ρεύμα I κατά μήκος του άξονά του.

10. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Πρόβλημα 10.1.

Μια μαγνητική ροή ίση με 13.6 mWb διαπερνάει ένα κυκλικό συρμάτινο βρόχο διαμέτρου 240 mm . Βρείτε το μαγνητικό πεδίο εάν ο βρόχος τέμνει κάθετα το πεδίο. (Λύση: 0.3 T)

Λύση:

Από τον ορισμό της ροής για ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B που τέμνει κάθετα ένα πλαίσιο εμβαδού A , έχουμε

$$\Phi = BA$$

Λύνοντας ως προς B έχουμε

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{\Phi}{\pi R^2} = \frac{13.6 \times 10^{-3}}{3.14 \times (0.12)^2} = 0.3 \text{ T}$$

Πρόβλημα 10.2.

Ένα ορθογώνιο πλαίσιο διαστάσεων $25 \times 15 \text{ cm}^2$ σχηματίζει γωνία θ με ένα μαγνητικό πεδίο μέτρου 0.6 T . Ποια είναι η γωνία θ εάν η μαγνητική ροή που διαπερνάει το πλαίσιο είναι ίση με 0.015 Wb ?

Λύση:

Από τον ορισμό της ροής για ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B που τέμνει υπό γωνία ένα πλαίσιο εμβαδού A , έχουμε

$$\Phi = BA \cos \varphi$$

Πρέπει να θυμηθούμε ότι η γωνία φ ορίζεται από το κάθετο στο πλαίσιο ενώ στην εκφώνηση μας ζητείται η γωνία θ από το πλαίσιο η οποία βέβαια είναι η συμπληρωματική της φ και έτσι

$$\Phi = BA \sin \theta$$

Λύνοντας ως προς θ έχουμε

$$\theta = \sin^{-1} \frac{\Phi}{BA} = \sin^{-1} \left(\frac{0.015}{0.6 \times 0.25 \times 0.15} \right) = 41.8^\circ$$

Πρόβλημα 10.3.

Κυκλικός βρόχος διαμέτρου 8 cm έχει 5 σπείρες και τοποθετείται σε περιοχή του χώρου με πεδίο B ίσο με 1.8 T . Εάν το B μειώνεται γραμμικά στην τιμή 0.6 T μέσα σε 0.004 s , ποια είναι η παραγόμενη ΗΕΔ; (Λύση 3.765 V)

Λύση:

Σύμφωνα με την εκφώνηση, το B συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την

$$B = 1.8 - \frac{0.6}{0.004}t$$

(εξίσωση ευθείας). Η αντίστοιχη ροή είναι ίση με

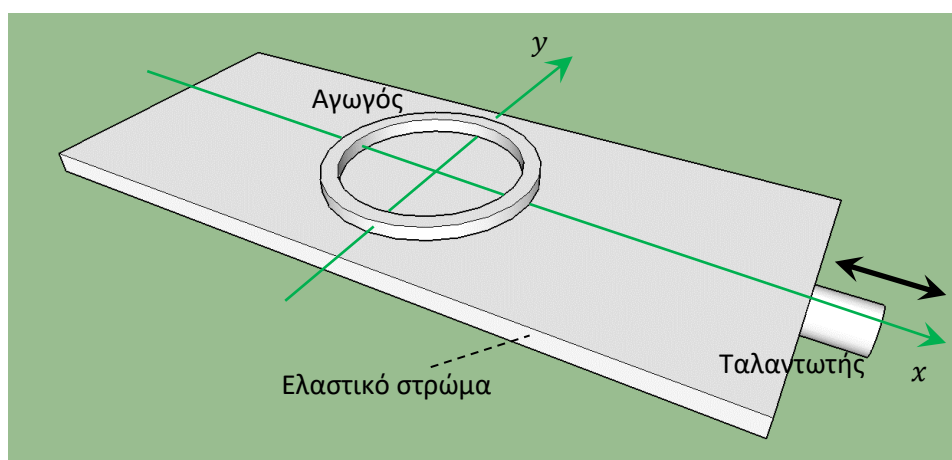
$$\Phi = NBA = N\pi R^2 B = 5 \times 3.14 \times 0.04^2 \left(1.8 - \frac{0.6}{0.004}t\right)$$

Από το νόμο του Faraday:

$$V = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = 5 \times 3.14 \times 0.04^2 \frac{0.6}{0.004} = 3.765 \text{ V}$$

Πρόβλημα 10.4.

Ο παρακάτω αγωγός σχήματος κύκλου με ακτίνα $a = 2 \text{ cm}$ βρίσκεται στερεωμένος επάνω σε ένα ελαστικό στρώμα. Ένας ταλαντωτής παραμορφώνει το στρώμα αρμονικά κατά μήκος του άξονα x με πλάτος $x_0 = 0.1 \text{ mm}$ και κυκλική συχνότητα $\omega = 500 \text{ rad/s}$. Θεωρείστε ότι ο αγωγός είναι από ελαστικό υλικό (όπως το κράμα κασσίτερου που χρησιμοποιείται στις ηλεκτρο-κολλήσεις κυκλωμάτων, γνωστό ως "καλάι") και έτσι ακολουθεί το στρώμα στις ταλαντώσεις και θεωρήστε επίσης ότι παραμορφώνεται μόνο ως προς τον άξονα x . Εάν το σύστημα αυτό τοποθετηθεί μέσα σε χώρο όπου υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 0.2 \text{ T}$ κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού, να βρεθεί η επαγόμενη ΗΕΔ στον αγωγό.



Λύση:

Λόγω της ταλάντωσης ο κύκλος συμπιέζεται σε έλλειψη. Ο ημιάξονας κατά μήκος του y παραμένει αναλλοίωτος με μήκος a ενώ ο άλλος ημιάξονας έχει μεταβλητό μήκος $b = a + x_0 \sin \omega t$. Το εμβαδό της έλλειψης ισούται με

$$A = \pi ab = \pi a(a + x_0 \sin \omega t) = \pi a^2 + \pi a x_0 \sin \omega t$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε μια σπείρα $N = 1$ και το μαγνητικό πεδίο τέμνει κάθετα τη σπείρα επομένως $\cos \theta = 1$ και έτσι η μαγνητική ροή ισούται με:

$$\Phi_M = NBA \cos \theta = BA = B\pi a^2 + B\pi a x_0 \sin \omega t$$

Από το νόμο του Faraday:

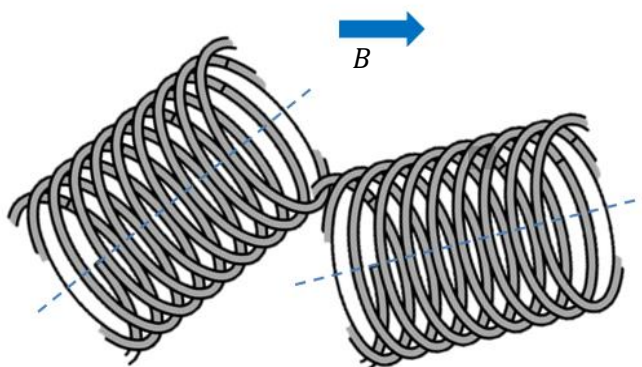
$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = B\omega\pi a x_0 \cos \omega t$$

Αυτή η τάση είναι εναλλασσόμενη $V = V_0 \cos \omega t$ με πλάτος

$$V_0 = B\omega\pi a x_0 = 0.2 \times 500 \times \pi \times 0.02 \times 10^{-4} = 6.28 \times 10^{-4} \text{ V}$$

Πρόβλημα 10.5.

Ένα κυκλικό πηνίο ακτίνας 2 cm με 10 σπείρες κολλητές μεταξύ τους, βρίσκεται μέσα σε ομοιογενές μαγνητικό πεδίο μέτρου 2.1 T . Η αρχική μαγνητική ροή διαμέσου του πηνίου είναι 16.96 mWb όταν ξαφνικά το πλαίσιο περιστρέφεται μέσα σε χρόνο 0.5 ms σε νέα θέση ώστε το κάθετό του να σχηματίζει γωνία 51.3° ως προς το μαγνητικό πεδίο. Να βρεθεί η επαγόμενη ΗΕΔ στο πηνίο λόγω αυτής της ξαφνικής περιστροφής εάν θεωρήσουμε ότι η περιστροφή αυτή γίνεται με σταθερό γωνιακό ρυθμό (σημείωση: στις παραγωγίσεις πρέπει οι γωνίες να εκφράζονται σε ακτίνια).



Λύση:

Από τον ορισμό της ροής για ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B που τέμνει υπό γωνία ένα πλαίσιο εμβαδού A , έχουμε

$$\Phi = NBA \cos \varphi$$

όπου η γωνία φ ορίζεται από το κάθετο στο πλαίσιο, δηλαδή από τον άξονα του πηνίου. Για την αρχική θέση έχουμε

$$\cos \varphi_1 = \frac{\Phi}{NBA} = \frac{\Phi}{NB\pi R^2} = \frac{8.48 \times 10^{-3}}{10 \times 2.1 \times 3.14 \times 0.02^2} = 0.643$$

ή

$$\varphi_1 = 50.0^\circ$$

Από την εκφώνηση, η τελική γωνία που σχηματίζει ο άξονας του πηνίου με το μαγνητικό πεδίο, είναι ίση με

$$\varphi_2 = 51.3^\circ$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, αυτή η μεταβολή γίνεται με σταθερό γωνιακό ρυθμό και άρα

$$\varphi = \varphi_1 + \omega t$$

όπου

$$\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{1.3^\circ}{0.5 \text{ ms}}$$

Ακολουθώντας την υπόδειξη της σημείωσης, πρέπει να μετατρέψουμε το ω σε ακτίνια

$$\omega = \frac{\pi}{180} \frac{1.3}{0.5 \times 10^{-3}} = 45.4 \text{ rad/s}$$

Επίσης η φ_1 σε ακτίνια είναι ίση με

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{180} 50 = 0.873 \text{ rad}$$

Από τον ορισμό της ροής για ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B που τέμνει υπό γωνία ένα πλαίσιο εμβαδού A , έχουμε

$$\Phi = N B A \cos \varphi = N B A \cos(\varphi_1 + \omega t)$$

Από τον νόμο του Faraday

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega N B \pi R^2 \sin(\varphi_1 + \omega t)$$

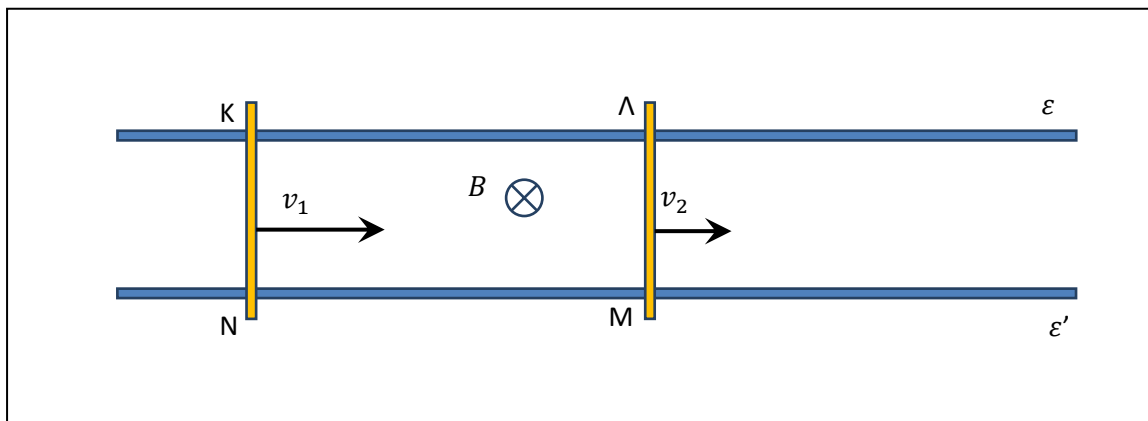
Από τα δεδομένα

$$V = 45.4 \times 10 \times 2.1 \times \pi \times 0.02^2 \sin(0.873 + 45.4 \times 0.5 \times 10^{-3})$$

$$V = 0.935 \text{ Volts}$$

Πρόβλημα 10.6.

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζονται δυο κατακόρυφοι αγωγοί ΚΝ και ΛΜ οι οποίοι κινούνται με ταχύτητες v_1 και $v_2 < v_1$ αντίστοιχα προς τα δεξιά. Αυτοί οι αγωγοί είναι σε συνεχή επαφή με τους οριζόντιους και σταθερούς αγωγούς ε και ε' στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν έτσι ώστε να σχηματίζεται ένα αγωγίμο ορθογώνιο πλαίσιο ΚΛΜΝ την κάθε στιγμή. Η απόσταση μεταξύ αυτών των οριζόντιων αγωγών είναι ίση με w . Εάν κάθετα στο επίπεδο της σελίδας υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B , να βρεθεί η ΗΕΔ σε αυτό το πλαίσιο.



Λύση:

Από τον ορισμό της ροής για ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B που τέμνει κάθετα ένα πλαίσιο εμβαδού A , έχουμε

$$\Phi = BA$$

Εδώ το εμβαδό του πλαισίου μεταβάλλεται με το χρόνο. Εάν υποθέσουμε ότι στο $t = 0$ και οι δυο κατακόρυφοι αγωγοί ΚΝ και ΛΜ απείχαν αρχική απόσταση x_0 μεταξύ τους, τότε το οριζόντιο μήκος του πλαισίου σε χρόνο $t > 0$ είναι ίσο με

$$\Delta x = x_0 + (v_1 - v_2)t$$

Αφού η απόσταση μεταξύ των οριζόντιων αγωγών είναι ίση με w , τότε το εμβαδό του πλαισίου είναι ίσο με $A = w\Delta x$ και η ροή

$$\Phi = Bw\Delta x = Bwx_0 + Bw(v_1 - v_2)t$$

Από τον νόμο του Faraday

$$|V| = \frac{d\Phi}{dt} = Bw(v_1 - v_2)$$

Πρόβλημα 10.7.

Ένα συρμάτινο κυκλικό πλαίσιο ακτίνας R τοποθετείται κάθετα σε μαγνητικό πεδίο B_1 . Μέσα σε χρονικό διάστημα Δt , το B αυξάνει γραμμικά σε B_2 . Εάν το πλαίσιο περιέχει N σπείρες, και η επαγόμενη ΗΕΔ είναι V (σε απόλυτη τιμή), πόσο είναι το R ; Δίνονται τα B_1 , Δt , B_2 και V (σε αντιστοιχία).

Λύση: Αφού το B αυξάνει γραμμικά, τότε θα είναι της μορφής

$$B = B_1 + \frac{B_2 - B_1}{\Delta t} t$$

με κλίση

$$\frac{dB}{dt} = \frac{B_2 - B_1}{\Delta t}$$

Εφόσον το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο πλαίσιο, η γωνία θ που σχηματίζει η κάθετος με το μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν και έτσι η μαγνητική ροή ισούται με:

$$\Phi_M = NBA \cos \theta = NBA$$

Από το νόμο του Faraday:

$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = NA \frac{dB}{dt} = N\pi R^2 \frac{B_2 - B_1}{\Delta t} \Rightarrow R^2 = \frac{V\Delta t}{N\pi(B_2 - B_1)}$$

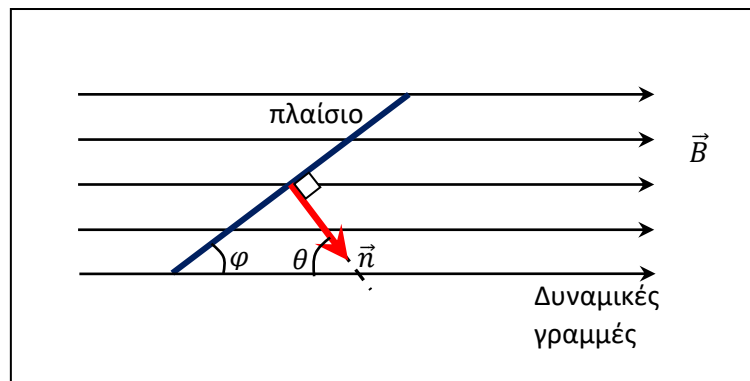
οπότε

$$R = \sqrt{\frac{V\Delta t}{N\pi(B_2 - B_1)}}$$

Πρόβλημα 10.8.

Ένα τετραγωνικό αγωγίμο πλαίσιο με $N = 10$ σπείρες κολλητά η μια με την άλλη, με εμβαδό $A = 0.25 \text{ m}^2$ η καθεμία, περιστρέφεται ελεύθερα ώστε το συννημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζει το επίπεδο του πλαισίου με ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο $B = 0.2 \text{ T}$ να μειώνεται γραμμικά με το χρόνο με αρχική τιμή 1. Σε χρόνο $t = 2 \text{ s}$ το πλαίσιο έχει καλύψει γωνία $\Delta\varphi = \pi/4 \text{ rad}$ (σε σχέση με την αρχική του θέση). Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ κατ' απόλυτη τιμή σε *Volts* σε αυτή τη θέση του πηνίου (θεωρώντας ότι η κίνηση συνεχίζεται και μετά από αυτή τη θέση);

Λύση:



Θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Faraday. Η μαγνητική ροή διαμέσου του πλαισίου ισούται με

$$\Phi_M = NBA \cos \theta$$

Όμως χρειάζεται προσοχή, η γωνία θ σε αυτό το νόμο είναι η γωνία που σχηματίζει το κάθετο $\vec{n}$ του πλαισίου με το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ ενώ η δεδομένη γωνία φ είναι η γωνία που σχηματίζει το πλαίσιο με το μαγνητικό πεδίο. Οι δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\theta + \varphi = \pi/2$ και έτσι $\cos \theta = \sin \varphi$. Η μαγνητική ροή γίνεται

$$\Phi_M = NBA \sin \varphi$$

Μας δίνεται πληροφορία για το συνημίτονο και έτσι γράφουμε αυτή τη σχέση με τη βοήθεια της βασικής τριγωνομετρικής σχέσης $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ ως

$$\Phi_M = \pm NBA\sqrt{1 - \cos^2\varphi}$$

Αφού μας δίνεται ότι αρχικά $\cos\varphi = 0$ τότε η αρχική της τιμή της γωνίας είναι $\varphi = 0$ ενώ το πλαίσιο έρχεται σε τελική θέση με $\Delta\varphi = \pi/4 \text{ rad}$ και έτσι εκεί $\varphi = \pi/4 \text{ rad}$. Αυτό σημαίνει ότι η φ παραμένει στο 1^ο τεταρτημόριο όπου $\cos\varphi > 0$ και έτσι δεν χρειάζεται η αρνητική τιμή της ρίζας παραπάνω. Από τα δεδομένα το συνημίτονο της γωνίας μειώνεται γραμμικά με το χρόνο με αρχική τιμή 1 και επομένως θα είναι της μορφής

$$\cos\varphi = 1 - \lambda t$$

όπου λ η κλίση της παραπάνω γραμμικής σχέσης. Αφού στο χρόνο $t = 2 \text{ s}$ έχουμε $\varphi = \pi/4$ τότε

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.146$$

Η μαγνητική ροή γίνεται

$$\Phi_M = NBA\sqrt{1 - (1 - \lambda t)^2}$$

Σύμφωνα τον νόμο του *Faraday* η επαγόμενη ΗΕΔ ισούται κατά μέτρο με

$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(NBA\sqrt{1 - (1 - \lambda t)^2}\right) = NBA \frac{\lambda(1 - \lambda t)}{\sqrt{1 - (1 - \lambda t)^2}}$$

Μας ζητείται η ΗΕΔ τη στιγμή $t = 2 \text{ s}$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$V = 10 \times 0.2 \times 0.25 \frac{0.146(1 - 0.146 \times 2)}{\sqrt{1 - (1 - 0.146 \times 2)^2}} = 73.2 \text{ mV}$$

Πρόβλημα 10.9.

Ένα τετραγωνικό αγωγίμο πλαίσιο 5 σπειρών κολλητά η μια με την άλλη, με εμβαδό 0.1 m^2 η κάθεμία, περιστρέφεται ελεύθερα ώστε η γωνία φ που σχηματίζει το επίπεδο του πλαισίου με ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο $B = 0.3 \text{ T}$ να μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο με αρχική τιμή 0. Σε χρόνο $\Delta t = 0.5 \text{ s}$ το πλαίσιο έχει καλύψει γωνία $\Delta\varphi = 2 \text{ rad}$ (σε σχέση με την αρχική του θέση). Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ κατ' απόλυτη τιμή σε *Volts* σε αυτή τη θέση του πηνίου (θεωρώντας ότι η κίνηση συνεχίζεται και μετά από αυτή τη θέση;

Απάντηση: -0.25 Volts

Λύση:

Πρέπει να θυμηθούμε ότι η γωνία θ που χρησιμοποιούμε στον ορισμό της μαγνητικής ροής

$$\Phi_M = NBA\cos\theta$$

είναι η γωνία που σχηματίζει η κάθετος με το μαγνητικό πεδίο. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα μας δίνεται η γωνία φ που σχηματίζει το επίπεδο του πλαισίου με το μαγνητικό πεδίο. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, αυτές οι δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές και έτσι

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Αφού η φ αυξάνει γραμμικά με το χρόνο με αρχική τιμή 0, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\varphi = \lambda t$$

όπου λ είναι η κλίση αυτής της αύξησης. Από τα δεδομένα έχουμε $\lambda = \Delta\varphi/\Delta t$ και έτσι

$$\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} t$$

Η αντίστοιχη εξίσωση για την γωνία θ ισούται με:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} t$$

Η μαγνητική ροή ισούται με

$$\Phi_M = NBA \cos\theta = NBA \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} t\right)$$

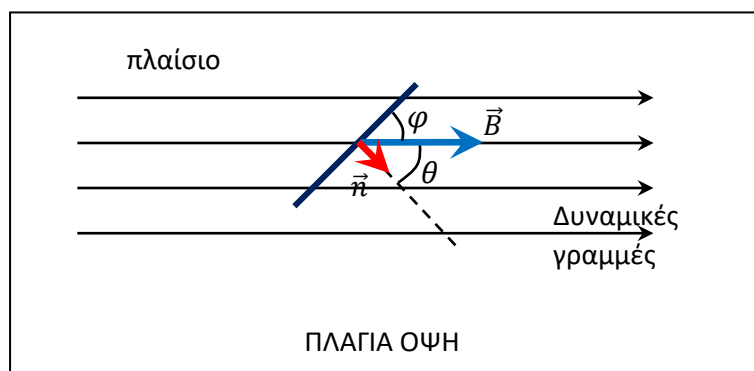
Από τον νόμο του Faraday

$$V = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} NBA \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} t\right)$$

Από τα δεδομένα

$$V = -\frac{2}{0.5} 5 \times 0.3 \times 0.1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{0.5} 0.5\right) = 0.6 \cos(2) = -0.25 \text{ Volts}$$

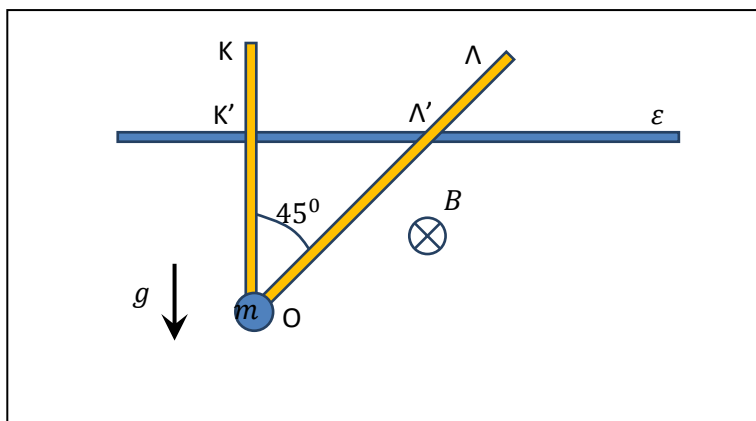
(Προσέξτε ότι χρησιμοποιήσαμε για χρόνο $t = 0.5 \text{ s}$ αφού μας ζητάνε υπολογισμό στο τέλος της περιόδου του χρόνου Δt)



Πρόβλημα 10.10.

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζονται ένας σταθερός αγωγός ε και ένας δεύτερος κινούμενος αβαρής αγωγός ΚΟΛ σε σχήμα γωνίας (σταθερού σχήματος) όπου $\widehat{ΚΟΛ} = 45^\circ$. Στη κορυφή

Ο της γωνίας είναι προσδεμένη σημειακή μάζα m η οποία εκτελεί κατακόρυφη ελεύθερη πτώση ξεκινώντας στο $t = 0$ από το ύψος του ε , παρασύροντας τον ΚΟΛ επίσης σε καθαρή κατακόρυφη πτώση χωρίς περιστροφή. Οι δυο αγωγοί είναι σε συνεχή επαφή μεταξύ τους στα σημεία K' και Λ' , χωρίς τριβή έτσι ώστε να σχηματίζεται ένα αγωγίμο τριγωνικό ισοσκελές πλαίσιο $K'O\Lambda'$ σε κάθε στιγμή. Εάν κάθετα στο επίπεδο της σελίδας υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 0.2 \text{ T}$, να βρεθεί η ΗΕΔ σε αυτό το πλαίσιο κατά τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ (πάρτε $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ για ευκολία).



Λύση:

Έστω y η απόσταση της μάζας m στο χρόνο t από τον οριζόντιο αγωγό ε η οποία σύμφωνα με τα δεδομένα έχει αρχική τιμή $y(0) = 0$. Από ότι γνωρίζουμε από τη Φυσική Ι, στην ελεύθερη πτώση ισχύει

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

Αυτή η απόσταση y είναι ίση με την πλευρά $K'O$ του τριγώνου αλλά αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε είναι ίση και με την πλευρά $\Lambda'O$. Το εμβαδό του τριγώνου $K'O\Lambda'$ ισούται με

$$A = \frac{1}{2}(K'O) \times (\Lambda'O) = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{8}g^2t^4$$

και η μαγνητική ροή μέσω του τριγώνου ισούται με

$$\Phi_B = BA \cos 0^\circ = \frac{1}{8}Bg^2t^4$$

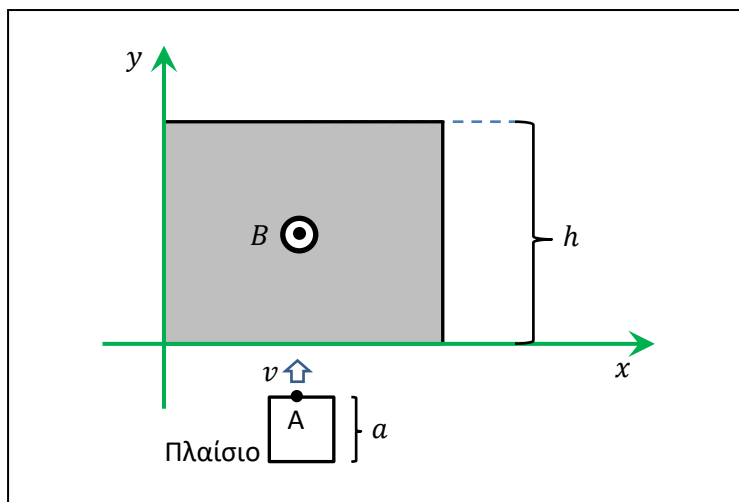
Σύμφωνα με τον νόμο του Faraday

$$V = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{2}Bg^2t^3 = \frac{1}{2}0.2 \times 10^2 \times 2^3 = 80 \text{ V}$$

Πρόβλημα 10.11

Στο παρακάτω σχήμα ένα τετράγωνο πλαίσιο διαστάσεων $a \times a$ εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα v μέσα σε χώρο όπου υπάρχει ομοιογενές μαγνητικό πεδίο μέτρου B και με φορά

έξω από την σελίδα (γραμμοσκιασμένη περιοχή). Το μαγνητικό πεδίο εκτείνεται σε μια περιοχή εύρους h κατά μήκος του άξονα y . Έστω ότι y είναι η συντεταγμένη του σημείου Α του πλαισίου και ότι $y = 0$ όταν $t = 0$. Να γίνει η γραφική παράσταση της επαγόμενης τάσης V στο πλαίσιο συνάρτησε του t .



Λύση:

Από τα δεδομένα, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Α του πλαισίου αγγίζει τον άξονα x και η κατακόρυφη συντεταγμένη του είναι $y = 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του *Faraday* για να λύσουμε το πρόβλημα. Η μαγνητική ροή διαμέσου του πλαισίου ισούται με

$$\Phi_M = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B dA \cos\theta$$

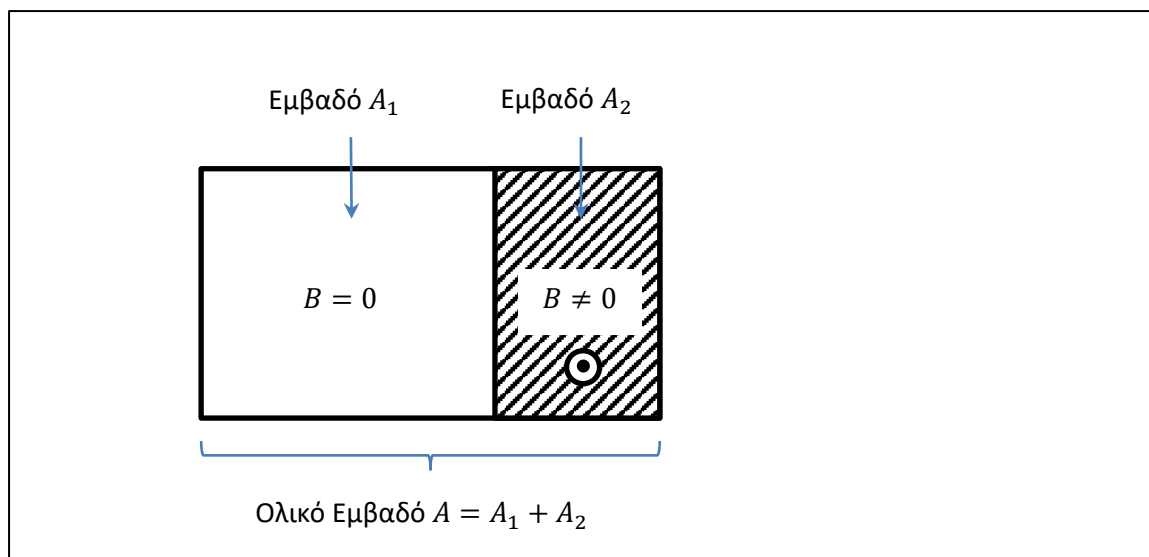
Στην προκειμένη περίπτωση $\theta = 0$ (θυμηθείτε ότι το θ είναι η γωνία μεταξύ του B και του κάθετου στο πλαίσιο) οπότε

$$\Phi_M = \int_S B dA$$

Θεωρήστε το παρακάτω σχήμα όπου ένα ορθογώνιο πλαίσιο βρίσκεται μερικώς μέσα σε περιοχή όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο B κάθετο στο πλαίσιο (γραμμοσκιασμένη περιοχή). Έστω ότι το εμβαδό του πλαισίου είναι A και ότι μόνο ένα μέρος αυτού A_2 είναι μέσα στο πεδίο ενώ το υπόλοιπο A_1 είναι στην περιοχή εκτός πεδίου όπου $B = 0$. Τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\Phi_M = 0 \cdot A_1 + B \cdot A_2$$

όπου το B βγήκε εκτός ολοκληρώματος επειδή είναι σταθερό και φυσικά το ολοκλήρωμα του dA είναι ίσο με το εμβαδό της κάθε περιοχής.



Βάσει της παραπάνω σχέσης, έχουμε τις εξής πέντε περιπτώσεις για το δεδομένο κινούμενο πλαίσιο οι οποίες εικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:

α) $y < 0$, δηλαδή πριν να εισέλθει το πλαίσιο στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Τότε

$$\Phi_M = 0$$

β) $y > 0$ αλλά $y < a$. Το πλαίσιο βρίσκεται μερικώς μόνο στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Αφού η ταχύτητα του πλαισίου είναι σταθερή, τότε η συντεταγμένη του σημείου Α είναι ίση με $y = vt$ και το εμβαδό A_2 του πλαισίου που βρίσκεται υπό το πεδίο είναι ίσο με $A_2 = ay = avt$ και επομένως

$$\Phi_M = B avt$$

γ) $y > a$ αλλά $y < h$. Το πλαίσιο βρίσκεται ολικώς μέσα στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου και άρα $A_2 = A = a^2$ το ολικό εμβαδό του πλαισίου. Η μαγνητική ροή είναι σταθερή και ίση με

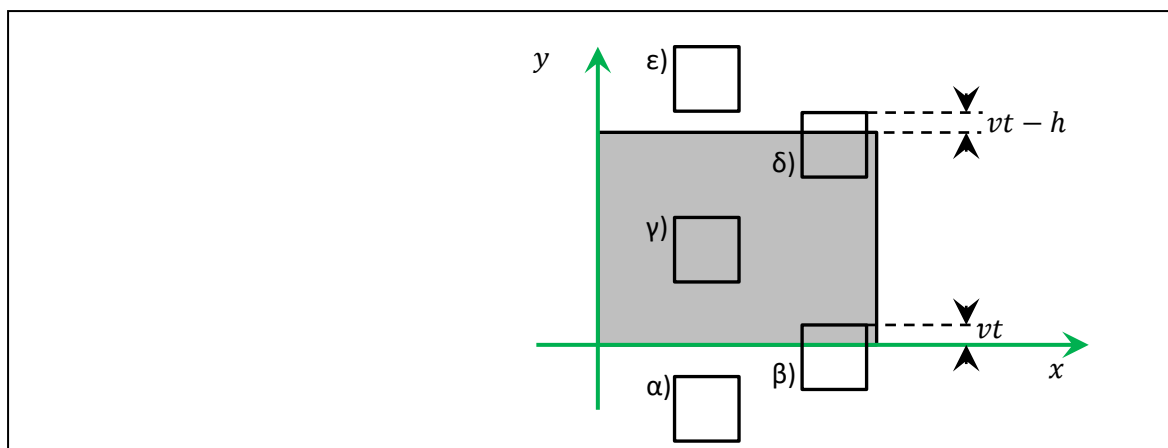
$$\Phi_M = Ba^2$$

δ) $y > h$ αλλά $y < a + h$. Το πλαίσιο βρίσκεται μερικώς μόνο στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Αφού η ταχύτητα του πλαισίου είναι σταθερή, τότε η συντεταγμένη του σημείου Α είναι ίση με $y = vt$. Το μήκος $y - h = vt - h$ βρίσκεται εκτός της περιοχής του πεδίου ενώ το υπόλοιπο μήκος $a - (vt - h)$ βρίσκεται εντός. Επομένως $A_2 = a(a - vt + h)$. Η μαγνητική ροή είναι ίση με

$$\Phi_M = Ba(a - vt + h)$$

ε) $y > a + h$. Το πλαίσιο έχει πλέον βγει εντελώς εκτός της περιοχής του μαγνητικού πεδίου και έτσι

$$\Phi_M = 0$$



Σύμφωνα τον νόμο του *Faraday* η επαγόμενη ΗΕΔ ισούται κατά μέτρο με

$$V = \frac{d\Phi_M}{dt}$$

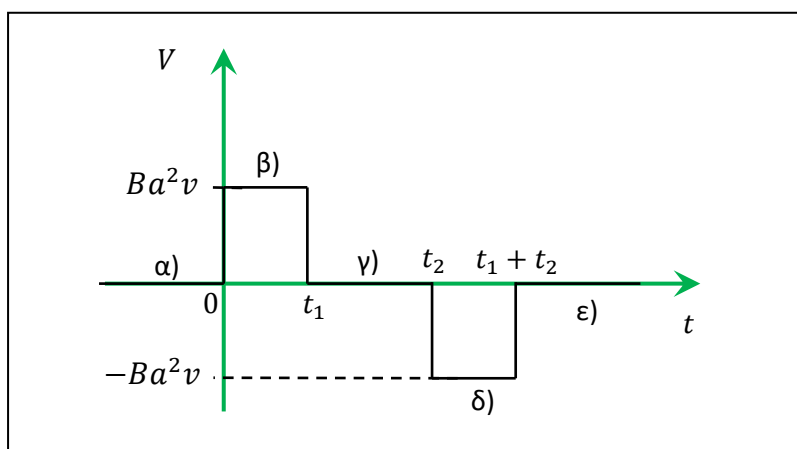
Επομένως έχουμε για τις παραπάνω πέντε περιπτώσεις:

$$\Phi_M = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ Ba^2v & 0 < y < a \\ 0 & a < y < h \\ -Ba^2v & h < y < h + a \\ 0 & y > h + a \end{cases}$$

Αφού η ταχύτητα του πλαισίου είναι σταθερή, τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς το χρόνο $t = y/v$ και να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση ως

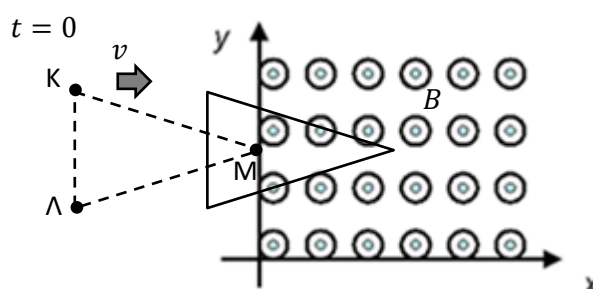
$$\Phi_M = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ba^2v & 0 < t < t_1 \\ 0 & t_1 < t < t_2 \\ -Ba^2v & t_2 < t < t_1 + t_2 \\ 0 & y > t_1 + t_2 \end{cases}$$

όπου $t_1 = a/v$ και $t_2 = h/v$. Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η εξής:



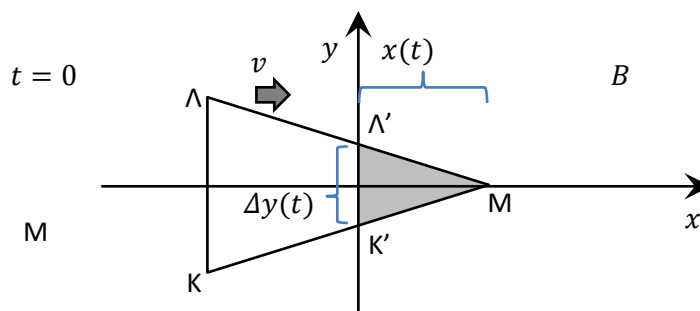
Πρόβλημα 10.12

Στο παρακάτω σχήμα ο αγωγός ΚΛΜΚ έχει το σχήμα ισοσκελούς τριγώνου με τις πλευρές ΚΜ και ΛΜ να είναι ίσες μεταξύ τους, την βάση ΚΛ μήκους $w = 5 \text{ cm}$ να είναι παράλληλη με τον άξονα y και την απόσταση Μ από την ΚΛ (το ύψος) να είναι ίσο με $h = 9.9 \text{ cm}$. Αρχικά ο αγωγός είναι ακίνητος και η κορυφή Μ βρίσκεται επάνω στον άξονα y ο οποίος χωρίζει το επίπεδο της σελίδας σε δυο περιοχές, σε μια που αντιστοιχεί σε $x \geq 0$ και όπου υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 1.2 \text{ T}$ με τη φορά που δείχνεται (έξω από την σελίδα) και σε μια άλλη με $x < 0$ όπου $B = 0$. Ο αγωγός τίθεται σε επιταχυνόμενη κίνηση στο $t = 0$ παράλληλα με το θετικό άξονα x με σταθερή επιτάχυνση $a = 2.2 \text{ m/s}^2$ και σε χρόνο t_1 η βάση ΚΛ φτάνει στον άξονα y . Ποια είναι η επαγόμενη τάση V (κατά μέτρο) στον αγωγό την χρονική στιγμή $t = t_1^-$ (οριακά λίγο πριν το t_1);

Λύση:

Η μαγνητική ροή Φ για σταθερό μαγνητικό πεδίο B κάθετο σε μια επιφάνεια A ισούται με το γινόμενο BA . Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της κίνησης του τριγώνου, μόνο το τμήμα ΜΚ'Λ'Μ που βρίσκεται μεταξύ της κορυφής Μ και του άξονα y βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Αυτό το τμήμα είναι τριγωνικό και άρα έχει εμβαδό

$$A(t) = \frac{1}{2} \Delta y(t) \times x(t)$$



Λόγω της επιταχυνόμενης κίνησης,

$$x(t) = \frac{1}{2} at^2$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΚΛΜ και Κ'Λ'Μ έχουμε

$$\frac{x}{\Delta y} = \frac{h}{w}$$

Συνδυάζοντας

$$A(t) = \frac{w}{2h} x^2(t) = \frac{wa}{4h} t^4$$

Από τον νόμο του Faraday η επαγόμενη τάση την χρονική στιγμή $t = t_1$ είναι ίση κατά μέτρο με

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{wa}{h} t_1^3$$

Η βάση ΚΜ φτάνει στον άξονα y την χρονική στιγμή $t = t_1$ όταν η κορυφή Μ έχει καλύψει απόσταση ίση με το ύψος h δηλαδή:

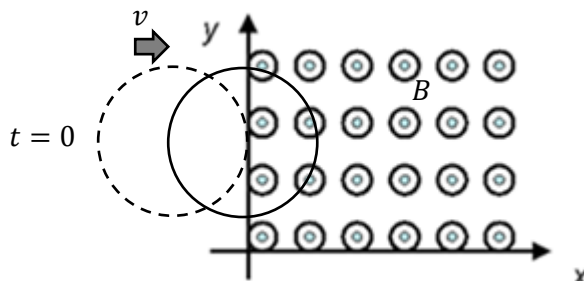
$$h = \frac{1}{2} a t_1^2$$

Αντικαθιστώντας στην τάση V έχουμε

$$V = \frac{2wa}{at_1^2} t_1^3 = 2wt_1 = 2w \sqrt{\frac{2h}{a}} = 2 \times 0.05 \sqrt{\frac{2 \times 0.099}{2.2}} = 13.65 \text{ mV}$$

Πρόβλημα 10.13

Στο παρακάτω σχήμα ο αγωγός σχήματος κύκλου έχει ακτίνα R και αρχικά είναι ακίνητος και εφάπτεται στα αριστερά του άξονα y ο οποίος χωρίζει το επίπεδο της σελίδας σε δυο περιοχές, σε μια που αντιστοιχεί σε $x \geq 0$ και όπου υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο ίσο με B με τη φορά που δείχνεται (έξω από την σελίδα) και σε μια άλλη με $x < 0$ όπου δεν υπάρχει πεδίο. Ο αγωγός τίθεται σε ομαλή κίνηση στο $t = 0$ παράλληλα με τον θετικό άξονα x με σταθερή ταχύτητα v και σε χρόνο $t_1 = R/v$ ο μισός κύκλος έχει μόλις εισέλθει στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Να δοθεί μια έκφραση της μαγνητικής ροής που διέρχεται διαμέσου του κυκλικού αγωγού συναρτήσει του χρόνου για $0 < t < t_1$. Χρήσιμα εμβαδά: Κυκλικός τομέας γωνίας 2θ (τμήμα πίττας) $E = \theta R^2$, Τρίγωνο $E = 1/2 \beta v$.

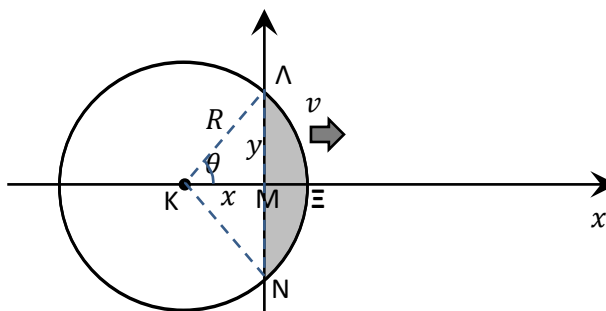


Λύση:

Η μαγνητική ροή Φ για σταθερό μαγνητικό πεδίο B κάθετο σε μια επιφάνεια A ισούται με το γινόμενο BA . Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της κίνησης του κύκλου, μόνο το

τμήμα $\Lambda MN\Xi\Lambda$ που βρίσκεται μεταξύ του προπορευόμενου σημείου Ξ και του άξονα y βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Έστω x το μήκος KM και y το μήκος $\Lambda M = MN$. Το εμβαδό A του τμήματος $\Lambda MN\Xi\Lambda$ προκύπτει από την αφαίρεση του εμβαδού του κυκλικού τομέα $\Lambda KN\Xi\Lambda$ μείον του τριγώνου $K\Lambda N$. Επομένως

$$A = \theta R^2 - 2 \frac{1}{2} yx$$



Λόγω της ομαλής κίνησης $M\Xi = vt$ και έτσι

$$x(t) = R - vt$$

ενώ από Πυθαγόρειο

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{2Rvt - v^2 t^2} = \sqrt{vt(2R - vt)}$$

Επίσης από απλή τριγωνομετρία

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Επομένως

$$A = R^2 \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - yx$$

Αντικαθιστώντας τα x και y συναρτήσει του χρόνου, η μαγνητική ροή $\Phi = BA$ ισούται με

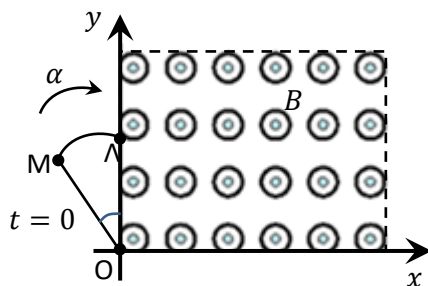
$$\Phi = BR^2 \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{vt(2R - vt)}}{R - vt} \right) - B(R - vt)\sqrt{vt(2R - vt)}$$

που είναι και η τελική έκφραση.

Πρόβλημα 10.14

Στο παρακάτω σχήμα ο αγωγός ΟΜΛΟ αποτελείται από δυο ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΟΜ και ΟΛ μήκους 0.1 m το καθένα, ένα τόξο ΛΜ γωνίας 0.6 rad ενώ μπορεί και περιστρέφεται γύρω από την αρχή των συντεταγμένων Ο και είναι αρχικά ακίνητος και έτσι προσανατολισμένος ώστε η πλευρά του ΟΛ να εφάπτεται στον άξονα y . Στον χώρο υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 0.4 \text{ T}$ μόνο μέσα στο ορθογώνιο που ορίζεται από τις διακεκομμένες γραμμές και τους δυο άξονες x και y , με διαστάσεις μερικών μέτρων. Ο αγωγός τίθεται σε ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση στο $t = 0$ με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = 7.5 \text{ rad/s}^2$ και φορά σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού ενώ σε χρόνο t_1 η πλευρά

ΟΜ φτάνει στον άξονα y . Ποια είναι η επαγόμενη τάση V (κατά μέτρο) στον αγωγό την χρονική στιγμή $t = t_1^-$ (οριακά λίγο πριν το t_1); Χρήσιμα εμβαδά, Κυκλικός τομέας γωνίας 2θ : $E = \theta R^2$, Τρίγωνο: $E = 1/2 \beta v$, Τραπεζίο: $E = (\alpha + \beta)v/2$



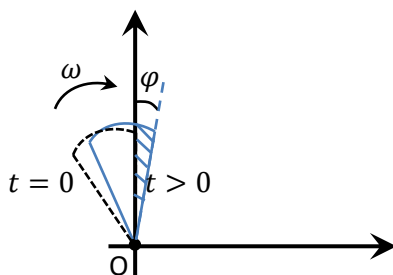
Λύση:

Η μαγνητική ροή Φ για σταθερό μαγνητικό πεδίο B κάθετο σε μια επιφάνεια A ισούται με το γινόμενο BA . Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της περιστροφής του αγωγού, μόνο το σκιαγραφημένο τμήμα του βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Αυτό το τμήμα αντιστοιχεί σε γωνία $\varphi = 1/2 \alpha t^2$ και επομένως έχει εμβαδό

$$A = \frac{\varphi}{2} R^2 = \frac{\alpha t^2}{4} R^2$$

και η μαγνητική ροή είναι ίση με

$$\Phi = BA = \frac{\alpha t^2}{4} B R^2$$



Από τον νόμο του Faraday η επαγόμενη τάση την χρονική στιγμή $t = t_1$ είναι ίση κατά μέτρο με

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\alpha t_1}{2} B R^2$$

Αφού σε χρόνο t_1 η πλευρά ΟΜ φτάνει στον άξονα y , τότε

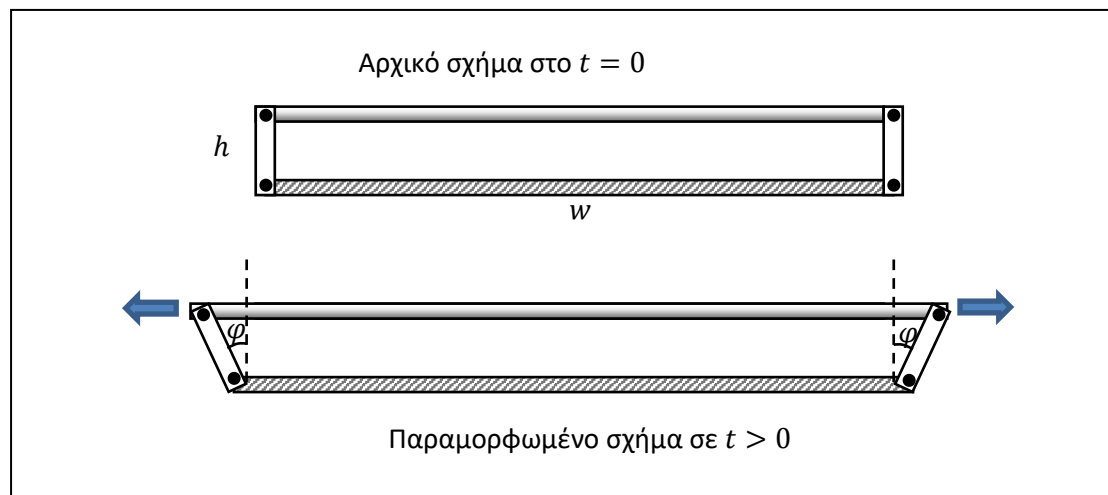
$$\frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \theta_0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\theta_0}{\alpha}}$$

Αντικαθιστώντας στην τάση V έχουμε

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{2\alpha\theta_0} BR^2 = \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 7.5 \times 0.6 \times 0.4 \times 0.1^2} = 6 \text{ mV}$$

Πρόβλημα 10.15

Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής κατασκεύασε ένα ορθογώνιο πλαίσιο διαστάσεων $w \times h$ από 4 μεταλλικούς ράβδους. Κάθετα στο επίπεδο της σελίδας υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B . Η πάνω ράβδος είναι από ένα πολύ ελαστικό κράμα και στο $t = 0$ ο φοιτητής ασκεί δυο συμμετρικές δυνάμεις εφελκυσμού που να το παραμορφώνει έτσι ώστε οι δυο συμμετρικές γωνίες φ να αυξάνουν γραμμικά με το χρόνο ως $\varphi = \lambda t$. Οι άλλες τρεις ράβδοι δεν παραμορφώνονται σε αυτή τη διαδικασία. Να γίνει η γραφική παράσταση α) της μαγνητικής ροής που διαπερνάει το πλαίσιο και β) της επαγόμενης τάσης στο πλαίσιο, συναρτήσει του χρόνου, μέχρι τη στιγμή που η παραμόρφωση φτάνει στο 10% (Σημείωση: Θεωρήστε ότι το h είναι πολύ μικρό και έτσι αγνοήστε τον όρο $h^2 \approx 0$)



Λύση:

Σε κάθε χρονική στιγμή $t > 0$, το πλαίσιο έχει τη μορφή τραπεζίου. Το μήκος x_1 της απαραμόρφωτης ράβδου είναι ίσο με το αρχικό της μήκος w ενώ το μήκος x_2 της παραμορφωμένης ράβδου είναι ίσο με το αρχικό της μήκος w , συν τις δυο βάσεις Δx των μικρών ορθογωνίων που σχηματίζονται στις άκρες. Αφού οι μικρές πλαϊνές ράβδοι του πλαισίου έχουν μήκος h ο καθένας, τότε από απλή τριγωνομετρία μπορούμε να δούμε εύκολα ότι

$$\Delta x = h \sin \varphi$$

και έτσι

$$x_2 = w + 2\Delta x = w + 2h \sin \varphi$$

Η παραμόρφωση που είναι ο δεύτερος όρος, φτάνει στο 10% όταν αυτός ο όρος είναι ίσος με 0.1 φορές τον πρώτο. Αυτό γίνεται σε χρόνο t_1 που δίνεται από την

$$2h\sin(\lambda t) = 0.1w \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\lambda} \sin^{-1}\left(\frac{w}{20h}\right)$$

Με την ίδια λογική, το ύψος του τραπεζίου (το μήκος μεταξύ των οριζόντιων ράβδων) είναι ίσο με

$$y = h\cos\varphi$$

Το εμβαδό ενός τραπεζίου ισούται με $(\theta\acute{\alpha}\sigma\eta 1 + \theta\acute{\alpha}\sigma\eta 2) \times \acute{\upsilon}\psi\omicron\varsigma / 2$ δηλαδή

$$A = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)y = (w + h\sin\varphi)h\cos\varphi = wh\cos\varphi + \frac{1}{2}h^2\sin(2\varphi)$$

Σύμφωνα με τη δεδομένη προσέγγιση

$$A \approx wh\cos\varphi$$

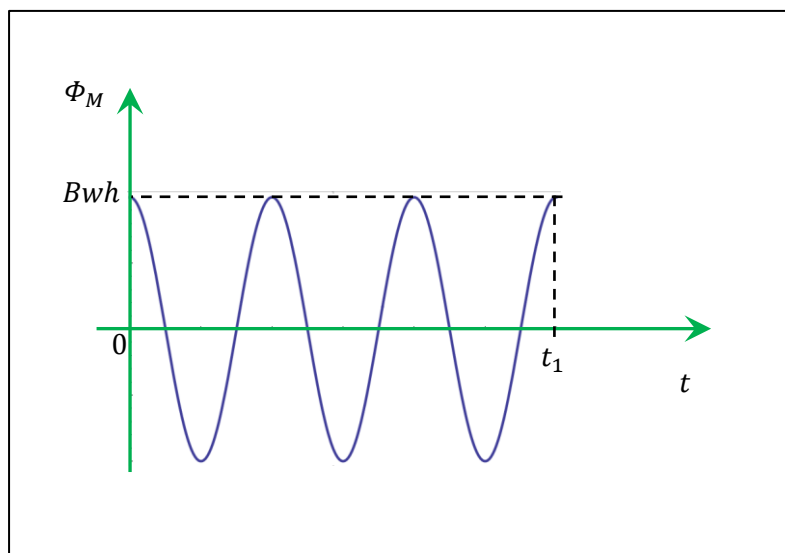
Η μαγνητική ροή ισούται με

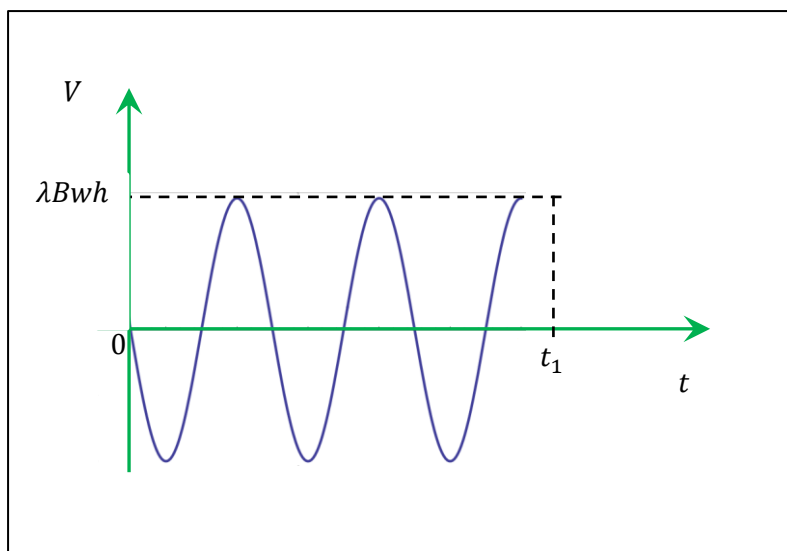
$$\Phi_M = BA \approx Bwh\cos(\lambda t)$$

Η αντίστοιχη επαγόμενη τάση ισούται με

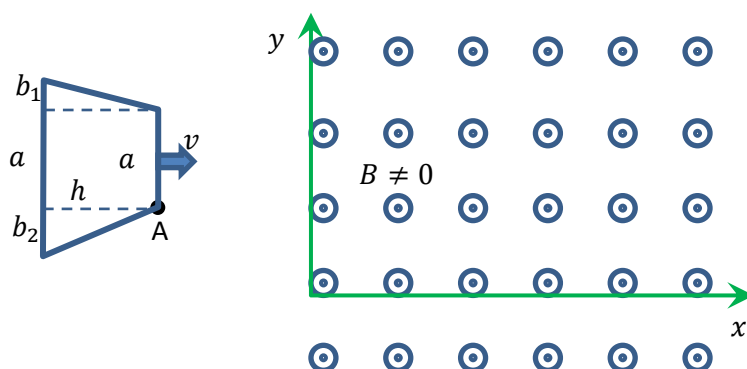
$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = -\lambda Bwh\sin(\lambda t)$$

Και οι δυο συναρτήσεις είναι ημιτονοειδείς με πλάτη $\Phi_{M0} = Bwh$ και $V_0 = \lambda Bwh$. Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω



Πρόβλημα 10.16

Στο παρακάτω σχήμα, ένα κλειστό συρμάτινο πλαίσιο με μορφή τραπεζίου με βάσεις μήκους a και $a + b_1 + b_2$ και ύψους h εισέρχεται με ταχύτητα v μέσα σε ημιάπειρο χώρο όπου υπάρχει ομοιογενές μαγνητικό πεδίο μέτρου B και με φορά έξω από την σελίδα μόνο για $x \geq 0$ ενώ $B = 0$ για $x < 0$. Εάν τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ακμή A του πλαισίου μόλις που εισέρχεται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου (έρχεται σε επαφή με τον άξονα y), να γίνει η γραφική παράσταση της επαγόμενης τάσης στο πλαίσιο συναρτήσεως του χρόνου, για όλους τους χρόνους από $-\infty$ μέχρι $+\infty$.

Λύση:

Αρχικά το πλαίσιο βρίσκεται εκτός της περιοχής και έτσι η μαγνητική ροή είναι $\Phi_M = 0$ και από τον νόμο του Faraday $V = d\Phi_M/dt$ και η επαγόμενη τάση είναι μηδέν. Αυτό γίνεται μέχρι το σημείο A να αγγίξει το πλαίσιο οριακά την περιοχή, δηλαδή μέχρι και χρόνο

$$t = 0$$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, σε κατοπινό χρόνο $t \geq 0$, μόνο το σκιαγραφημένο τμήμα του πλαισίου βρίσκεται μέσα στην μαγνητική περιοχή και άρα η μαγνητική ροή που διαπερνάει το πλαίσιο περιορίζεται μόνο σε αυτό το τμήμα. Η μορφή αυτού του τμήματος είναι επίσης τραπεζίου με ύψος ίσο με

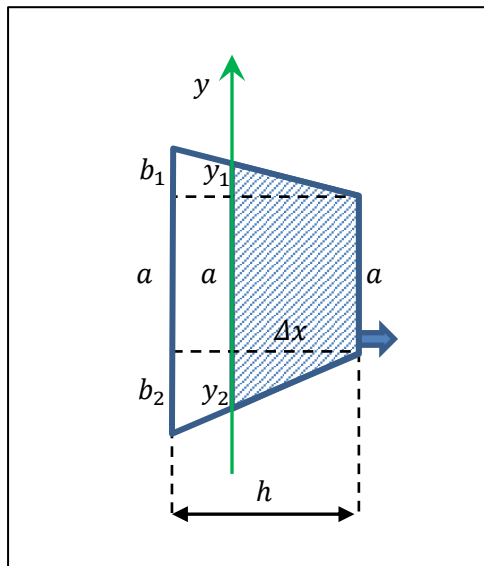
$$\Delta x = vt$$

ενώ μια βάση του εξακολουθεί να είναι a ενώ η άλλη ίση με $a + y_1 + y_2$. Από απλή ομοιότητα των τριγώνων βλέπουμε ότι

$$\frac{y_1}{b_1} = \frac{\Delta x}{h} \Rightarrow y_1 = \frac{b_1 v}{h} t$$

και ομοίως

$$\frac{y_2}{b_2} = \frac{\Delta x}{h} \Rightarrow y_2 = \frac{b_2 v}{h} t$$



Το εμβαδό ενός τραpezίου δίνεται από την $(\text{βάση}_1 + \text{βάση}_2) \cdot \text{ύψος} / 2$ και άρα το εμβαδό του πλαισίου που βρίσκεται μέσα στη μαγνητική περιοχή είναι ίσο με

$$A = \frac{a + (a + y_1 + y_2)}{2} \Delta x = a \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x = a \Delta x + \frac{b_1 + b_2}{2h} (\Delta x)^2$$

ή

$$A = avt + \frac{b_1 + b_2}{2h} (vt)^2$$

και έτσι η μαγνητική ροή είναι

$$\Phi_M = BA = Bavt + B \frac{b_1 + b_2}{2h} (vt)^2$$

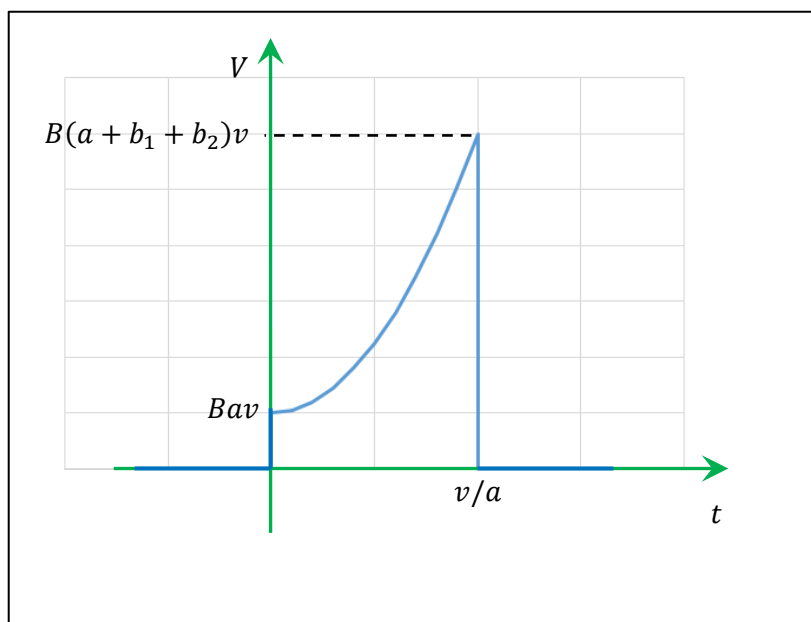
Η επαγόμενη τάση είναι ίση με (κατά απόλυτο μέτρο)

$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = Bav + B \frac{b_1 + b_2}{h} v^2 t$$

Παρατηρήστε ότι υπάρχει τάση ακόμη και στο $t = 0$ ίση με $V_0 = Bav$. Αυτή η φάση διαρκεί μέχρι και το χρόνο $t = h/v$ οπότε και οριακά όλο το πλαίσιο εισέρχεται στην περιοχή. Αυτό το σημείο η οριακή τιμή της τάσης γίνεται

$$V = Bav + B(b_1 + b_2)v = B(a + b_1 + b_2)v$$

Μετά από αυτόν τον χρόνο, το πλαίσιο αποκτά σταθερή ροή $\Phi_M = BA_0$ όπου A_0 είναι το εμβαδό του όλου πλαισίου και η επαγόμενη τάση είναι ίση με $V = d\Phi_M/dt = 0$. Η γραφική παράσταση V συναρτήσει του χρόνου t φαίνεται παρακάτω. Είναι μηδενική στα άκρα και τετραγωνική στη μέση. Έχει ασυνέχειες.



5

Λύση:

Σε κάθε χρονική στιγμή, το πλαίσιο ΟΚΛ΄ αλλάζει εμβαδό αλλά όχι σχήμα, παραμένει πάντοτε ένας κυκλικός τομέας. Με απλή αναλογία, περιμένουμε το εμβαδό A ενός κυκλικού τομέα να είναι ανάλογο της γωνίας του (εάν διπλασιάσουμε την γωνία του περιμένουμε να διπλασιάζεται το εμβαδό του). Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το A συγκρινόμενο με το εμβαδό πL^2 ενός κύκλου ίδιας ακτίνας L , αναλογιζόμενοι ότι η γωνία του κύκλου είναι ίση με 2π :

$$\frac{A}{\pi L^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow A = \frac{\theta}{2} L^2$$

Εφόσον πήραμε τη γωνία του κύκλου σε rad τότε αναγκαστικά και η θ πρέπει να είναι σε rad . Η μαγνητική ροή ισούται με

$$\Phi_M = BA = \frac{B\theta}{2}L^2$$

Στο παρόν πρόβλημα, αρχικά $\theta(0) = \pi/4$ και υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \pi/6 \text{ rad/s}^2$ οπότε η θ εξαρτάται από τον χρόνο ως εξής:

$$\theta = \theta(0) + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}t^2$$

και η μαγνητική ροή γίνεται

$$\Phi_M = \frac{\pi}{8}BL^2 + \frac{\pi}{24}BL^2t^2$$

Η αντίστοιχη επαγόμενη τάση ισούται με

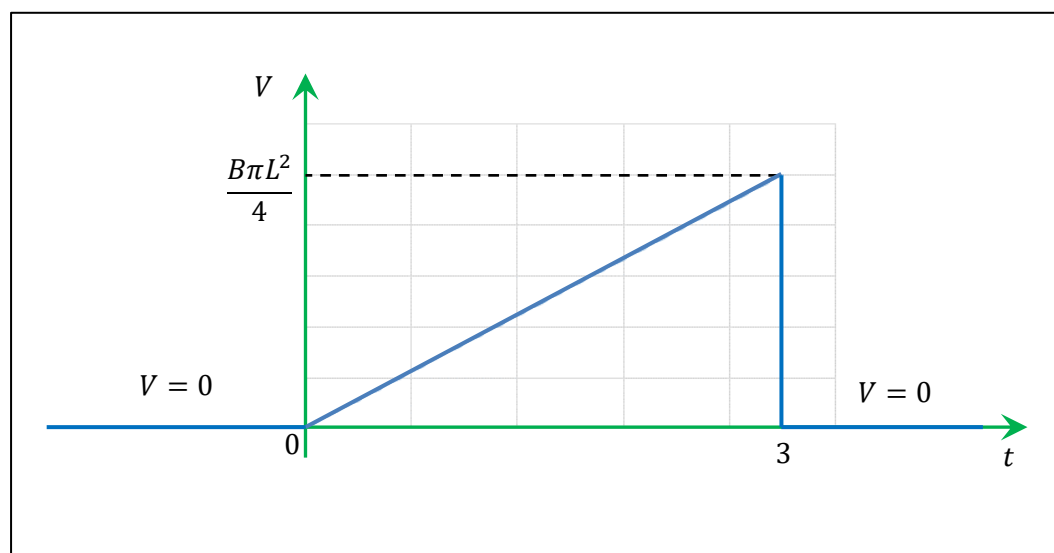
$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = \frac{\pi}{12}BL^2t$$

Το πλαίσιο έρχεται σε ακινησία όταν $\theta = \pi$ οπότε

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}t^2 = \pi \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

και η τάση τότε ισούται με $V = \pi BL^2/4$

Όταν το πλαίσιο βρίσκεται σε ακινησία, το εμβαδό του κυκλικού τομέα είναι σταθερό και άρα και η ροή και επομένως $V = 0$. Αυτό ισχύει για αρνητικούς χρόνους και για $t > 3 \text{ s}$. Επομένως η γραφική παράσταση έχει τρεις τομείς, δυο εκ των οποίων μηδενικοί και ένα γραμμικό ως εξής:

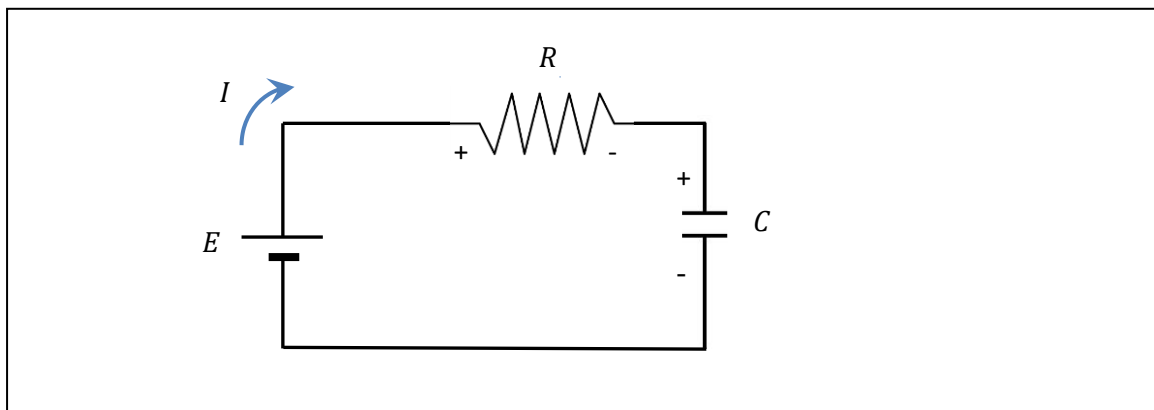


11. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Α. ΣΥΝΕΧΗ ΡΕΥΜΑΤΑ

Πρόβλημα 11.1.

Στο παρακάτω σχήμα, ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος. Εάν σε χρόνο t το ρεύμα αποκτάει κλάσμα κ της μέγιστης του τιμής, όπου $\kappa < 1$, να βρεθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή C . Δίνονται $t = 0.01 \text{ ms}$, $\kappa = 0.65$ και $R = 10 \Omega$:



Λύση:

Από την εκφώνηση, το ρεύμα I είναι ίσο με ένα κλάσμα κ του μέγιστου ρεύματος I_0 δηλαδή $I = \kappa I_0$. Το ρεύμα σε ένα κύκλωμα φόρτισης RC δίνεται από την

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

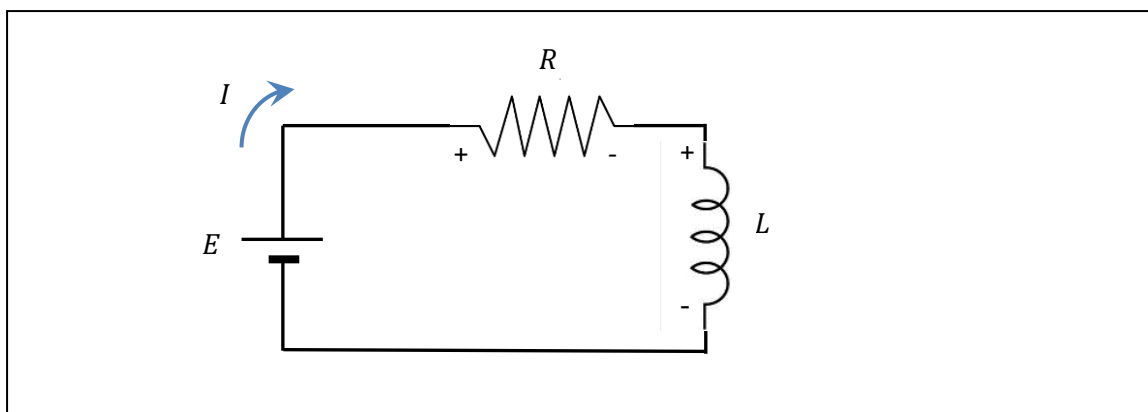
Συνδυάζοντας τις δυο εξισώσεις μπορούμε να λύσουμε ως προς C :

$$I = \kappa I_0 \Rightarrow \kappa I_0 = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \kappa = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln(\kappa)$$

$$C = \frac{-t}{R \ln(\kappa)} = -\frac{0.01 \times 10^{-3}}{10 \ln(0.65)} = 2.32 \times 10^{-6} \text{ F}$$

Πρόβλημα 11.2.

Στο παρακάτω σχήμα, δεν υπάρχει αρχικά ρεύμα στο κύκλωμα. Να βρεθεί το ρεύμα όταν ο χρόνος t ισούται με κ -φορές τη σταθερά του χρόνου. Δίνονται $\kappa = 0.65$, $E = 1.5 \text{ V}$, και $R = 10 \Omega$.



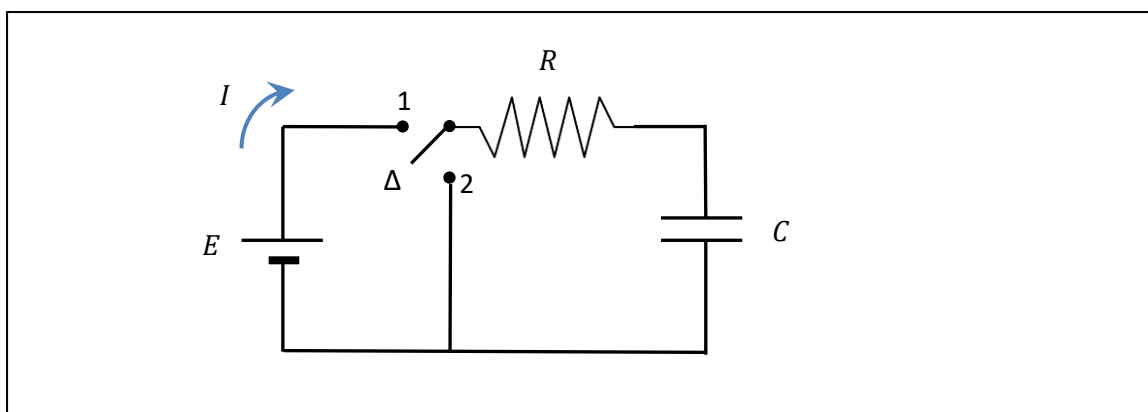
Λύση:

Από την εκφώνηση $t = \kappa\tau$ όπου η σταθερά χρόνου σε κύκλωμα RL ισούται με $\tau = L/R$. Το ρεύμα φόρτισης στην περίπτωση φόρτισης ισούται με

$$I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\kappa}) = \frac{1.5}{10} (1 - e^{-0.65}) = 0.0717 \text{ A}$$

Πρόβλημα 11.3.

Ο διακόπτης Δ στο παρακάτω σχήμα μπορεί να συνδεθεί σε μια από τις δυο θέσεις 1 και 2 αλλά αρχικά είναι ανοικτός και έτσι δεν υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα. Στο $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει στη θέση 1. Μετά από 6 δευτερόλεπτα ο διακόπτης μεταβαίνει ακαριαία στη θέση 2 κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μη μεταβληθεί στιγμιαία το φορτίο του πυκνωτή. Να βρείτε την τάση στα άκρα της R σε χρόνο 0.2 δευτερολέπτων αφού γίνει η μεταγωγή $1 \rightarrow 2$. Δίνονται $R = 2.5 \text{ k}\Omega$, $C = 4.2 \text{ mF}$ και $E = 12 \text{ V}$.



Λύση:

Στη θέση 1 έχουμε κύκλωμα φόρτισης RC . Το φορτίο δίνεται από την

$$q(t) = EC(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = EC(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Η σταθερά χρόνου ισούται με

$$\tau = RC = 2.5 \times 10^3 \times 4.2 \times 10^{-3} = 10.5 \text{ s}$$

Στο $t = 6 \text{ s}$

$$q(t) = 12 \times 4.2 \times 10^{-3} \left(1 - e^{-\frac{6}{10.5}}\right) = 21.9 \text{ mC}$$

Μετά τη μεταγωγή το κύκλωμα γίνεται κύκλωμα εκφόρτισης. Το ρεύμα δίνεται από τον τύπο:

$$I = \frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

όπου τώρα ο χρόνος μετράει από την μεταγωγή και $Q = 21.9 \text{ mC}$, δηλαδή ο πυκνωτής έχει το φορτίο της προηγούμενης φάσης. Η σταθερά του χρόνου είναι η ίδια αφού εξαρτάται μόνο από το R και C . Αντικαθιστώντας

$$I(0.2) = \frac{21.9 \times 10^{-3}}{10.5 \times 10^3} e^{-\frac{0.2}{10.5}} = 2.05 \mu\text{A}$$

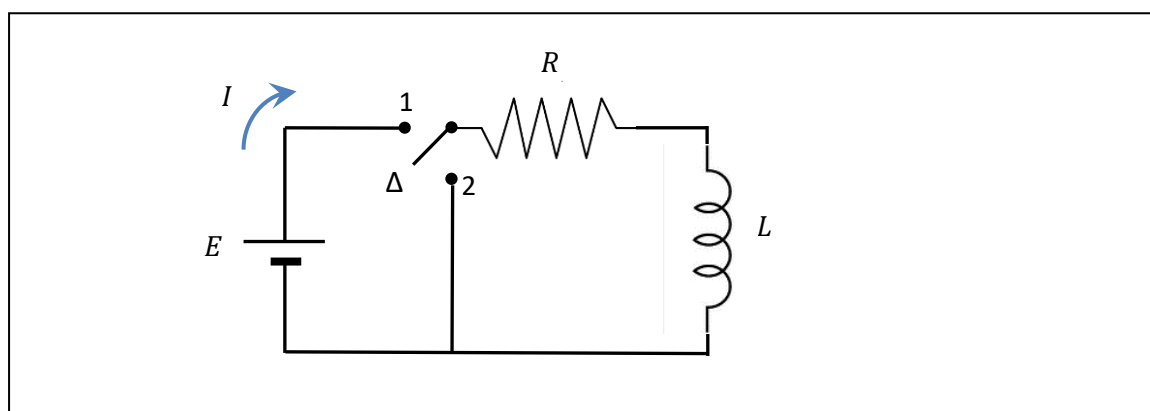
Η τάση στα άκρα της αντίστασης ισούται με

$$V_R = IR = 0.90 \text{ nA} \times 2.5 \text{ M}\Omega = 2.25 \text{ mV}$$

Το πρόσημο της V_R είναι με το θετικό πόλο από την μεριά του πυκνωτή γιατί τώρα ο πυκνωτής παίζει το ρόλο της πηγής.

Πρόβλημα 11.4.

Ο διακόπτης Δ στο παρακάτω σχήμα μπορεί να συνδεθεί σε μια από τις δυο θέσεις 1 και 2 αλλά αρχικά είναι ανοικτός και έτσι δεν υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα. Στο $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει στη θέση 1. Μετά από 0.3 δευτερόλεπτα ο διακόπτης μεταβαίνει ακαριαία στη θέση 2 κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μη μεταβληθεί το ρεύμα που διαρρέει τα R και L . Να βρείτε την τάση στα άκρα της R σε χρόνο 0.5 δευτερολέπτων αφού γίνει η μεταγωγή $1 \rightarrow 2$. Δίνονται $R = 2.5 \Omega$, $L = 3.2 \text{ H}$ και $E = 12 \text{ V}$.



Λύση:

Στη θέση 1 έχουμε κύκλωμα φόρτισης RL. Το ρεύμα δίνεται από την

$$I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Η σταθερά χρόνου ισούται με

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{3.2}{2.5} = 1.28 \text{ s}$$

Στο $t = 0.3 \text{ s}$

$$I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{12}{2.5} (1 - e^{-\frac{0.3}{1.28}}) = 1.00 \text{ A}$$

Μετά τη μεταγωγή το κύκλωμα γίνεται κύκλωμα εκφόρτισης. Το ρεύμα διατηρείται άρα θα είναι το μέγιστο της επόμενης φάσης, δηλαδή $I_0 = 1.00 \text{ A}$ και:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

όπου τώρα ο χρόνος μετράει από την μεταγωγή. Η σταθερά του χρόνου είναι η ίδια αφού εξαρτάται μόνο από το R και L . Αντικαθιστώντας

$$I(0.5) = 1.00 e^{-\frac{0.5}{1.28}} = 0.677 \text{ A}$$

Η τάση στα άκρα της αντίστασης ισούται με

$$V_R = IR = 0.677 \times 2.5 \Omega = 1.69 \text{ V}$$

Το πρόσημο της V_R είναι με το θετικό πόλο από την μεριά του πηνίου γιατί τώρα το πηνίο παίζει το ρόλο της πηγής.

B. ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ

Πρόβλημα 11.5.

Κύκλωμα RC σε σειρά τροφοδοτείται από πηγή $V_s = V_0 \sin \omega t$ και διαρρέεται από ρεύμα που δίνεται από την έκφραση $I = 1.2 \sin(\omega t + \varphi)$ όπου οι μονάδες του I είναι σε *Ampere*, ο χρόνος σε *sec* και η διαφορά φάσης είναι σε σχέση με την τάση της πηγής. Ζητείται η τιμή της εναλλασσόμενης τάσης του πηνίου σε *Volts* στο χρόνο $t = 0.1 \text{ ms}$. Δίνονται τα εξής δεδομένα: $\omega = 25 \text{ krad/s}$, $R = 30 \Omega$ και $C = 1 \mu\text{F}$:

Λύση:

Από το δεδομένο ρεύμα έχουμε:

$$I_0 = 1.2 \text{ A}$$

Επίσης από τα δεδομένα νούμερα μπορούμε να υπολογίσουμε την χωρητική εμπέδηση:

Φυσική II – Δ. Κουζούδης

$$Z_C = (C\omega)^{-1} = (1 \times 10^{-6} \times 25 \times 10^3)^{-1} = 40 \, \Omega$$

Η γωνία φ υπολογίζεται από την σχέση

$$\tan\varphi = \frac{Z_L}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{Z_L}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{40}{30}\right) = 0.927 \, \text{rad}$$

Η μέγιστη τάση στον πυκνωτή ισούται με

$$V_{L0} = I_0 Z_L = 1.2 \times 40 = 48 \, \text{V}$$

Η στιγμιαία τάση του πυκνωτή υστερεί κατά $\pi/2$ του ρεύματος οπότε

$$V_L = V_{L0} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 48 \times \sin\left(25 \times 0.1 + 0.927 - \frac{\pi}{2}\right)$$

ή

$$V_L = 46.1 \, \text{V}$$

Πρόβλημα 11.6.

Κύκλωμα RC σε σειρά διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα πλάτους $0.5 \, \text{A}$ και κυκλικής συχνότητας ω . Η τάση στα άκρα του πυκνωτή όπως μετρείται από βολτόμετρο είναι V_1 . Να βρεθεί η χωρητικότητα C του πυκνωτή σε Farad . Δίνονται $\omega = 10 \pi \, \text{rad/s}$ και $V_1 = 1.5 \, \text{V}$

Λύση:

Πρέπει να θυμηθούμε ότι οι τιμές που δίνουν τα όργανα μέτρησης είναι πάντοτε η ενεργή τιμή (τάση ή ρεύμα). Επομένως θα μετατρέψουμε το πλάτος του ρεύματος $I_0 = 0.5$ σε ενεργό τιμή

$$I_1 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{0.5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ακολουθώντας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση πλατών τάσης ρεύματος στον πυκνωτή $V_0 = Z_C I_0$ την οποία εάν την διαιρέσουμε με $\sqrt{2}$ μετατρέπεται στην αντίστοιχη σχέση των ενεργών τιμών

$$V_1 = Z_C I_1 \Rightarrow Z_C = \frac{V_1}{I_1}$$

Από τον ορισμό της χωρητικής εμπέδησης μπορούμε να λύσουμε ως προς τη χωρητικότητα C του πυκνωτή

$$\frac{1}{C\omega} = \frac{V_1}{I_1} \Rightarrow C = \frac{I_1}{\omega V_1} \Rightarrow C = \frac{1}{2\omega V_1 \sqrt{2}}$$

Από τα δεδομένα

$$C = \frac{1}{2 \times 10\pi \times 1.5\sqrt{2}} = 7.5 \, \text{mF}$$

Πρόβλημα 11.7.

Κύκλωμα R-C σε σειρά έχει $R = 20 \Omega$, $C = 50 \mu F$ και τροφοδοτείται από πηγή τάσης που περιγράφεται από την έκφραση $V_S = 120 \sin(800t)$. Εάν το ρεύμα υπερτερεί αυτής της τάσης κατά 30° , να βρεθούν:

- α. Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος
- β. Ο μαθηματικός τύπος της στιγμιαίας τιμής του ρεύματος I
- γ. Οι τάσεις V_R , V_L και οι αντίστοιχες ενεργές τιμές τους
- δ. Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων

Λύση:

- α. Από τα δεδομένα $\omega = 800 \text{ rad/s}$ και έτσι

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{50 \times 10^{-6} \times 800} = 25 \Omega$$

Από τον ορισμό της εμπέδησης έχουμε

$$Z = \sqrt{Z_C^2 + R^2} = \sqrt{25^2 + 20^2} = 32.0 \Omega$$

- β. Από τα δεδομένα το πλάτος της τάσης της πηγής είναι $V_0 = 120 \text{ V}$ και έτσι το πλάτος του ρεύματος ισούται με:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{120}{32} = 3.75 \text{ A}$$

Δεδομένης και της γωνίας $\varphi = 30^\circ$, ο μαθηματικός τύπος της στιγμιαίας τιμής του ρεύματος I είναι ο ακόλουθος:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi) = 3.75 \sin(800t + \pi/6)$$

Σημείωση: Γιατί μετατράπηκε η φ σε ακτίνια; Απάντηση: Επειδή συνήθως το ω είναι σε ακτίνια/s. Εάν μας δινόταν σε μοίρες/s, πράγμα σπάνιο, τότε θα αφήναμε την φ σε μοίρες.

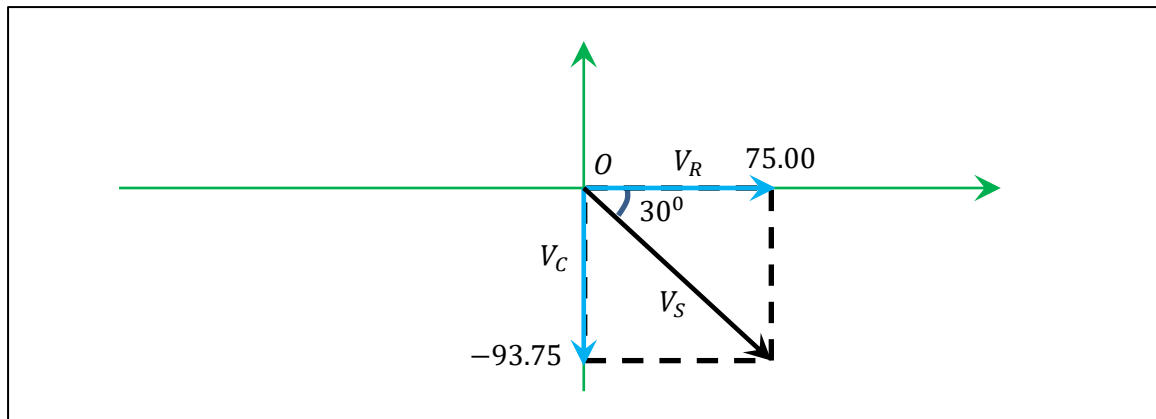
- γ. Τα πλάτη των V_R και V_C υπολογίζονται από τις αντίστοιχες εμπεδήσεις:

$$\begin{aligned} V_{R0} &= I_0 R = 3.75 \times 20 = 75 \text{ V} \\ V_{C0} &= I_0 Z_C = 3.75 \times 25 = 93.75 \text{ V} \end{aligned}$$

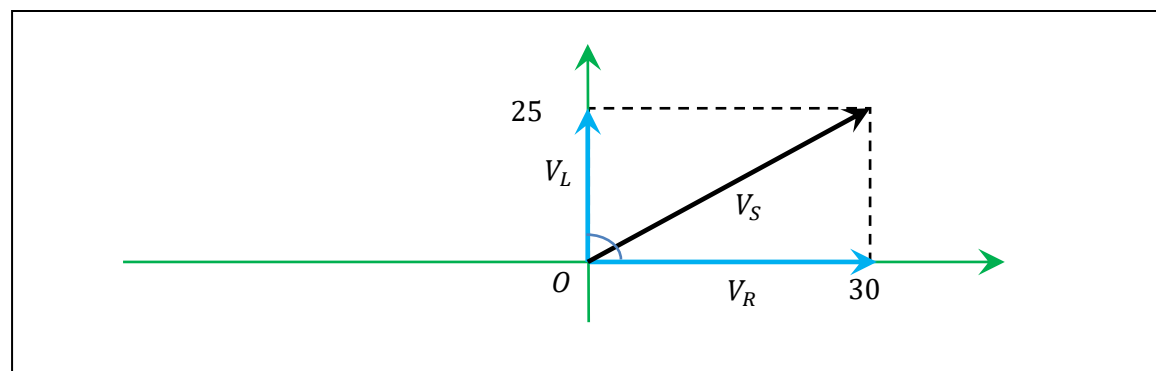
Η V_R έχει την ίδια φάση με το ρεύμα ενώ η V_C υπερτερεί της V_R κατά γωνία ίση με $\pi/2$. Έτσι:

$$\begin{aligned} V_R &= V_{R0} \sin(\omega t + \varphi) = 75 \sin\left(800t + \frac{\pi}{6}\right) \\ V_C &= V_{C0} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 93.75 \sin\left(800t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 93.75 \sin\left(800t - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

- δ. Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων είναι το εξής:

Πρόβλημα 11.8.

Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται το διάγραμμα τάσεων ενός κυκλώματος RL με εναλλασσόμενα ρεύματα. Να βρεθεί η συχνότητα σε Hz του ρεύματος. Δίνονται $R = 10 \Omega$ και $L = 2 mH$:

Λύση:

Από τον ορισμό των μέγιστων τάσεων παίρνοντας λόγους έχουμε:

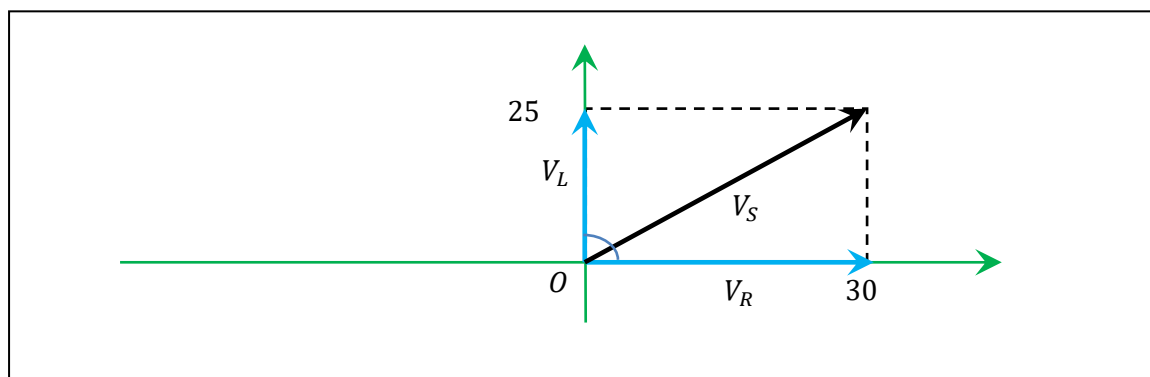
$$V_{R0} = 30 \Rightarrow I_0 R = 30$$

$$V_{L0} = 25 \Rightarrow I_0 L \omega = 25$$

$$\frac{L\omega}{R} = \frac{25}{30} \Rightarrow \omega = \frac{25 R}{30 L} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \frac{25 R}{30 L} = \frac{1}{2\pi} \frac{25}{30} \frac{10}{0.002} = 663 \text{ Hz}$$

Πρόβλημα 11.9.

Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται το διάγραμμα τάσεων ενός κυκλώματος RL με εναλλασσόμενα ρεύματα. Να βρεθεί η ολική εμπέδηση του κυκλώματος σε Ω . Δίνεται $R = 10 \Omega$:



Λύση:

Από τον ορισμό των μέγιστων τάσεων παίρνοντας λόγους έχουμε:

$$V_{R0} = 30 \Rightarrow I_0 R = 30$$

$$V_{L0} = 25 \Rightarrow I_0 Z_L = 25$$

$$\frac{Z_L}{R} = \frac{25}{30} \Rightarrow Z_L = \frac{25}{30} R$$

Από τον ορισμό της ολικής εμπίεσης Z :

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = R \sqrt{1 + \left(\frac{25}{30}\right)^2} = 13 \, \Omega$$

Πρόβλημα 11.10.

Κύκλωμα RL σε σειρά τροφοδοτείται από πηγή $V_s = V_0 \sin \omega t$ και διαρρέεται από ρεύμα που δίνεται από την έκφραση $I = 1.5 \sin(\omega t - \varphi)$ όπου οι μονάδες του I είναι σε *Ampere*, ο χρόνος σε *sec* και η διαφορά φάσης είναι σε σχέση με την τάση της πηγής. Ζητείται η τιμή της εναλλασσόμενης τάσης σε *Volts* του πηνίου στο χρόνο $t = 1 \, s$. Δίνονται τα $\omega = 10 \pi \, \text{rad/s}$, $R = 10 \, \Omega$ και $L = 2 \, \text{mH}$:

Λύση:

Από το δεδομένο ρεύμα έχουμε:

$$I_0 = 1.5 \, A$$

Επίσης από τα δεδομένα νούμερα μπορούμε να υπολογίσουμε την επαγωγική εμπίεση:

$$Z_L = L\omega = 10\pi \times 0.002 = 0.02\pi \, \Omega$$

Η γωνία φ υπολογίζεται από την σχέση

$$\tan \varphi = \frac{Z_L}{R} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{Z_L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{0.02\pi}{10}\right) = 0.001257 \, \text{rad}$$

Η μέγιστη τάση στο πηνίο ισούται με

$$V_{L0} = I_0 Z_L = 0.0189 \, V$$

Η στιγμιαία τάση του πηνίου προηγείται κατά $\pi/2$ του ρεύματος οπότε

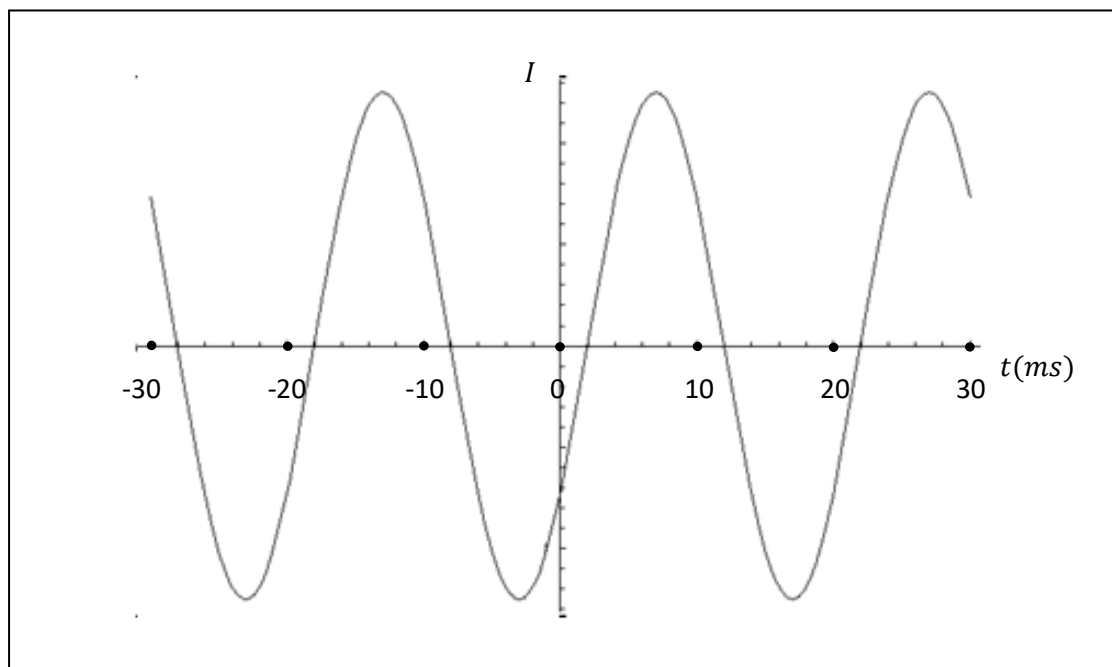
$$V_L = V_{L0} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.01885 \times \sin\left(10\pi - 0.001257 + \frac{\pi}{2}\right)$$

ή

$$V_L = 0.0189 \text{ V}$$

Πρόβλημα 11.11.

Κύκλωμα RL σειράς έχει $R = 1.4 \, \Omega$, $L = 4 \text{ mH}$ και διαρρέεται από το ρεύμα με πλάτος $I_0 = 4 \text{ A}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται παρακάτω. Ζητούνται: α) οι στιγμιαίες τάσεις V_R , V_L και η τάση της πηγής στο $t = 9 \text{ ms}$ β) οι αντίστοιχες ενεργές τιμές και γ) το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων



Λύση:

α) Από τη γραφική παράσταση παίρνουμε την πληροφορία περίοδος $T = 20 \text{ ms} = 0.02 \text{ s}$ οπότε

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.02} = \frac{\pi}{0.01} = 314 \text{ rad/s}$$

Η επαγωγική εμπίδηση ισούται με

$$Z_L = L\omega = 4 \times 10^{-3} \times 314 = 1.256 \, \Omega$$

Ολική εμπίδηση

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{1.4^2 + 1.256^2} = 1.88 \, \Omega$$

Η γωνία ισούται με

$$\theta = \arctan\left(\frac{Z_L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{1.256}{1.88}\right) = 0.589 \, \text{rad} = 33.7^\circ$$

Στιγμιαίες τιμές για $t = 9 \, \text{ms} = 0.009 \, \text{s}$:

$$I = I_0 \sin(\omega t - \theta) = 4 \sin(314 \times 0.009 - 0.589) = 3.14 \, \text{A}$$

$$V_R = V_{R0} \sin(\omega t - \theta) = I_0 R \sin(\omega t - \theta) = 5.6 \sin(314 \times 0.009 - 0.589) = 4.4 \, \text{V}$$

$$V_S = V_0 \sin(\omega t) = I_0 Z \sin(\omega t) = 7.52 \sin(314 \times 0.009) = 2.33 \, \text{V}$$

$$V_L = V_{L0} \sin(\omega t - \theta + \pi/2) = I_0 Z_L \sin(\omega t - \theta + \pi/2) = 5.02 \sin(314 \times 0.009 + 0.982)$$

$$V_L = -3.10$$

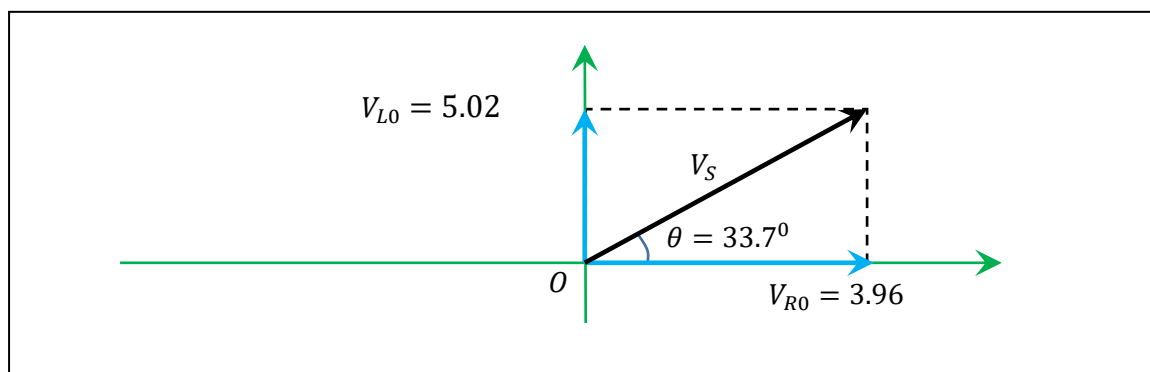
β) Ενεργές τιμές:

$$\tilde{V}_R = \frac{V_{R0}}{\sqrt{2}} = \frac{5.6}{\sqrt{2}} = 3.96 \, \text{V}$$

$$\tilde{V}_S = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{7.52}{\sqrt{2}} = 5.32 \, \text{V}$$

$$\tilde{V}_L = \frac{V_{L0}}{\sqrt{2}} = \frac{5.02}{\sqrt{2}} = 3.55 \, \text{V}$$

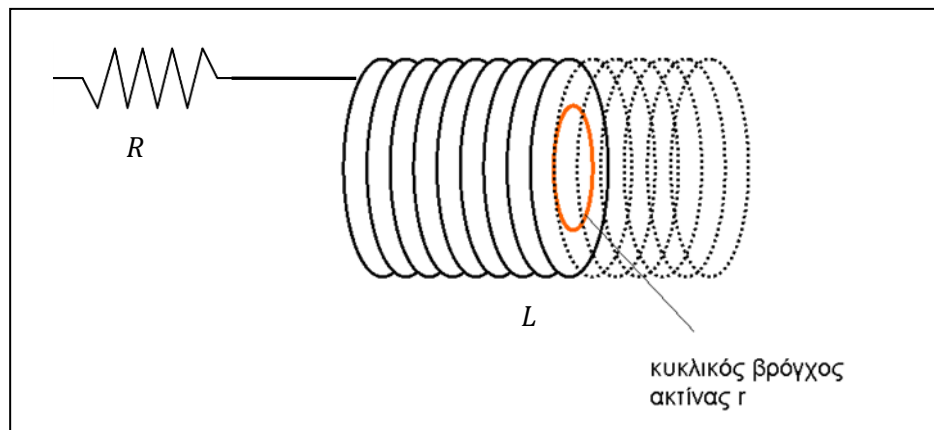
γ) Διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων:



Το κύκλωμα είναι ελαφρά επαγωγικό.

Πρόβλημα 11.13.

Κύκλωμα RL σειράς έχει $R = 0.25 \, \Omega$, $L = 4.5 \, \text{mH}$ και τροφοδοτείται με πηγή πλάτους $1.20 \, \text{V}$ και κυκλικής συχνότητας $\omega = 30 \, \text{rad/s}$. Το πηνίο είναι κατασκευασμένο με 3 σπείρες/cm και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο εσωτερικό του έχει τοποθετηθεί μικρότερο πηνίο 5 σπειρών και εμβαδού $4.2 \, \text{mm}^2$, με τους άξονες των δυο πηνίων να συμπίπτουν και το μικρό να εμπεριέχεται πλήρως μέσα στο μεγαλύτερο πηνίο κατά μήκος. Να βρεθεί το πλάτος της επαγόμενης ΗΕΔ στο μικρό πηνίο.



Λύση:

Από τα δεδομένα

$$\omega = 30 \text{ rad/s}$$

Η επαγωγική εμπέδηση ισούται με

$$Z_L = L\omega = 4.5 \times 10^{-3} \times 30 = 0.135 \, \Omega$$

Ολική εμπέδηση

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{0.25^2 + 0.135^2} = 0.284 \, \Omega$$

Η γωνία ισούται με

$$\theta = \arctan\left(\frac{Z_L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{0.135}{0.284}\right) = 0.444 \text{ rad}$$

Πλάτος ρεύματος

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{1.20}{0.284} = 4.22 \text{ A}$$

Στιγμιαία τιμή:

$$I = I_0 \sin(\omega t - \theta) = 4.22 \sin(30t - 0.444)$$

Αυτό το ρεύμα παράγει μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου ίσο με:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L} = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{3}{0.01} \times 4.22 \sin(30t - 0.444)$$

ή

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L} = 1.59 \times 10^{-3} \sin(30t - 0.444)$$

Από τον νόμο του *Faraday*, η επαγόμενη ΗΕΔ στο μικρότερο πηνίο ισούται με (κατ' απόλυτη τιμή):

$$V = \frac{d(NBA \sin \theta)}{dt} = \frac{d(NBA)}{dt} = NA \frac{dB}{dt}$$

Η γωνία θ είναι 90° αφού το παραγόμενο πεδίο είναι κατά μήκος του κοινού άξονα των δυο πηνίων και η σπείρες του μικρού είναι κάθετες στον άξονα και άρα κάθετες στο πεδίο (δες παραπάνω εικόνα)

$$V = 5 \times 4.2 \times (10^{-3})^2 \times \frac{dB}{dt} = 21 \times 10^{-6} \frac{dB}{dt} = 21 \times 1.59 \times 10^{-9} \frac{d}{dt} \sin(30t - 0.444)$$

$$V = 33.4 \times 10^{-9} \times 30 \cos(30t - 0.444) = 1.00 \times 10^{-6} \cos(30t - 0.444)$$

Η μέγιστη τιμή αυτής της τάσης είναι

$$V_0 = 1.00 \mu V$$

Πρόβλημα 11.13.

Κύκλωμα R - L σε σειρά έχει $R = 4.33 \Omega$, $L = 15 \text{ mH}$ και διαρρέεται από ρεύμα που δίνεται από την έκφραση $I = 1.5 \sin(500t - \pi/3)$ όπου οι μονάδες του I είναι σε Ampere, ο χρόνος σε sec και η διαφορά φάσης είναι εν σχέση με την τάση της πηγής. Ζητούνται:

- α. η σύνθετη αντίσταση Z (εμπέδηση) του κυκλώματος
- β. ο μαθηματικός τύπος της στιγμιαίας τιμή της τάσης V_S της πηγής τροφοδοσίας
- γ. οι τάσεις V_R, V_L
- δ. το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων

Λύση:

α. Από το δεδομένο ρεύμα βλέπουμε ότι η κυκλική συχνότητα ισούται με $\omega = 500 \text{ rad/s}$ και έτσι η επαγωγική εμπέδηση ισούται με $Z_L = L\omega = 15 \times 10^{-3} \times 500 = 7.5 \Omega$. Επομένως η ολική εμπέδηση ισούται με

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{4.33^2 + 7.5^2} = 8.66 \Omega$$

β. Από το δεδομένο ρεύμα βλέπουμε ότι το μέγιστο ρεύμα ισούται με $I_0 = 1.5 \text{ A}$ και έτσι το πλάτος της τάσης V_S ισούται με $V_0 = I_0 Z = 1.5 \times 8.66 = 13 \text{ V}$. Αφού $\omega = 500 \text{ rad/s}$ τότε

$$V_S = 13 \sin(500t) \text{ V}$$

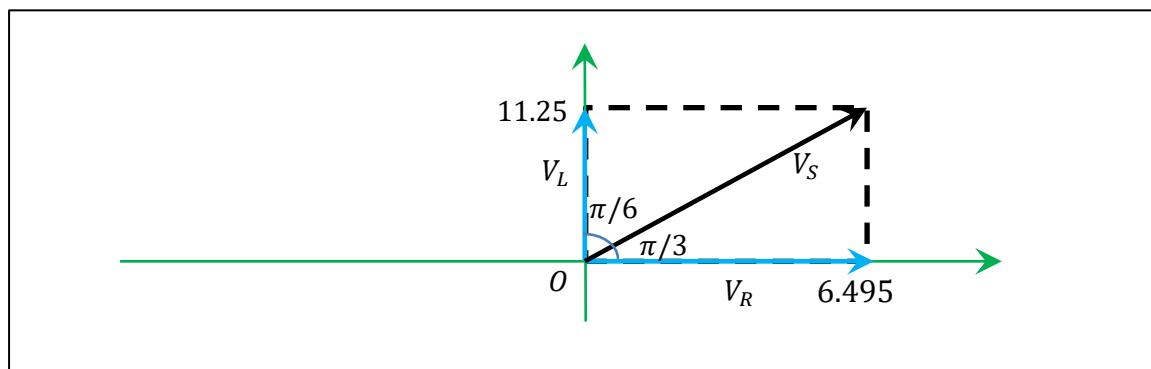
γ. Τα πλάτη των V_R και V_L υπολογίζονται από τις αντίστοιχες εμπεδήσεις:

$$\begin{aligned} V_{R0} &= I_0 R = 1.5 \times 20 = 6.495 \text{ V} \\ V_{L0} &= I_0 Z_L = 1.5 \times 7.5 = 11.25 \text{ V} \end{aligned}$$

Η V_R έχει την ίδια φάση με το ρεύμα ενώ η V_L υπερτερεί της V_R κατά γωνία ίση με $\pi/2$. Έτσι:

$$\begin{aligned} V_R &= V_{R0} \sin(\omega t - \varphi) = 6.495 \sin\left(500t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ V} \\ V_L &= V_{L0} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 11.25 \sin\left(500t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 11.25 \sin\left(500t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ V} \end{aligned}$$

δ. Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων είναι το εξής: Οι μονάδες στους άξονες είναι σε *Volts*. Βλέπουμε ότι εν σχέση με την V_S που πρέπει να την φανταστούμε ότι περιστρέφεται με κυκλική συχνότητα ω , η V_R υστερεί κατά γωνία $\pi/3$ ενώ η V_L υπερτερεί κατά $\pi/6$ ενώ συνολικά η διαφορά φάσης των V_L και V_R είναι ίση με $\pi/2$. Πρέπει να έχουμε κατά νου ότι το ρεύμα I είναι **πάντοτε** συμφασικό με την V_R και άρα και αυτό υστερεί κατά γωνία $\pi/3$ σε σχέση με την τάση της πηγής.



Πρόβλημα 11.14.

Κύκλωμα R - L σε σειρά διαρρέεται από ρεύμα ενεργής τιμής 0.5 A , με πηγή εναλλασσόμενης τάσεως $V_{rms} = 50\text{ V}$ (ενεργός τιμή) και κυκλικής συχνότητας $\omega = 1000\text{ rad/sec}$. Η τάση στα άκρα του πηνίου όπως μετριέται από βολτόμετρο είναι 20 V . Ζητούνται:

- Η τάση στα άκρα της ωμικής αντίστασης εάν μετρηθεί με το ίδιο βολτόμετρο
- Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου L
- Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος
- Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων και τη γωνία φ

Λύση:

α. Η δεδομένη τάση στα άκρα του πηνίου είναι ενεργός τιμή $V_{L,rms} = 10\text{ V}$ αφού μετριέται με βολτόμετρο. Από τον ορισμό της εμπέδησης έχουμε

$$Z^2 = Z_L^2 + R^2$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε αυτή την σχέση με το I_{rms}^2 , τότε παίρνουμε την αντίστοιχη σχέση για τις ενεργές τιμές της τάσης

$$V_{rms}^2 = V_{L,rms}^2 + V_{R,rms}^2$$

απ' όπου παίρνουμε

$$50^2 = 20^2 + V_{R,rms}^2 \Rightarrow V_{R,rms} = 45.8\text{ V}$$

β. Από την $V_{L,rms} = I_{rms}Z_L$ μπορούμε να βρούμε την επαγωγική εμπέδηση

$$Z_L = \frac{20}{0.5} = 40\ \Omega$$

Από τον ορισμό της επαγωγικής εμπέδησης έχουμε:

$$Z_L = L\omega \Rightarrow L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{20}{1000} = 20 \text{ mH}$$

γ. Ομοίως μπορούμε να βρούμε την ολική εμπέδηση από την $V_{rms} = I_{rms}Z$

$$Z = \frac{50}{0.5} = 100 \Omega$$

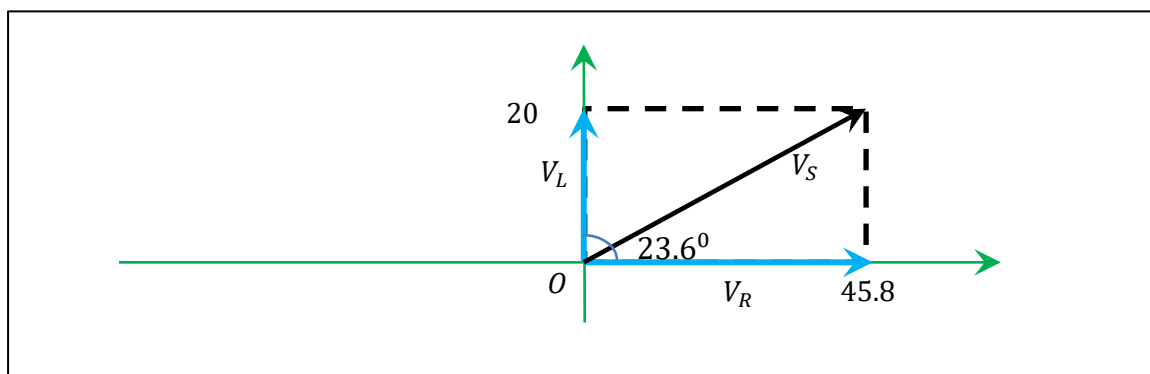
Τελικά από τον ορισμό της εμπέδησης έχουμε

$$Z^2 = Z_L^2 + R^2 \Rightarrow R = \sqrt{Z^2 - Z_L^2} = \sqrt{100^2 - 40^2} = 91.6 \Omega$$

δ. Η φωνία φ ισούται με:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{Z_L}{R} = \tan^{-1} \frac{40}{91.6} = 23.6^\circ$$

Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων (ενεργά μεγέθη) είναι το



Πρόβλημα 11.15.

Κύκλωμα RL σειράς με $R = 1.7 \Omega$ και $L = 2.5 \text{ mH}$ τροφοδοτείται με μια πηγή που η τάση της περιγράφεται από την εξίσωση $V_s(t) = V_0 \sin \omega t$ με $V_0 = 2.8 \text{ V}$ και περίοδο 12 ms . Ζητούνται α) οι ενεργές τιμές όλων των τάσεων στο κύκλωμα β) οι στιγμιαίες τάσεις V_R , V_L στο $t = 8 \text{ ms}$ γ) το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων δ) σε ποια χρονική στιγμή η στιγμιαία τιμή της τάσης του πηνίου είναι ίση με $V_L = 1.65 \text{ V}$ και

Λύση:

α) Από την περίοδο $T = 12 \text{ ms}$ μπορούμε να βρούμε την κυκλική συχνότητα

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12 \times 10^{-3}} = 523.6 \text{ rad/s}$$

Η επαγωγική εμπέδηση είναι ίση με

$$Z_L = L\omega = 2.5 \times 10^{-3} \times 523.6 = 1.31 \Omega$$

ενώ η συνολική εμπίεση είναι ίση με

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{1.7^2 + 1.31^2} = 2.15 \, \Omega$$

Από το δεδομένο $V_0 = 2.6 \, V$ και τον τύπο $V_0 = I_0 Z$ μπορούμε να βρούμε το πλάτος του ρεύματος

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{2.8}{2.15} = 1.3 \, A$$

Διαιρώντας όλα τα πλάτη με $\sqrt{2}$ παίρνουμε τις αντίστοιχες ενεργές τιμές (τις συμβολίζουμε με το σύμβολο " $\sim$ "):

$$\tilde{V}_s = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{2.8}{\sqrt{2}} = 1.98 \, V$$

$$\tilde{V}_R = \frac{V_{R0}}{\sqrt{2}} = \frac{I_0 R}{\sqrt{2}} = \frac{1.3 \times 1.7}{\sqrt{2}} = 1.56 \, V$$

$$\tilde{V}_L = \frac{V_{L0}}{\sqrt{2}} = \frac{I_0 Z_L}{\sqrt{2}} = \frac{1.3 \times 1.31}{\sqrt{2}} = 1.20 \, V$$

β) Η γωνία θ υπολογίζεται από την

$$\tan \theta = \frac{Z_L}{R} = \frac{1.31}{1.7} \Rightarrow \theta = 0.656 \, rad = 37.6^\circ$$

Τη χρονική στιγμή $t = 8 \, ms$ έχουμε

$$V_R = I_0 R \sin(\omega t - \theta) = 1.3 \times 1.7 \sin(523.6 \times 8 \times 10^{-3} - 0.656) = -0.84 \, V$$

$$V_L = I_0 Z_L \sin(\omega t - \theta + \pi/2) = 1.3 \times 1.31 \sin(523.6 \times 8 \times 10^{-3} - 0.656 + \pi/2) \Rightarrow$$

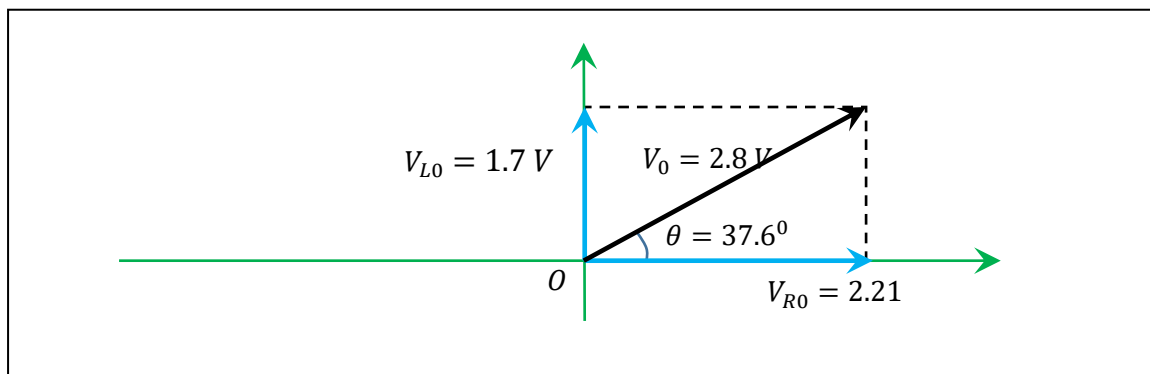
$$V_L = -1.57 \, V$$

γ) Στο διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων βάζουμε τα πλάτη και τη γωνία θ . Τα πλάτη είναι ίσα με

$$V_0 = 2.8 \, V$$

$$V_{R0} = I_0 R = 1.3 \times 1.7 = 2.21 \, V$$

$$V_{L0} = I_0 Z_L = 1.3 \times 1.31 = 1.7 \, V$$



Το κύκλωμα είναι ελαφρά επαγωγικό.

δ) Από την $V_L = 1.65 \text{ V}$ έχουμε

$$V_{L0} \sin(\omega t - \theta + \pi/2) = 1.65 \Rightarrow 1.7 \sin(523.6 \times t - 0.656 + \pi/2) = 1.65 \Rightarrow$$

$$523.6 \times t - 0.656 + \frac{\pi}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{1.65}{1.7}\right)$$

Λύνοντας ως προς t βρίσκουμε

$$t = 0.7885 \text{ ms}$$

Πρόβλημα 11.16.

Σε κύκλωμα RLC σε σειρά η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι 0.1 A ενώ οι ενδείξεις του βολτόμετρου στα άκρα του πυκνωτή είναι V_1 και στα άκρα του πηνίου V_2 . Να βρεθεί το πλάτος της τάσης της πηγής του κυκλώματος. Δίνονται τα $R = 10 \Omega$, $V_1 = 1.5 \text{ V}$ και $V_2 = 0.5 \text{ V}$:

Λύση:

Πρέπει να θυμηθούμε ότι οι τιμές που δίνουν τα όργανα μέτρησης είναι πάντοτε η ενεργή τιμή (τάση ή ρεύμα). Επίσης οι ίδιες σχέσεις που ισχύουν για τα πλάτη, ισχύουν για τις ενεργές τιμές (απλά διαιρούμε με $\sqrt{2}$). Έτσι οι χωρητικές και επαγωγικές εμπεδήσεις ισούνται αντίστοιχα με

$$Z_C = \frac{V_1}{I_A} = \frac{V_1}{0.1} = 10V_1 = 15 \text{ V}$$

$$Z_L = \frac{V_2}{I_A} = \frac{V_2}{0.1} = 10V_2 = 5 \text{ V}$$

Η ολική εμπεδήση ισούται με

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_C - Z_L)^2} = \sqrt{10^2 + (15 - 5)^2} = 10\sqrt{2} \Omega$$

Επειδή μας ζητάνε το πλάτος της τάσης της πηγής, πρέπει να βρούμε το αντίστοιχο πλάτος του ρεύματος

$$I_A = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_0 = \sqrt{2}I_A = 0.1\sqrt{2}$$

Από τον ορισμό της ολικής εμπίδησης

$$V_0 = I_0 Z = 0.1\sqrt{2} \times 10\sqrt{2} = 2 \text{ Volts}$$

Πρόβλημα 11.17.

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RCL σε σειρά τροφοδοτείται από πηγή τάσης με χαρακτηριστικά 12 V (πλάτος) και 50 Hz (συχνότητα). Να υπολογίσετε την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος. Δίνονται $R = 3 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$ και $C = 1 \text{ mF}$.

Λύση:

Η κυκλική συχνότητα ισούται με

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s}$$

Η ολική εμπίδηση ισούται με

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{1}{1 \times 10^{-3} \times 100\pi} - 2 \times 10^{-3} \times 100\pi\right)^2} = 3.94 \Omega$$

Από το πλάτος της τάσης της πηγής μπορούμε να λύσουμε ως προς το πλάτος του ρεύματος

$$V_0 = I_0 Z \Rightarrow I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{12}{3.94} = 3.045 \text{ A}$$

Τελικά η ενεργός τιμή του ρεύματος ισούται με

$$I_A = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{3.045}{\sqrt{2}} = 2.15 \text{ A}$$

Πρόβλημα 11.18.

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RCL σε σειρά τροφοδοτείται από πηγή τάσης με 12 V πλάτος και μεταβλητή συχνότητα. Εάν $R = 3 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$ και $C = 1 \text{ mF}$ να υπολογίσετε α) την συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος σε Hz , β) την εμπίδηση στον συντονισμό και γ) το πλάτος της έντασης του ρεύματος στο συντονισμό.

Λύση:

α) Η κυκλική συχνότητα συντονισμού ισούται με

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-3}}} = 707 \text{ rad/s}$$

Η αντίστοιχη συχνότητα συντονισμού σε Hz ισούται με

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 112.5 \text{ Hz}$$

β) Στον συντονισμό ισχύει

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega L = \frac{1}{C\omega}$$

οπότε η δεύτερη παρένθεση μέσα στο υπόριζο της εμπέδησης μηδενίζεται:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} = \sqrt{R^2} = R = 3 \Omega$$

γ) Το αντίστοιχο πλάτος του ρεύματος στον συντονισμό ισούται με

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{R} = \frac{12}{3} = 4 \text{ A}$$

Πρόβλημα 11.19.

Φοιτητής θέλει να ακούσει τον αγαπημένο του σταθμό στα 92.9 FM και επιλέγει να κατασκευάσει ένα κατάλληλο κύκλωμα συντονισμού. Για το σκοπό αυτό διαθέτει δυο αντιστάσεις 5Ω και 12Ω , δυο πηνία $1 \mu H$ και $2 \mu H$ και έναν επίπεδο πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς εμβαδού $A = 0.01 \text{ m}^2$ ο καθένας, με μεταβλητή απόσταση d μεταξύ τους συνεχόμενα από 0.5 cm έως 2.5 cm . Εξηγήστε πως πρέπει να κατασκευάσει το κύκλωμα αυτό χρησιμοποιώντας τα παραπάνω υλικά.

Λύση:

Μπορούμε επιλεκτικά να ενισχύσουμε την επιθυμητή συχνότητα με ένα κύκλωμα συντονισμού RLC με χαρακτηριστική κυκλική συχνότητα $\omega^2 = LC$ και αντίστοιχη συχνότητα

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$$

Για επίπεδο πυκνωτή

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Οπότε

$$f^2 = \frac{d}{4\pi^2 L \epsilon_0 A} \Rightarrow d = 4\pi^2 L \epsilon_0 A f^2$$

Τέσσερις επιλογές για την αυτεπαγωγή, ο $L_1 = 1 \times 10^{-6} \text{ H}$, ο $L_2 = 2 \times 10^{-6} \text{ H}$ ο συνδυασμός σε σειρά (άθροισμα) $L_3 = L_1 + L_2 = 3 \times 10^{-6} \text{ H}$ και ο συνδυασμός παράλληλα $L_4 = L_1 L_2 (L_1 + L_2) = 2/3 \times 10^{-6} \text{ H}$ (μικρότερη τιμή και από τα L_1 και L_2). Τα 92.9 FM σημαίνουν 92.9 MHz . Αντικαθιστώντας:

$$d_1 = 4\pi^2 L_1 \epsilon_0 A f^2 = 4\pi^2 \times 1 \times 10^{-6} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.01 \times (92.9 \times 10^6)^2 \approx 3 \text{ cm}$$

$$d_2 = 4\pi^2 L_2 \varepsilon_0 A f^2 = 4\pi^2 \times 2 \times 10^{-6} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.01 \times (92.9 \times 10^6)^2 \approx 6 \text{ cm}$$

$$d_3 = 4\pi^2 L_3 \varepsilon_0 A f^2 = 4\pi^2 \times 3 \times 10^{-6} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.01 \times (92.9 \times 10^6)^2 \approx 9 \text{ cm}$$

$$d_4 = 4\pi^2 L_4 \varepsilon_0 A f^2 = 4\pi^2 \times 2/3 \times 10^{-6} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.01 \times (92.9 \times 10^6)^2 \approx 2 \text{ cm}$$

Επομένως μόνο με το συνδυασμό των δυο πηνίων παράλληλα μπορούμε να πετύχουμε μια τιμή μέσα στο εύρος 0.5 cm έως 2.5 cm της απόστασης των οπλισμών του πυκνωτή.

Πρόβλημα 11.20.

Κύκλωμα RLC σε σειρά έχει $R = 4 \Omega$, $Z_L = 10 \Omega$, $Z_C = 4 \Omega$ και η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι 0.5 A και η αυτεπαγωγή του πηνίου 5 mH . Ζητούνται:

- α. Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος
- β. Η ενεργός τιμή της τάσης της πηγής V_S του κυκλώματος
- γ. Η γωνία θ
- δ. Οι στιγμιαίες τάσεις V_R , V_L και V_C (ως εκφράσεις) και το διανυσματικό τους διάγραμμα και
- ε. να χαρακτηριστεί η συμπεριφορά του κυκλώματος

Λύση:

- α. Από την Εξ (60) στις σημειώσεις

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{4^2 + (10 - 4)^2} = 7.2 \Omega$$

- β. Το δεδομένο ρεύμα είναι από αμπερόμετρο οπότε είναι ενεργός τιμή. Από τον ορισμό της ολικής εμπίδησης $Z = V_0/I_0$ εάν διαιρέσουμε τόσο τον Αριθμητή όσο και τον παρονομαστή με $\sqrt{2}$ παίρνουμε:

$$Z = \frac{V_{S,rms}}{I_{rms}} \Rightarrow V_{S,rms} = Z I_{rms} = 7.2 \times 0.5 = 3.6 \text{ V}$$

- γ. Από την Εξ (61) στις σημειώσεις

$$\tan \theta = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{10 - 4}{4} = 1.5 \Rightarrow \theta = \arctan(1.5) = 56.3^\circ$$

- δ. Από τα δεδομένα $L = 5 \times 10^{-3} \text{ H}$ οπότε από την $Z_L = L\omega$ βρίσκουμε

$$\omega = \frac{Z_L}{L} = \frac{10}{5 \times 10^{-3}} = 2000 \text{ rad/s}$$

Το πλάτος του ρεύματος είναι ίσο με

$$I_0 = \sqrt{2} I_{rms} = 0.5\sqrt{2}$$

Τα αντίστοιχα πλάτη των τάσεων είναι:

$$V_{R0} = I_0 R = 2\sqrt{2}$$

$$V_{L0} = I_0 Z_L = 5\sqrt{2}$$

$$V_{C0} = I_0 Z_C = 2\sqrt{2}$$

Η γωνία θ σε ακτίνια ισούται με

$$\theta = \frac{56.3^\circ}{180^\circ} 3.14 = 0.98$$

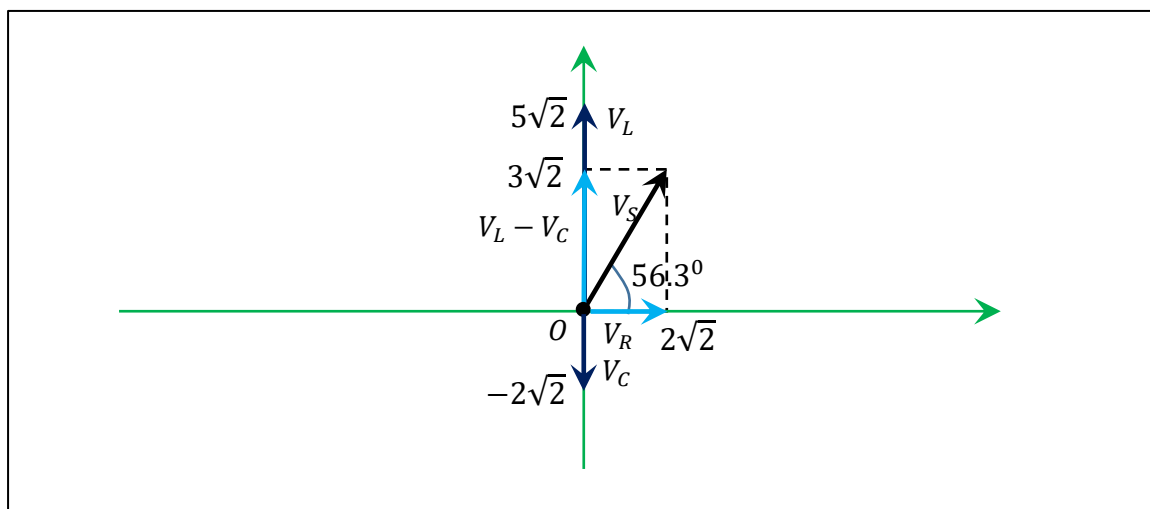
Η μαθηματική έκφραση των τάσεων είναι η εξής (Εξισώσεις 63, 64 και 65 στις σημειώσεις)

$$V_R = V_{R0} \sin(\omega t - \theta) = 2\sqrt{2} \sin(2000t - 0.98)$$

$$V_L = V_{L0} \sin(\omega t - \theta + \pi/2) = 5\sqrt{2} \sin(2000t + 0.59)$$

$$V_C = V_{C0} \sin(\omega t - \theta - \pi/2) = 2\sqrt{2} \sin(2000t - 2.55)$$

Το διάγραμμα των τάσεων είναι όπως παρακάτω. Επειδή η V_L είναι μεγαλύτερη από τις άλλες δυο τάσεις, η γωνία θ είναι μεγαλύτερη από 45° και το φορτίο είναι κυρίως "επαγωγικό" όπως λέμε.



Πρόβλημα 11.21.

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελείται από μια ωμική αντίσταση $R = 4 \Omega$, ένα πηνίο με επαγωγική αντίσταση $Z_L = 10 \Omega$ και έναν πυκνωτή με χωρητική αντίσταση $Z_C = 10 \Omega$ συνδεδεμένα σε σειρά. Το κύκλωμα τροφοδοτείται από πηγή τάσης $120 V$, $50 Hz$. Να υπολογίσετε:

- Τη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.
- Την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.
- Να αναφέρετε πως συμπεριφέρεται το κύκλωμα (ωμικά, χωρητικά ή επαγωγικά);
- Να βρεθεί το γινόμενο LC

Λύση:

- α. Από την Εξ (60) στις σημειώσεις

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{4^2 + (10 - 10)^2} = 4 \Omega$$

- β. Όταν η τάση δίνεται μαζί με την συχνότητα, η τάση είναι το πλάτος. Έτσι έχουμε $V_0 = 120 V$ και $f = 50 Hz$ οπότε $\omega = 2\pi f = 100\pi$. Το πλάτος του ρεύματος ισούται με

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{120}{4} = 30 A$$

γ. Αφού $Z_L = Z_C$ το κύκλωμα βρίσκεται σε συντονισμό με $\omega_0 = \omega = 100\pi$ και άρα συμπεριφέρεται καθαρά ωμικά

δ. Από την συνθήκη συντονισμού

$$Z_L = Z_C \Rightarrow L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow LC = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{10^4\pi^2}$$

Πρόβλημα 11.22.

Κύκλωμα RLC σειράς έχει $R = 3\Omega$, $Z_L = 9\Omega$, $Z_C = 5\Omega$ και η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι $2A$. Ο πυκνωτής του κυκλώματος έχει παράλληλους οπλισμούς οι οποίοι απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 0.8 \mu m$ και έχουν εμβαδό $A = 0.1 m^2$ ο καθένας. Ζητούνται:

α) το πλάτος της τάσης της πηγής V_0 ,

β) Οι στιγμιαίες τιμές των τάσεων V_R , V_L και V_C τη χρονική στιγμή $t = 20 \mu s$ (θεωρώντας ότι στο $t = 0$ η στιγμιαία τιμή της πηγής τάσης είναι μηδέν).

Σημείωση: Πάρτε για απλότητα τη σταθερά $\epsilon_0 \approx 9 \times 10^{-12}$ σε μονάδες $S.I.$

Λύση:

α) Η εμπέδηση Z του κυκλώματος δίνεται από την

$$Z^2 = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow Z = 5 \Omega$$

Η τιμή του αμπερόμετρου είναι η ενεργός τιμή

$$I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow I_0 = 2\sqrt{2} = 2.83$$

Το πλάτος της τάσης της πηγής V_0 ισούται με

$$V_0 = I_0 Z = 2.83 \times 5 = 14.15 V$$

β) Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς δίνεται από την

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 0.1}{0.8 \times 10^{-6}} = 1.11 \mu F$$

Από την χωρητική εμπέδηση, μπορούμε να βρούμε το ω

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{C Z_C} = \frac{1}{1.11 \times 10^{-6} \times 5} = 180 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

Η γωνία θ δίνεται από την

$$\tan \theta = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{9 - 5}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 0.927 \text{ rad} = 53.11^\circ$$

Η στιγμιαία τιμή του ρεύματος ισούται με

$$I = I_0 \sin(\omega t - \theta)$$

οπότε

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = L\omega I_0 \cos(\omega t - \theta) = I_0 Z_L \cos(\omega t - \theta)$$

$$V_R = IR = I_0 R \sin(\omega t - \theta)$$

ενώ η τάση της πηγής είναι

$$V_s = V_0 \sin \omega t$$

Στο $t = 2 \times 10^{-5} \text{ s}$ έχουμε

$$V_L = I_0 Z_L \cos(\omega t - \theta) = 2.83 \times 9 \times \cos(1.80 \times 2 - 0.927) = -22.8 \text{ V}$$

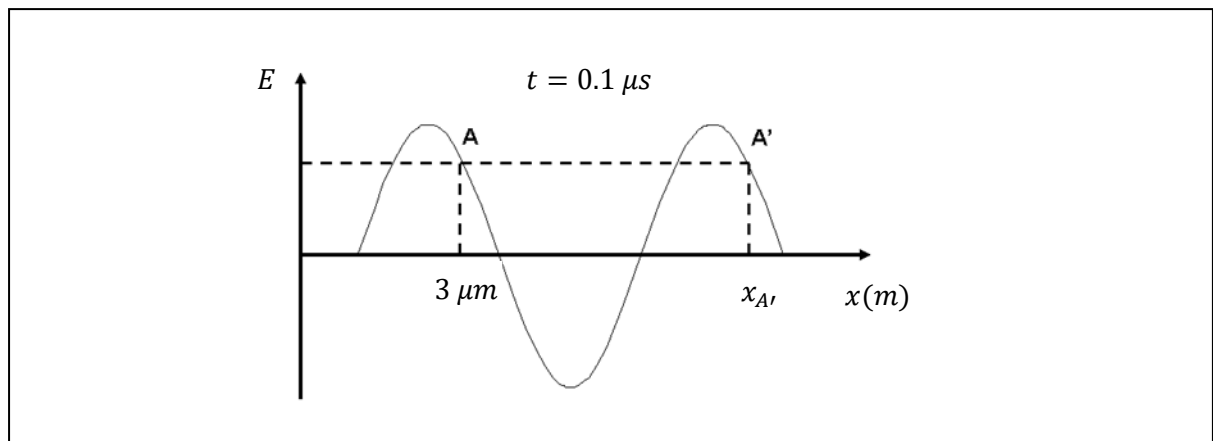
$$V_R = IR = I_0 R \sin(\omega t - \theta) = 2.83 \times 3 \times \sin(1.80 \times 2 - 0.927) = 3.80 \text{ V}$$

$$V_s = V_0 \sin \omega t = 14.15 \times \sin(1.80 \times 2) = -6.26 \text{ V}$$

12. ΤΟ ΦΩΣ

Πρόβλημα 12.1.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο του ηλεκτρικού πεδίου ενός Η/Μ κύματος στο $t = 0.1 \mu s$ το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του θετικού άξονα x με συχνότητα $f = 5 \times 10^{14} Hz$ και περιγράφεται από την εξίσωση $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \sin(kx - \omega t)$ με $E_0 = 1.2 \times 10^6 N/C$. Να βρεθούν: α) Η απομάκρυνση $x_{A'}$ του σημείου Α' σε m , β) Το κυματάνασμα $\vec{k}$ και γ) Το μέτρο και η φορά του μαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο Γ με συντεταγμένη $x_\Gamma = 16 m$ (στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο).



Λύση:

α) Από την $f = 5 \times 10^{14} Hz$ έχουμε $\omega = 2\pi f = 10\pi \times 10^{14} rad/s$. Αφού $c = 3 \times 10^8 m/s$ τότε το μήκος κύματος ισούται με

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^{14}} = 0.6 \times 10^{-6} m = 0.6 \mu m$$

Ο κυματάρριθμος ισούται με

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.6 \times 10^{-6}} = \frac{\pi}{3} \times 10^7 rad/m$$

Τα x'_A και $x_A = 3 \mu m$ απέχουν ένα μήκος κύματος και έτσι (σε μικρόμετρα)

$$x'_A - 3 = \lambda \Rightarrow x'_A = \lambda + 3 = 0.6 + 3 = 3.6 \mu m$$

β) Αφού η κατεύθυνση διάδοσης είναι ο θετικός άξονας x , τότε το κυματάνασμα $\vec{k}$ θα είναι και αυτό προς αυτή την κατεύθυνση και έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{k} = k\vec{e}_x = \frac{\pi}{3} \times 10^7 \vec{e}_x rad/m$$

γ) Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού (το $\vec{E}$ στον αντίχειρα, το $\vec{B}$ στα υπόλοιπα τέσσερα δάκτυλα και το $\vec{k}$ κάθετα στην παλάμη), το $\vec{B}$ πρέπει να είναι κάθετο στην σελίδα με φορά προς τον αναγνώστη (προς τα έξω της σελίδας) δηλαδή κατά την κατεύθυνση του θετικού άξονα z . Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z \sin(kx - \omega t)$$

(θυμηθείτε ότι τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ έχουν την ίδια φάση, δηλαδή το ίδιο όρισμα του ημιτόνου). Επίσης για το μέτρο τους γνωρίζουμε ότι

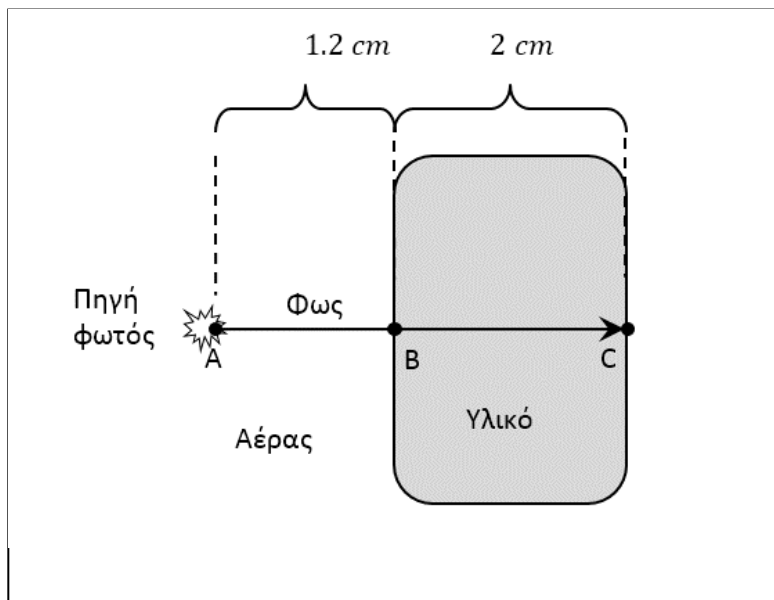
$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1.2 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 4 \times 10^{-3} T = 4 mT$$

Στο σημείο Γ έχουμε κατά μέτρο

$$B = B_0 \sin(kx_{A'} - \omega t) = 4 mT \times \sin\left(\frac{\pi}{3} \times 10^7 \times 16 - 10\pi \times 10^{14} \times 10^{-7}\right) = -2\sqrt{3} mT$$

Πρόβλημα 12.2.

Στο παραπάνω σχήμα το φως χρειάζεται χρόνο $0.20 ns$ για να καλύψει την συνολική απόσταση ABC διαμέσου του αέρα και ενός διαφανούς υλικού. Να βρεθεί ο δείκτης διάθλασης του υλικού.



Λύση:

Στο τμήμα AB της διαδρομής με μήκος $1.2 cm$ το φως ταξιδεύει στον αέρα με τη γνωστή ταχύτητα του φωτός $c = 3 \times 10^8 m/s$ και επομένως καλύπτει την απόσταση αυτή σε χρόνο

$$t_1 = \frac{1.2 \times 10^{-2}}{3 \times 10^8} = 0.4 \times 10^{-10} = 0.04 ns$$

Εφόσον ο συνολικός χρόνος για την διαδρομή ABC είναι $0.20 ns$, τότε το φως καλύπτει την υπόλοιπη απόσταση BC μέσα στο υλικό σε χρόνο

$$t_2 = 0.20 - 0.04 = 0.16 ns$$

Εφόσον το τμήμα BC έχει μήκος $2 cm$, η ταχύτητα του φωτός μέσα στο υλικό ισούται με:

$$v = \frac{2 \times 10^{-2}}{0.16 \times 10^{-9}} = 1.25 \times 10^8 m/s$$

Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης Εξ. 12.13, έχουμε για το υλικό

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \times 10^8}{1.25 \times 10^8} = 2.4$$

Πρόβλημα 12.3.

Ραδιοφωνικό κύμα στα 96 FM ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα x με το μαγνητικό πεδίο πλάτους $10^{-4} T$ κατά μήκος του άξονα y και ανακλάται σε μεταλλική επιφάνεια η οποία τέμνει κάθετα την πορεία του κύματος στη θέση $x = 0$. Εάν κατά την ανάκλαση αλλάζουν πρόσημο τα Η/Μ πεδία, να γραφτούν σε πλήρη διανυσματική μορφή τα εξής τρία διανύσματα μετά την ανάκλαση: Το ηλεκτρικό πεδίο, το μαγνητικό πεδίο και το κυματάνυσμα

Λύση:

Από τα δεδομένα έχουμε για τη συχνότητα $f = 96 MHz = 96 \times 10^6 Hz$. Το αντίστοιχο μήκος κύματος μπορούμε να το βρούμε από την κυματική σχέση

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{96 \times 10^6} = 3.125 m$$

Αφού η διεύθυνση διάδοσης του κύματος είναι ο άξονας x , τότε τα πεδία θα περιέχουν τον κοινό όρο

$$\sin(kx - \omega t) = \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - ft \right)$$

Το πλάτος του μαγνητικού πεδίου είναι

$$B_0 = 10^{-4} T$$

Αφού το μαγνητικό πεδίο είναι πολωμένο κατά τον άξονα y , τότε θα έχουμε

$$\vec{B} = 10^{-4} \vec{e}_y \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - ft \right)$$

Αφού τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και η διεύθυνση διάδοσης αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα, τότε το $\vec{E}$ πρέπει να είναι κατά μήκος του αρνητικού άξονα z , δηλαδή

$$\vec{E} = -E_0 \vec{e}_z \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - ft \right)$$

Μετά την ανάκλαση, τα πεδία αλλάζουν πρόσημο αλλά και η δέσμη ταξιδεύει προς τον αρνητικό άξονα x οπότε έχουμε

$$\vec{B} = -B_0 \vec{e}_y \sin 2\pi \left(-\frac{x}{\lambda} - ft \right) = B_0 \vec{e}_y \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + ft \right)$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \sin 2\pi \left(-\frac{x}{\lambda} - ft \right) = -E_0 \vec{e}_z \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + ft \right)$$

Το κυματάνυσμα έχει μέτρο

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3.125} = 2.01 rad/m$$

ενώ η φορά του είναι κατά τον αρνητικό άξονα x δηλαδή

$$\vec{k} = -2.01 \vec{e}_x rad/m$$

Πρόβλημα 12.4.

Ραδιοφωνικό κύμα στα 96.5 FM το οποίο ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα x με το μαγνητικό πεδίο πλάτους $10^{-4} T$ πολωμένο κατά μήκος του άξονα z , ανακλάται σε μεταλλική επιφάνεια η οποία τέμνει κάθετα την πορεία του κύματος στη θέση $x = 0$. Κατά την ανάκλαση αλλάζουν πρόσημο τα Η/Μ πεδία αλλά όχι όμως και τα μέτρα τους και στο $t = 0$ μηδενίζονται επάνω στην μεταλλική επιφάνεια. Έστω $\vec{e}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο επίπεδο x - y στο πρώτο τεταρτημόριο το οποίο σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα x . Να βρεθεί το διπλό γινόμενο

$$(\vec{E} \times \vec{e}) \times \vec{k}$$

σε μονάδες S.I. όπου $\vec{E}$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο $x = -2 m$ κατά τη χρονική στιγμή $t = 10 ns$, $\vec{k}$ είναι το κυματόνυσμα και το σύμβολο $\times$ αναπαριστάει το εξωτερικό γινόμενο.

Λύση:

Από τα δεδομένα έχουμε για τη συχνότητα $f = 96.5 MHz = 96.5 \times 10^6 Hz$. Το αντίστοιχο μήκος κύματος μπορούμε να το βρούμε από την κυματική σχέση

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{96 \times 10^6} = 3.11 m$$

Αφού η διεύθυνση διάδοσης του κύματος είναι ο άξονας x (πριν την ανάκλαση), τότε τα πεδία θα περιέχουν τον κοινό όρο

$$\sin(kx - \omega t) = \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - ft \right)$$

Αφού το μαγνητικό πεδίο είναι πολωμένο κατά τον άξονα z , τότε θα έχουμε

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - ft \right)$$

Αφού τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και η διεύθυνση διάδοσης αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα, τότε το $\vec{E}$ πρέπει να είναι κατά μήκος του άξονα y , δηλαδή

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - ft \right)$$

Μετά την ανάκλαση, τα πεδία αλλάζουν πρόσημο αλλά και η δέσμη ταξιδεύει προς τον αρνητικό άξονα x οπότε έχουμε

$$\vec{B} = -B_0 \vec{e}_z \sin 2\pi \left(-\frac{x}{\lambda} - ft \right) = B_0 \vec{e}_z \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + ft \right)$$

$$\vec{E} = -E_0 \vec{e}_y \sin 2\pi \left(-\frac{x}{\lambda} - ft \right) = E_0 \vec{e}_y \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + ft \right)$$

Δεν υπάρχει αρχική φάση φ_0 στα παραπάνω ημίτονα αφού στο $t = 0$ τα πεδία μηδενίζονται. Το κυματόνυσμα έχει μέτρο

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3.125} = 2.02 rad/m$$

ενώ η φορά του είναι κατά τον αρνητικό άξονα x δηλαδή

$$\vec{k} = -2.02\vec{e}_x \text{ rad/m}$$

Κατά τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ ns}$ και στο $x = -2 \text{ m}$

$$\vec{E} = -E_0\vec{e}_y \sin 2\pi \left(\frac{-2}{3.125} + 96 \times 10^6 \times 10 \times 10^{-9} \right) = -0.90E_0\vec{e}_y$$

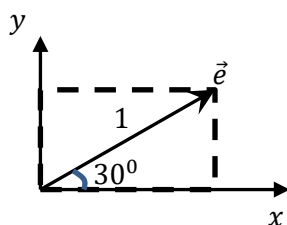
Τα πλάτη των πεδίων σχετίζονται από την $E_0 = cB_0$ οπότε

$$E_0 = 3 \times 10^8 \times 10^{-4} = 3 \times 10^4$$

και έτσι

$$\vec{E} = -0.90 \times 3 \times 10^4 \vec{e}_y = -2.7 \times 10^4 \vec{e}_y$$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, το μοναδιαίο $\vec{e}$ σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα x και έχει μέτρο μονάδα. Επομένως οι συνιστώσες του είναι $e_x = 1 \cdot \cos 30^\circ = 1/2$ και $e_y = 1 \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3}/2$.



Εφόσον το $\vec{E}$ είναι κατά μήκος του άξονα $-y$ άρα ανήκει και αυτό στο επίπεδο $x-y$ όπως και το $\vec{e}$. Φαίνεται αμέσως τότε ότι το εξωτερικό γινόμενο $\vec{E} \times \vec{e}$ το οποίο πρέπει να είναι κάθετο και στο $\vec{E}$ και στο $\vec{e}$ είναι κάθετο στο επίπεδο $x-y$, δηλαδή κατά μήκος του άξονα z και έχει μέτρο ίσο με

$$|\vec{E} \times \vec{e}| = E \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E = 2.34$$

(το 120° είναι η γωνία μεταξύ του $\vec{E}$ και του $\vec{e}$). Επομένως

$$\vec{E} \times \vec{e} = 2.34\vec{e}_z$$

Δεδομένου ότι $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$ το ζητούμενο εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με

$$(\vec{E} \times \vec{e}) \times \vec{k} = 2.34\vec{e}_z \times (-2.02\vec{e}_x) = -4.72\vec{e}_y$$

σε μονάδες $S.I.$

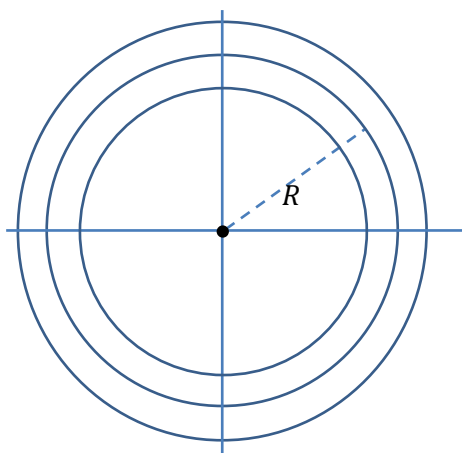
Πρόβλημα 12.4. Μια κεραία κινητής τηλεφωνίας εκπέμπει από το υψηλότερο σημείο της μικροκύματα με μέση ισχύ (στη διάρκεια ενός κύκλου) ίση με 2000 W . Εάν θυμηθούμε ότι η ισχύς ισούται με ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και θεωρήσουμε ότι αυτή η ισχύς μεταδίδεται

χωρίς απώλειες μέσα σε ιδεατές σφαίρες αυξανόμενης ακτίνας με το χρόνο (σφαιρικά μέτωπα κύματος), να βρείτε το πλάτος του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου σε απόσταση 5 m από το σημείο εκπομπής (Σημείωση: Καταφύγετε στον ορισμό της έντασης ως ροής ενέργειας)

Λύση:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τα κύματα της κεραίας διαδίδονται σε σφαιρικά μέτωπα. Έστω ότι σε χρόνο t το μέτωπο κύματος είναι μια σφαίρα ακτίνας $R = 5\text{ m}$. Εξ' ορισμού η ένταση είναι η μέση τιμή της ροής ενέργειας σε ένα κύκλο, δηλαδή η μέση ισχύς ανά επιφάνεια. Η επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με $4\pi R^2$. Εάν το μέτωπο κύματος μεταφέρει ισχύ $P = 2000\text{ W}$ (μέση ισχύ στη διάρκεια ενός κύκλου), τότε

$$I = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{2000}{4\pi 5^2} = 6.37 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$



Από την Εξ. 12.20, η ένταση της ακτινοβολίας είναι ίση με

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

οπότε μπορούμε να λύσουμε ως προς το πλάτος του κύματος:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 6.37}{3 \times 10^8 \times 8.85 \times 10^{-12}}} = 69.3\text{ N/C}$$

Από την Εξ. 12.6

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{69.3}{3 \times 10^8} = 2.31 \times 10^{-7}\text{ T}$$

Πρόβλημα 12.5. Ένας φοιτητής μετράει το χρόνο t_1 που χρειάζεται μια δέσμη φωτός για να διαπεράσει ένα γυάλινο πλακίδιο με δείκτη διάθλασης ίσο με 1.5. Όταν επαναλαμβάνει το πείραμα με ένα πλακίδιο ενός διαφανούς πολυμερούς και διπλάσιου πάχους, μετράει αντίστοιχο χρόνο $t_2 = 1.8t_1$. Να βρεθεί ο δείκτης διάθλασης του γυάλινου πλακιδίου.

Λύση:

Από την Εξ. 12.13, η ταχύτητα του φωτός στην περίπτωση του γυάλινου πλακιδίου είναι ίση με

$$v_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{3 \times 10^8}{1.5} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Βάσει αυτής της ταχύτητας, το πάχος του πλακιδίου είναι ίσο με

$$\Delta x_1 = v_1 t_1$$

Με την ίδια λογική, εάν v_2 είναι η ταχύτητα του φωτός στην περίπτωση του πολυμερικού πλακιδίου, τότε το πάχος του θα είναι ίσο με

$$\Delta x_2 = v_2 t_2$$

Παίρνοντας λόγους

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{v_2 t_2}{v_1 t_1}$$

Από τα δεδομένα, $\Delta x_2 = 2\Delta x_1$ και $t_2 = 1.8t_1$ οπότε

$$2 = \frac{v_2}{v_1} 1.8$$

Λύνοντας ως προς v_2 οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$v_2 = \frac{2}{1.8} v_1 = 2.22 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Από την Εξ. 12.13, ο δείκτης διάθλασης του πολυμερούς είναι ίσος με

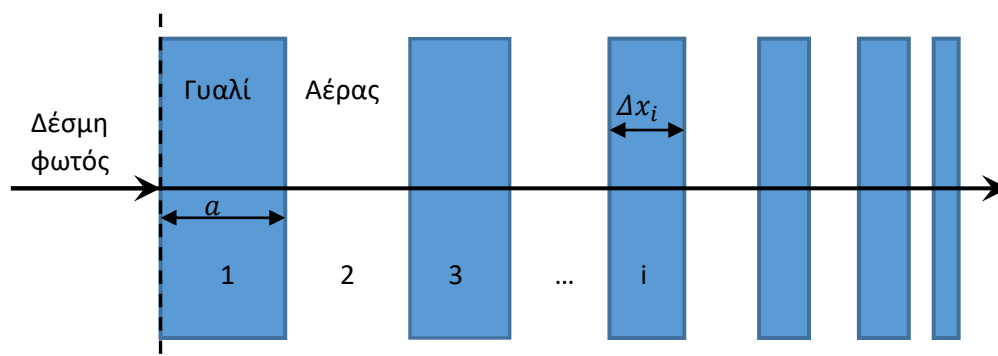
$$n_1 = \frac{c}{v_1} = \frac{3 \times 10^8}{2.22 \times 10^8} = 1.35$$

Πρόβλημα 12.6. Δέσμη φωτός που ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα x , εισέρχεται σε μια περιοχή που είναι χωρισμένη σε ένα άπειρο αριθμό τμημάτων με το πρώτο να έχει εύρος $\Delta x_1 = a$ ενώ τα υπόλοιπα δίνονται από την αναδρομική σχέση

$$\Delta x_{i+1} = \Delta x_i / \kappa$$

όπου $\kappa > 1$ ένας καθαρός αριθμός. Τα τμήματα αυτά έχουν εναλλασσόμενο υλικό γυαλιού-αέρα με το πρώτο να είναι γυάλινο. Παρότι που τα τμήματα είναι άπειρα σε αριθμό, έχουν διαδοχικά φθίνων πλάτος και έτσι το συνολικό μήκος αυτής της ακολουθίας έχει πεπερασμένο μήκος με τη μορφή μιας άπειρης σειράς που συγκλίνει σε ένα αριθμό. α) Κάνοντας χρήση της γεωμετρικής σειράς, να βρείτε το συνολικό μήκος x αυτής της ακολουθίας των τμημάτων συναρτήσει των a και κ . β) Εφόσον το μήκος x είναι πεπερασμένο,

τότε απαιτείται χρόνος t για να διέλθει το φως μέσα από αυτό. Να βρεθεί ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού συναρτήσει των t , a , κ και της ταχύτητας του φωτός c .



Λύση:

α) Για να βρούμε το συνολικό μήκος x , αθροίζουμε όλα τα επιμέρους μήκη:

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots$$

Χρησιμοποιώντας την δεδομένη αναδρομική σχέση έχουμε

$$\Delta x_1 = a$$

$$\Delta x_2 = \frac{\Delta x_1}{\kappa} = \frac{a}{\kappa}$$

$$\Delta x_3 = \frac{\Delta x_2}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{a}{\kappa} \right) = \frac{a}{\kappa^2}$$

δηλαδή $\Delta x_i = a/\kappa^{i-1}$. Η παραπάνω σειρά γίνεται

$$x = a + \frac{a}{\kappa} + \frac{a}{\kappa^2} + \dots = a \left(1 + \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} + \dots \right)$$

Η σειρά μέσα στην παρένθεση είναι η γεωμετρική σειρά με άπειρους όρους η οποία συγκλίνει στην τιμή

$$\sum_{i=0}^{\infty} \omega^i = \frac{1}{1 - \omega}$$

μόνο όταν $|\omega| < 1$. Στην συγκεκριμένη περίπτωση $\omega = 1/\kappa < 1$ και έτσι

$$x = a \left(1 + \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} + \dots \right) = a \frac{1}{1 - 1/\kappa} = \frac{a\kappa}{\kappa - 1}$$

β) Παρόμοια με το συνολικό μήκος, ο συνολικός χρόνος t της δέσμης διαμέσου της ακολουθίας των τμημάτων είναι ίσος με

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \dots$$

Εάν n είναι ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού, τότε η ταχύτητα του φωτός μέσα στο γυαλί ισούται με $v = c/n$ έτσι ο χρόνος στα γυάλινα τμήματα ισούται με

$$t_i = \frac{\Delta x_i}{v} = \frac{\Delta x_i}{c} n = \frac{a}{c\kappa^{i-1}} n$$

Ομοίως στον αέρα όπου $n = 1$, ο αντίστοιχος χρόνος είναι ίσος με

$$t_i = \frac{a}{c\kappa^{i-1}}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι τα υλικά εναλλάσσονται, ο συνολικός χρόνος μπορεί να ξεχωρίσει ως δυο επιμέρους αθροίσματα. Αφού το πρώτο τμήμα είναι γυάλινο, οι περιττοί όροι αντιστοιχούν στο γυαλί ενώ οι άρτιοι στον αέρα. Έτσι

$$t = (t_1 + t_3 + t_5 + \dots) + (t_2 + t_4 + t_6 + \dots)$$

$$t = \frac{a}{c} n \left(1 + \frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa^4} + \dots\right) + \frac{a}{c} \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^3} + \frac{1}{\kappa^5} + \dots\right)$$

Θέτουμε $\lambda = \kappa^2$ και έχουμε

$$t = \frac{a}{c} n \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots\right) + \frac{a}{c\kappa} \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots\right)$$

$$t = \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots\right) \left(\frac{a}{c} n + \frac{a}{c\kappa}\right)$$

Η σειρά μέσα στην πρώτη παρένθεση είναι η γεωμετρική σειρά που είδαμε παραπάνω με $\omega = 1/\lambda$ και έτσι:

$$t = \frac{1}{1 - 1/\lambda} \left(\frac{a}{c} n + \frac{a}{c\kappa}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \frac{a}{c} \left(n + \frac{1}{\kappa}\right)$$

Λύνοντας

$$n = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{ct}{a} - \frac{1}{\kappa}$$

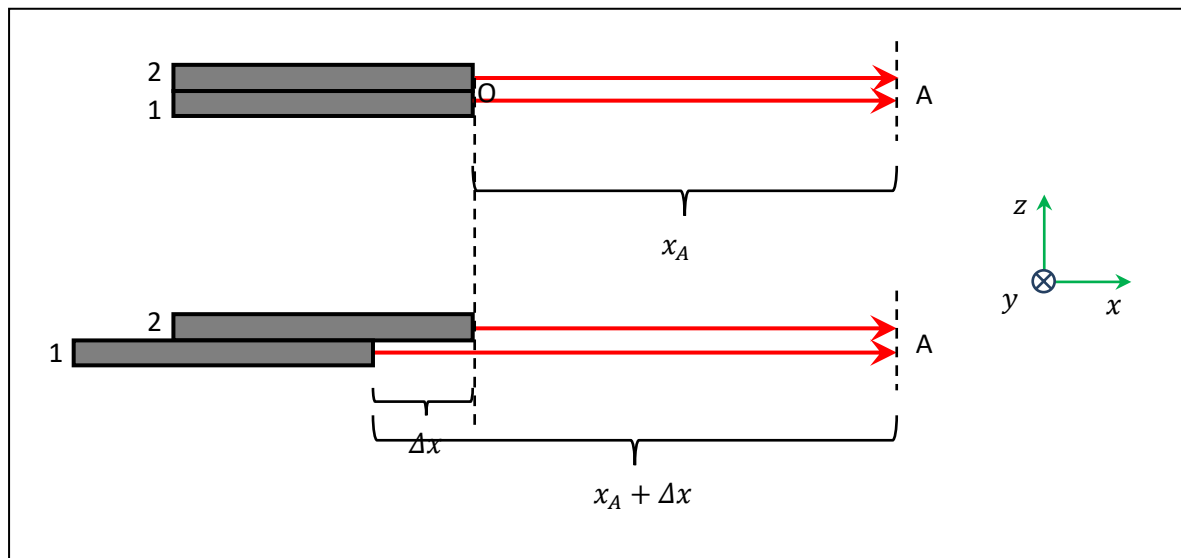
ή

$$n = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2} \frac{ct}{a} - \frac{1}{\kappa}$$

Πρόβλημα 12.7.

Δυο οπτικές ίνες 1 και 2 παράλληλες στον άξονα x που εκπέμπουν δέσμες με φως διαφορετικής συχνότητας f_1 και f_2 αντίστοιχα, με ίσο πλάτος ηλεκτρικού πεδίου E_0 πολωμένο κάθετα και έξω από τη σελίδα (και για τις δυο συχνότητες), τοποθετούνται μέσα σε σκοτεινό θάλαμο, πλήρως ευθυγραμμισμένες και κολλητά η μια με την άλλη με τις άκρες τους στο σημείο Ο που εκπέμπουν φως να είναι στο $x = 0$ και να σημαδεύουν το σημείο Α στο $x = x_A$. Στο σημείο Ο όπου εκπέμπουν οι δυο ίνες, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή των συντεταγμένων, το μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν την χρονική στιγμή $t = 0$. α) Να δοθεί η πλήρης μαθηματική έκφραση (διανυσματική μορφή) του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στο σημείο Α της κάθε δέσμης για κάθε χρόνο t (επάνω σχήμα) β) Να

βρεθεί η πυκνότητα ενέργειας της κάθε δέσμης στο σημείο A (επάνω σχήμα) γ) Έστω ότι η ίνα 1 μετατοπίζεται κατά Δx προς τον αρνητικό άξονα x (κάτω σχήμα). Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και το μέτρο του συνισταμένου ηλεκτρικού πεδίου στο A θεωρώντας ότι οι δυο συχνότητες είναι πολύ κοντά ή μια στην άλλη (αλλά όχι ίσες) και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $f_1 - f_2 \approx 0$.



Λύση:

α) Όπως φαίνεται και στο σχήμα, αρχικά οι δυο ίνες είναι ευθυγραμμισμένες και εκπέμπουν κύματα που δίνονται από τα ηλεκτρικά πεδία

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

(δεν υπάρχει αρχική φάση αφού στο $x = 0, t = 0$ μας δίνεται ότι $B = 0$ οπότε και $E = 0$ αφού τα δυο πεδία είναι συμφασικά). Οι κυκλικές συχνότητες είναι ίσες με $\omega_1 = 2\pi f_1$ και $\omega_2 = 2\pi f_2$, τα μήκη κύματος $\lambda_1 = c/f_1$ και $\lambda_2 = c/f_2$, ενώ οι κυματάρθρωτοι $k_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2\pi f_1/c$ και $k_2 = 2\pi f_2/c$. Στο σημείο A με $x = x_A$ έχουμε:

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y \sin(k_1 x_A - \omega_1 t)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y \sin(k_2 x_A - \omega_2 t)$$

Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι ίσο με

$$B_0 = E_0/c$$

Τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και η διεύθυνση διάδοσης (ο άξονας x) αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς επομένως το $\vec{B}$ είναι κατά μήκος του άξονα $-z$. Επίσης το $\vec{B}$ είναι σε πλήρη φάση με το $\vec{E}$ (έχουν το ίδιο ημίτονο) και έτσι:

$$\vec{B}_1 = -\frac{E_0}{c} \vec{e}_z \sin(k_1 x_A - \omega_1 t)$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c}\vec{e}_z \sin(k_2 x_A - \omega_2 t)$$

Η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από την $u = \varepsilon_0 E^2$ επομένως:

$$u_1 = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(k_1 x_A - \omega_1 t)$$

$$u_2 = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(k_2 x_A - \omega_2 t)$$

β)

Λόγω του επιπλέον Δx , τα ηλεκτρικά πεδία στο σημείο A είναι ίσα με

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y \sin(k_1 x_A - \omega_1 t)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y \sin(k_2 x_A + k_2 \Delta x - \omega_2 t)$$

Το συνιστάμενο πεδίο ισούται με

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y \{ \sin(k_1 x_A - \omega_1 t) + \sin(k_2 x_A + k_2 \Delta x - \omega_2 t) \}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

οδηγεί στο

$$\vec{E} = -2E_0 \vec{e}_y \sin(\bar{k} x_A - \bar{\omega} t + k_2 \Delta x / 2) \cos(\delta k x_A - \delta \omega t - k_2 \Delta x / 2)$$

όπου $\bar{k}$ η μέση τιμή των k_1, k_2 και δk η ημιδιαφορά τους και ομοίως για τα $\bar{\omega}$ και $\delta \omega$. Για κοντινές συχνότητες $\delta \omega \approx 0$ και $\delta k \approx 0$ οπότε

$$\vec{E} = -2E_0 \vec{e}_y \sin(\bar{k} x_A - \bar{\omega} t + k_2 \Delta x / 2) \cos(k_2 \Delta x / 2)$$

Το παραπάνω ηλεκτρικό πεδίο έχει κυκλική συχνότητα

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

δηλαδή συχνότητα

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

και κυματάριθμο

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

και άρα μήκος κύματος

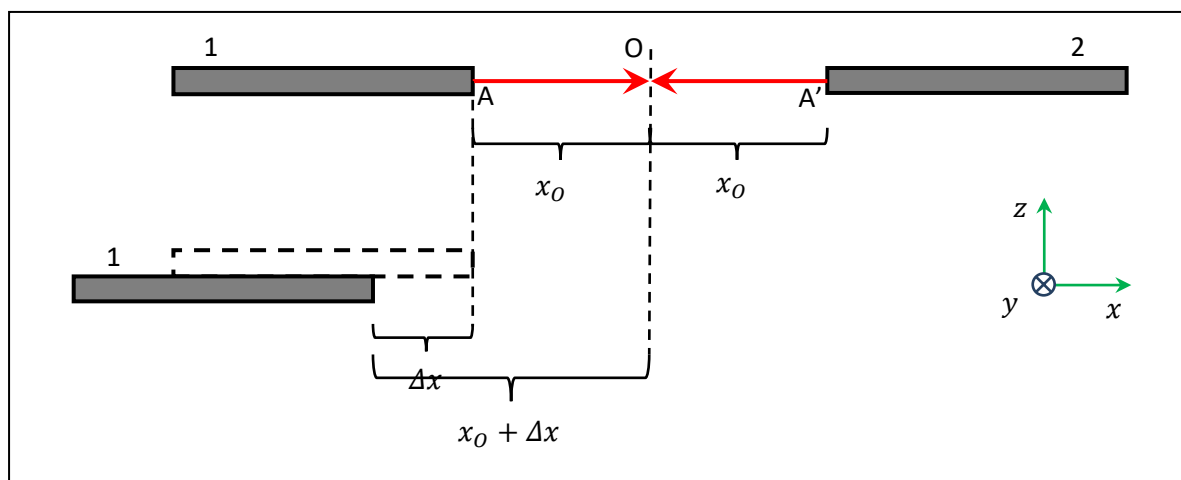
$$\bar{\lambda} = \frac{c}{\bar{f}} = \frac{2c}{f_1 + f_2}$$

Το μέτρο αυτού του ηλεκτρικού πεδίου ισούται με

$$E_0' = 2E_0 \cos(k_2 \Delta x / 2)$$

Πρόβλημα 12.8.

Δυο οπτικές ίνες 1 και 2 παράλληλες στον άξονα x που εκπέμπουν δέσμες με φως διαφορετικής συχνότητας f_1 και f_2 αντίστοιχα και προς αντίθετες κατευθύνσεις, με ίσο πλάτος μαγνητικού πεδίου B_0 πολωμένο κάθετα στη σελίδα (και για τις δυο συχνότητες), τοποθετούνται μέσα σε σκοτεινό θάλαμο. Τα σημεία τους A και A' που εκπέμπουν φως ισαπέχουν απόσταση x_0 από ένα σημείο O επάνω στον άξονα x το οποίο το λαμβάνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων. Την χρονική στιγμή $t = 0$ τα δυο κύματα έχουν μηδενικές συνιστώσες μαγνητικού πεδίου στο O ενώ οι συνιστώσες αυτές είναι προς τα έξω της σελίδας στο $t \rightarrow 0^+$. α) Να δοθεί η πλήρης μαθηματική έκφραση (διανυσματική μορφή) του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου καθώς και της πυκνότητας ενέργειας στο σημείο O της κάθε δέσμης για κάθε χρόνο t (επάνω σχήμα). β) Έστω ότι η ίνα 1 μετατοπίζεται κατά Δx προς τον αρνητικό άξονα x (κάτω σχήμα). Να υπολογίσετε το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο E στο A κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ θεωρώντας ότι οι δυο συχνότητες είναι πολύ κοντά η μια στην άλλη (αλλά όχι ίσες) και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $f_1 - f_2 \approx 0$ στο τελικό σας αποτέλεσμα. Επίσης θεωρήστε ότι $\Delta x \ll x_0$ και αγνοήστε τον όρο που περιέχει το Δx δίπλα στον όρο που περιέχει το x_0 και υπολογίστε για ποια Δx έχουμε $E = 0$

Λύση:

α) Οι αντίστοιχες κυκλικές κυκλικές συχνότητες των δυο κυμάτων είναι ίσες με $\omega_1 = 2\pi f_1$ και $\omega_2 = 2\pi f_2$, τα μήκη κύματος ίσα με $\lambda_1 = c/f_1$ και $\lambda_2 = c/f_2$, ενώ οι κυματάρθρωμοι ίσοι με $k_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2\pi f_1/c$ και $k_2 = 2\pi f_2/c$. Θεωρήστε πρώτα την ίνα 1 η οποία εκπέμπει φως με μαγνητικό πεδίο που ταξιδεύει προς τα δεξιά και επομένως το ημίτονό του θα πρέπει να περιέχει τον όρο $k_1 x - \omega_1 t$ ενώ αντιθέτως το φως της ίνας 2 ταξιδεύει προς τα αριστερά και επομένως το ημίτονό του θα περιέχει τον όρο $k_2 x + \omega_2 t$. Γενικά θα υπάρχουν και κάποιες αρχικές φάσεις φ_1 και φ_2 στα ορίσματα των ημιτόνων και επιπλέον η πόλωσή τους είναι κάθετα στη σελίδα άρα θα είναι κατά μήκος του άξονα $\pm y$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε για δυο μαγνητικά πεδία

$$\vec{B}_1 = \pm B_0 \vec{e}_y \sin(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\vec{B}_2 = \pm B_0 \vec{e}_y \sin(k_2 x + \omega_2 t + \varphi_2)$$

Στο σημείο Ο έχουμε $x = 0$. Από την αρχική συνθήκη ότι $\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = 0$ εκεί για $t = 0$, προκύπτει ότι $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Επειδή για μικρές γωνίες ισχύει $\sin 0^+ \rightarrow 0^+ > 0$, η συνθήκη στο $t \rightarrow 0^+$ καθορίζει τα πρόσημα των πεδίων να είναι ως εξής

$$\vec{B}_1 = B_0 \vec{e}_y \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\vec{B}_2 = -B_0 \vec{e}_y \sin(k_2 x + \omega_2 t)$$

ώστε στο Ο (με $x = 0$) να έχουμε τα $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ προς τα έξω της σελίδας κατά μήκος του αρνητικού άξονα y . Το μέτρο του κάθε ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσο με

$$E_0 = B_0 c$$

Τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και η διεύθυνση διάδοσης (ο άξονας x) αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς επομένως το $\vec{E}$ είναι κατά μήκος του άξονα $+z$. Επίσης το $\vec{B}$ είναι σε πλήρη φάση με το $\vec{E}$ (έχουν το ίδιο ημίτονο) και έτσι:

$$\vec{E}_1 = -B_0 c \vec{e}_z \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\vec{E}_2 = B_0 c \vec{e}_z \sin(k_2 x + \omega_2 t)$$

Η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από την $u = \varepsilon_0 E^2$ επομένως:

$$u_1 = \varepsilon_0 (B_0 c)^2 \sin^2(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$u_2 = \varepsilon_0 (B_0 c)^2 \sin^2(k_2 x + \omega_2 t)$$

β)

Λόγω του επιπλέον Δx , το πεδίο που δημιουργεί η ίνα 1 έχει να ταξιδέψει αυτή την επιπλέον απόσταση και έτσι τα πεδία διαμορφώνονται ως εξής:

τα ηλεκτρικά πεδία στο σημείο Α είναι ίσα με

$$\vec{E}_1 = -B_0 c \vec{e}_z \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\vec{E}_2 = B_0 c \vec{e}_z \sin(k_2 x + \omega_2 t)$$

Το συνιστάμενο πεδίο κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισούται με

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = B_0 c \vec{e}_z \left\{ \sin \left[\frac{2\pi f_1}{c} (x_0 + \Delta x) \right] + \sin \left[\frac{2\pi f_2}{c} x_0 \right] \right\}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

οδηγεί στο

$$\vec{E} = 2B_0 c \vec{e}_z \sin \left[\frac{2\pi \bar{f}}{c} x_0 + \pi \bar{f}_1 \frac{\Delta x}{c} \right] \cos \left[\frac{2\pi \delta f}{c} x_0 + \pi \bar{f}_1 \frac{\Delta x}{c} \right]$$

όπου $\bar{f}$ η μέση τιμή των f_1, f_2 και δf η ημιδιαφορά τους. Για κοντινές συχνότητες $\delta f \approx 0$ και

$$\vec{E} = 2B_0 c \vec{e}_z \sin \left[\frac{2\pi \bar{f}}{c} x_0 + \pi f_1 \frac{\Delta x}{c} \right] \cos \left[\pi f_1 \frac{\Delta x}{c} \right]$$

Αγνοώντας τον όρο που περιέχει το Δx δίπλα στον όρο που περιέχει το x_0

$$\vec{E} = 2B_0 c \vec{e}_z \sin \left[\frac{2\pi \bar{f}}{c} x_0 \right] \cos \left[\pi f_1 \frac{\Delta x}{c} \right]$$

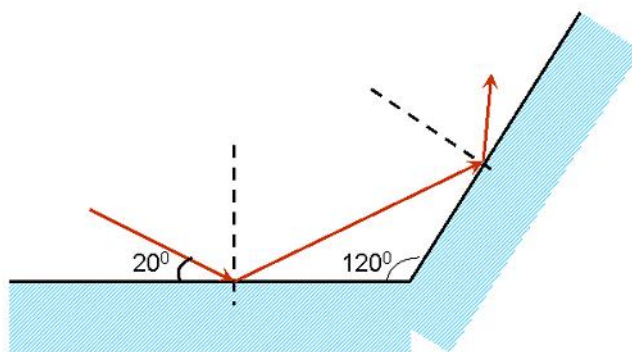
Το E μηδενίζεται σε σχέση με το Δx όταν το συνημίτονο του 2^{ου} όρου γίνει μηδέν δηλαδή όταν

$$\pi f_1 \frac{\Delta x}{c} = n\pi \Rightarrow \Delta x = n \frac{c}{f_1}$$

13. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

Πρόβλημα 13.1.

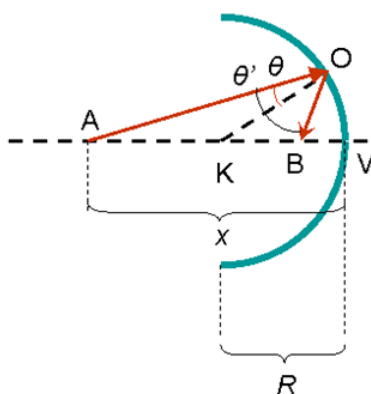
Στο παρακάτω σχήμα τα δυο κάτοπτρα σχηματίζουν γωνία 120° μεταξύ τους. Μια φωτεινή ακτίνα προσπίπτει στην επιφάνεια του 1ου κατόπτρου με γωνία 20° , ανακλάται και ακολούθως προσπίπτει στην επιφάνεια του 2ου κατόπτρου. Βρείτε τη γωνία ανάκλασης στο δεύτερο κάτοπτρο.



Πρόβλημα 13.2.

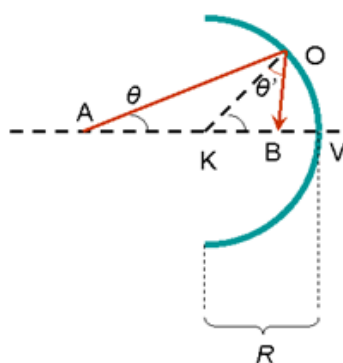
Στο παρακάτω σχήμα μια φωτεινή δέσμη πέφτει επάνω σε κυκλικό κάτοπτρο με κέντρο στο K και ακτίνα R . Έστω $\theta = \angle AOK$, $\theta' = \angle AOB$ και $x = AV$. Ποιο από τα παρακάτω ισχύει:

- α) $\theta' = 2\theta$ β) $1/\theta + 1/\theta' = 2/R$ γ) $\theta + \theta' = \pi/2$ δ) $\sin(\theta') = x/R$

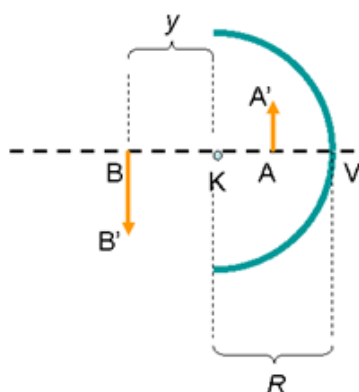


Πρόβλημα 13.3.

Στο παρακάτω σχήμα μια φωτεινή δέσμη πέφτει επάνω σε κυκλικό κάτοπτρο με κέντρο στο K και ακτίνα $R = 2\text{cm}$. Εάν $\theta = 10^\circ$, $\theta' = 20^\circ$ (η γωνία $\angle KOB$) τότε να βρεθεί η γωνία $\angle OKB$.

Πρόβλημα 13.4.

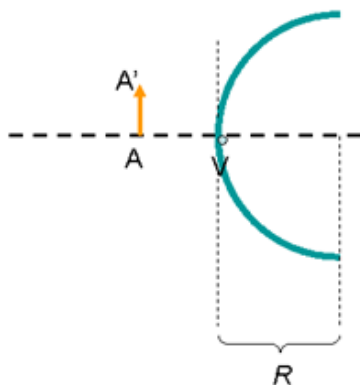
Στο παρακάτω σχήμα ένα λεπτό αντικείμενο AA' ύψους 0.5 cm τοποθετείται σε απόσταση x από τη βάση ενός κοίλου κάτοπτρου ακτίνας $R = 2\text{ cm}$. Εάν το είδωλο του BB' σχηματίζεται σε απόσταση $y = 3\text{ cm}$ από το κέντρο K , τότε να βρεθεί το x .

Πρόβλημα 13.5.

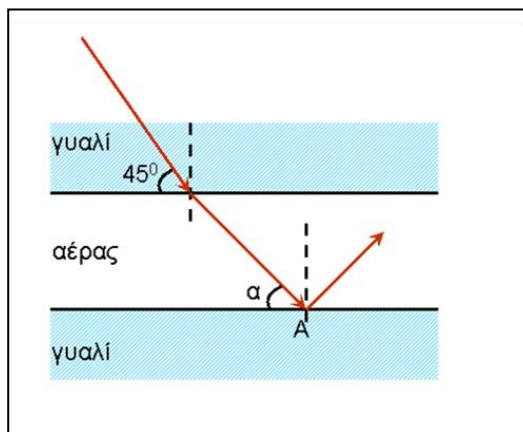
Λεπτός φακός κατασκευασμένος από γυαλί με δείκτη διάθλασης $3/2$ έχει εστιακή απόσταση 10 cm . Όταν ο ίδιος ακριβώς φακός (ίδιο σχήμα) κατασκευάζεται από μολυβδύαλο με δείκτη διάθλασης $5/3$, ποια θα είναι η νέα του εστιακή απόσταση;

Πρόβλημα 13.6.

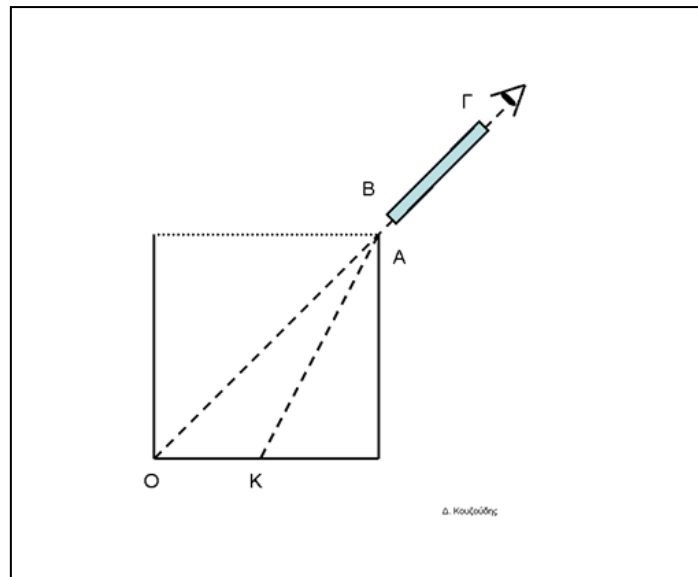
Στο παρακάτω σχήμα ένα λεπτό αντικείμενο AA' ύψους 1.5 cm τοποθετείται σε απόσταση 7 cm από ένα κυρτό κάτοπτρο ακτίνας $R = 10\text{ cm}$. Σε πόση απόσταση από το σημείο V θα σχηματισθεί το είδωλο του;

Πρόβλημα 13.7.

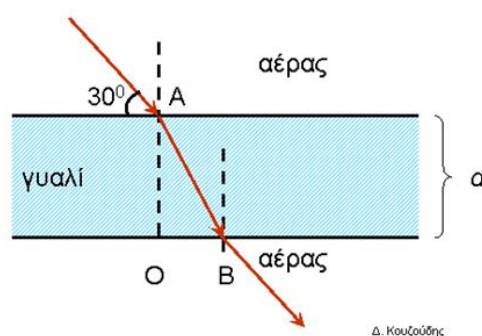
Στο παρακάτω σχήμα ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι ίσος με $\sqrt{3/2}$. Να βρεθεί η γωνία α στο σημείο A.

Πρόβλημα 13.8.

Στο παρακάτω σχήμα το δοχείο σχήματος κύβου και διαστάσεων $a \times a \times a$ είναι αρχικά άδειο. Ένας παρατηρητής που έχει τοποθετήσει τον οφθαλμό του στην μια άκρη Γ ενός λεπτού σωλήνα ΒΓ, βλέπει το σημείο Ο. Όταν το δοχείο γεμίσει πλήρως με κάποιο άγνωστο διαφανές υγρό, ο παρατηρητής, χωρίς να έχει μετακινήσει τον οφθαλμό του ή τον σωλήνα από τις προηγούμενες θέσεις τους, βλέπει το κέντρο Κ του πυθμένα. Να βρεθεί ο δείκτης διάθλασης του υγρού.

Πρόβλημα 13.9.

Στο παρακάτω σχήμα μια φωτεινή ακτίνα εισέρχεται υπό γωνία στο σημείο Α ενός γυάλινου πλακιδίου πάχους d και εξέρχεται στο σημείο Β. Εάν ο δείκτης του συγκεκριμένου γυαλιού είναι ίσος με $\sqrt{3}$, τότε να βρεθεί η απόσταση ΟΒ

Λύση:

Έστω β η γωνία διάθλασης $O\hat{A}B$. Στο σημείο Α η γωνία πρόσπτωσης είναι 30° οπότε ο νόμος του Snell δίνει

$$1 \times \sin 30^\circ = \sqrt{3} \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Από απλή τριγωνομετρία στο τρίγωνο AOB , η απόσταση OB ισούται με

$$OB = d \tan \beta$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ παίρνουμε

$$1 + \cot^2 \beta = \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

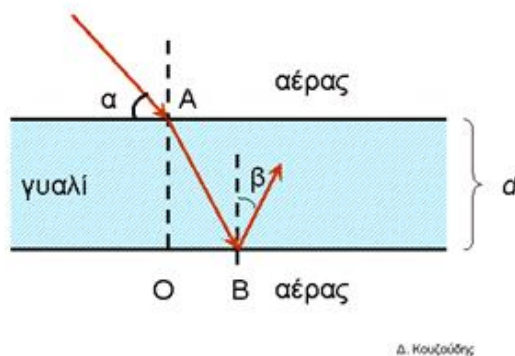
οπότε

$$\tan\beta = \frac{1}{\cot\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\beta} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times 3 - 1}} = 0.405$$

Τελικά $OB = 0.405d$

Πρόβλημα 13.10.

Στο παρακάτω σχήμα μια φωτεινή ακτίνα εισέρχεται υπό γωνία στο σημείο A ενός γυάλινου πλακιδίου πάχους d και ανακλάται (μερικώς) στο σημείο B. Εάν ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι $\sqrt{3}$ και η γωνία $\beta = 30^\circ$, τότε να βρεθεί η γωνία α .



Λύση:

Στον πυθμένα του πλακιδίου, η γωνία πρόσπτωσης ισούται με την γωνία ανάκλασης και έτσι $\angle A\hat{O}B = 30^\circ$. Η γωνία $\angle O\hat{A}B$, η οποία είναι η γωνία διάθλασης στο σημείο A, είναι εντός εναλλάξ με την $\angle A\hat{O}B$ οπότε και $\angle O\hat{A}B = 30^\circ$. Από τον νόμο του Snell

$$1 \times \sin\alpha = \sqrt{3}\sin 30^\circ$$

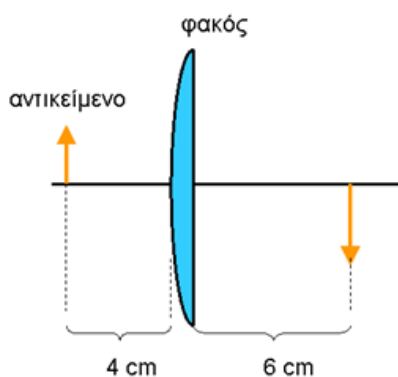
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

οπότε

$$\alpha = 60^\circ$$

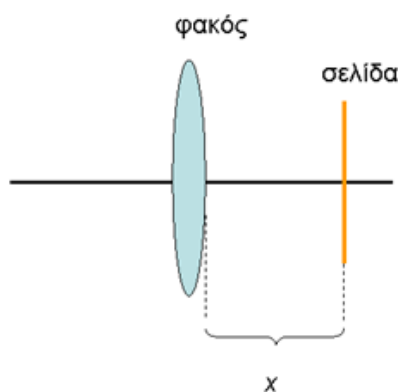
Πρόβλημα 13.11.

Στο παρακάτω σχήμα ο λεπτός φακός έχει μια κυρτή και μια επίπεδη επιφάνεια και ο δείκτης διάθλασης του είναι ίσος με $3/2$. Εάν το λεπτό αντικείμενο εστιάζεται με τις αποστάσεις που φαίνονται, τότε να βρεθεί η ακτίνα καμπυλότητας της κυρτής επιφάνειας του φακού.



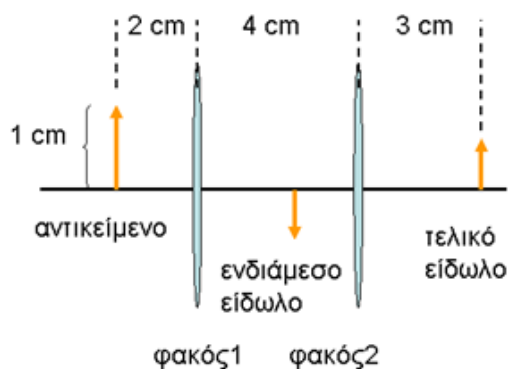
Πρόβλημα 13.12.

Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής θέλει να προκαλέσει ανάφλεξη σε μια σελίδα χαρτί (η βαθμολογία του;) χρησιμοποιώντας το παλιό τέχνασμα με την εστίαση των φωτεινών ακτίνων του ήλιου από έναν λεπτό φακό με δείκτη διάθλασης ίσο με $3/2$. Εάν το πετυχαίνει αυτό στο $x = 4 \text{ cm}$ και η ακτίνα καμπυλότητας της αριστερής επιφάνειας του φακού είναι 1 cm , τότε να βρεθεί η ακτίνα καμπυλότητας της δεξιάς επιφάνειας του φακού.

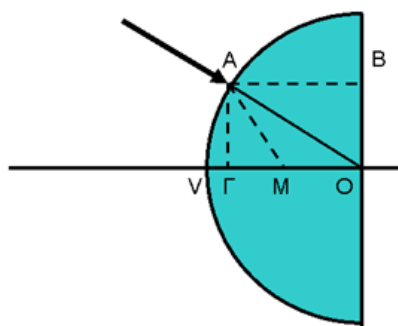


Πρόβλημα 13.13.

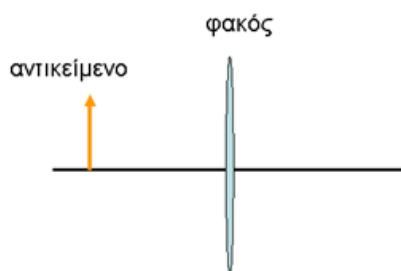
Στο παρακάτω σχήμα ο φακός 1 σχηματίζει ένα ενδιάμεσο είδωλο ενός λεπτού αντικειμένου. Ακολουθώς, αυτό το είδωλο δρα ως αντικείμενο στον φακό 2 και έτσι σχηματίζεται ένα τελικό είδωλο στα δεξιά. Εάν οι εστιακές αποστάσεις είναι $f_1 = 6/5$ και $f_2 = 3/4$ αντίστοιχα και το ύψος του αρχικού αντικειμένου $h = 1 \text{ cm}$, τότε να βρεθεί το ύψος του τελικού αντικειμένου.

Πρόβλημα 13.14.

Ευθύγραμμη λεπτή φωτεινή δέσμη προσπίπτει στο σημείο Α ενός γυάλινου ημικυκλικού πρίσματος κατά μήκος της ακτίνας του. Προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί η διαθλώμενη δέσμη;

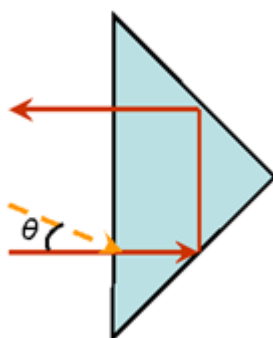
Πρόβλημα 13.15.

Στο παρακάτω σχήμα ένα λεπτό αντικείμενο ύψους 2 cm τοποθετείται σε απόσταση 5 cm από ένα λεπτό συγκλίνοντα φακό εστιακής απόστασης 3 cm . Πόσο είναι το ύψος του ειδώλου του αντικειμένου;

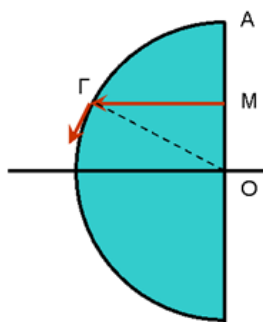


Πρόβλημα 13.16.

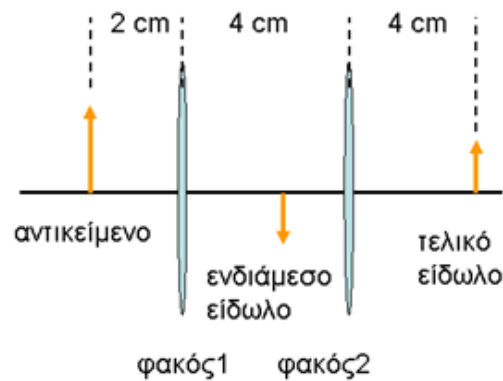
Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής ρίχνει μια φωτεινή δέσμη (διακεκομμένη γραμμή) σε ένα πρίσμα υπό γωνία θ . Όπως μειώνει το θ παρατηρεί ότι οριακά στην τιμή 0° , όλη η δέσμη επιστρέφει εξ' ολοκλήρου πίσω (συμπαγής γραμμή) χωρίς να υπάρχει εξερχόμενο φως στην δεξιά πλευρά του πρίσματος. Πόσος είναι ο δείκτης διάθλασης του πρίσματος;

Πρόβλημα 13.17.

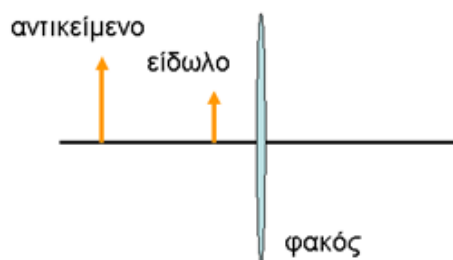
Στο γυάλινο ημικυκλικό πρίσμα του παρακάτω σχήματος, φωτεινή ακτίνα η οποία ξεκινάει από το μέσο M της απόστασης OA και ταξιδεύει οριζόντια προς τα αριστερά, αναδύεται εφαιπτομενικά της κυκλικής επιφάνειας στο σημείο Γ . Με τι ισούται ο δείκτης διάθλασης του πρίσματος;

Πρόβλημα 13.18.

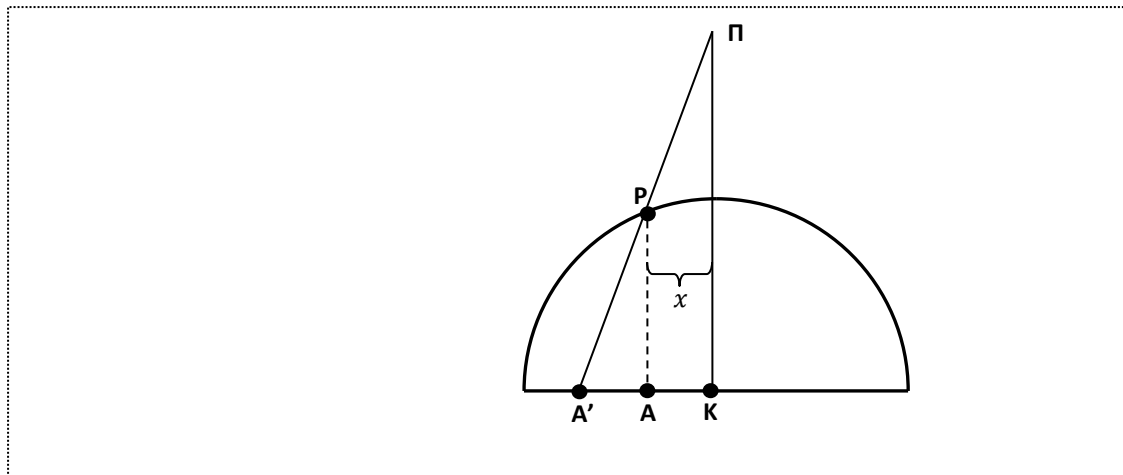
Στο παρακάτω σχήμα ο φακός 1 σχηματίζει ένα ενδιάμεσο είδωλο ενός λεπτού αντικειμένου. Ακολουθώντας, αυτό το είδωλο δρα ως αντικείμενο στον φακό 2 και έτσι σχηματίζεται ένα τελικό είδωλο στα δεξιά. Εάν η εστιακή απόσταση του φακού 1 είναι $f_1 = 6/5 \text{ cm}$, να βρεθεί η εστιακή απόσταση του φακού 2.

Πρόβλημα 13.19.

Στο παρακάτω σχήμα ένα λεπτό αντικείμενο ύψους 2.5 cm τοποθετείται σε απόσταση 2 cm από ένα λεπτό φακό. Εάν το είδωλο του αντικειμένου σχηματίζεται στην ίδια πλευρά με το αντικείμενο και σε απόσταση 1 cm από αυτόν, τότε να βρεθεί η εστιακή απόσταση του φακού.

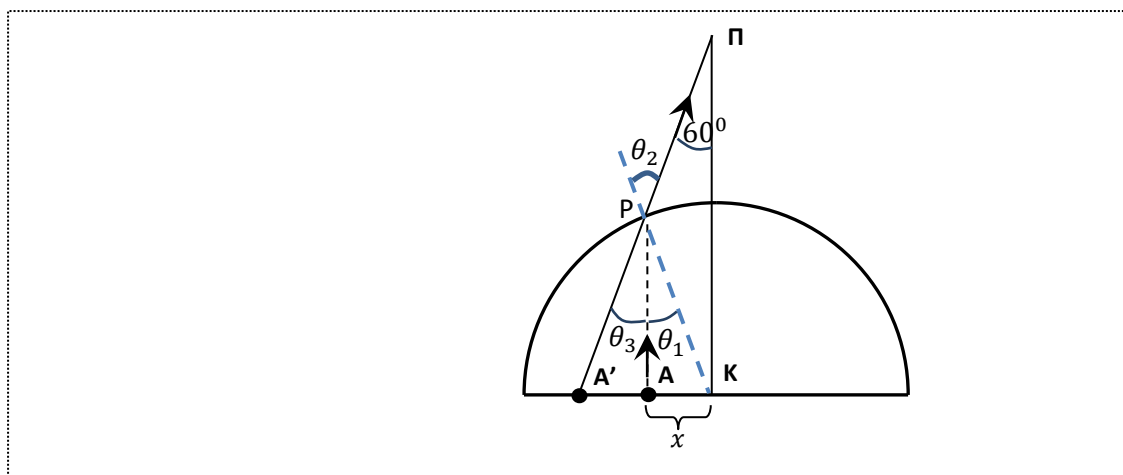
Πρόβλημα 13.20.

Σημειακή ατέλεια Α βρίσκεται επάνω στην επίπεδη επιφάνεια ενός γυάλινου ημισφαιρικού φακού με δείκτη διάθλασης $n = 3/2$, σε απόσταση x από το κέντρο καμπυλότητας Κ του φακού (βλέπε σχήμα). Ένας παρατηρητής που ο οφθαλμός του βρίσκεται στο σημείο Π, έχει την εντύπωση ότι το Α βρίσκεται στην θέση Α' της επίπεδης επιφάνειας. Εάν η γωνία ΚΠΑ' είναι ίση με 60° και η φωτεινή ακτίνα από το Α χρειάζεται χρόνο $t = \sqrt{3} \times 10^{-10}\text{ s}$ για φτάσει στο σημείο Ρ, να βρεθεί το x .



Λύση.

Φέρουμε στο σημείο P την ακτίνα PK η οποία είναι και η τοπική κάθετος. Οι γωνίες πρόσπτωσης θ_1 και διάθλασης θ_2 ορίζονται ως προς αυτήν.



Η γωνία θ_3 εντός εναλλάξ με την δεδομένη και άρα είναι ίσες

$$\theta_3 = 60^\circ$$

Από τον νόμο του Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Για τον αέρα $n_2 = 1$ οπότε

$$n_1 \sin \theta_1 = \sin \theta_2$$

Όμως $\theta_2 = \theta_1 + \theta_3 = \theta_1 + 60^\circ$ οπότε:

$$n_1 \sin \theta_1 = \sin(\theta_1 + 60^\circ)$$

$$n_1 \sin \theta_1 = \sin \theta_1 \cos 60^\circ + \cos \theta_1 \sin 60^\circ$$

$$\frac{3}{2}\sin\theta_1 = \frac{1}{2}\sin\theta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1$$

$$\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1 \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Έστω y η απόσταση ΡΑ. Αφού απαιτείται χρόνος t για να καλύψει το φως αυτή την απόσταση, τότε η ταχύτητά του είναι ίση με

$$v = \frac{y}{t}$$

Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης

$$n_1 = \frac{c}{v} = \frac{ct}{y} \Rightarrow y = \frac{ct}{n_1}$$

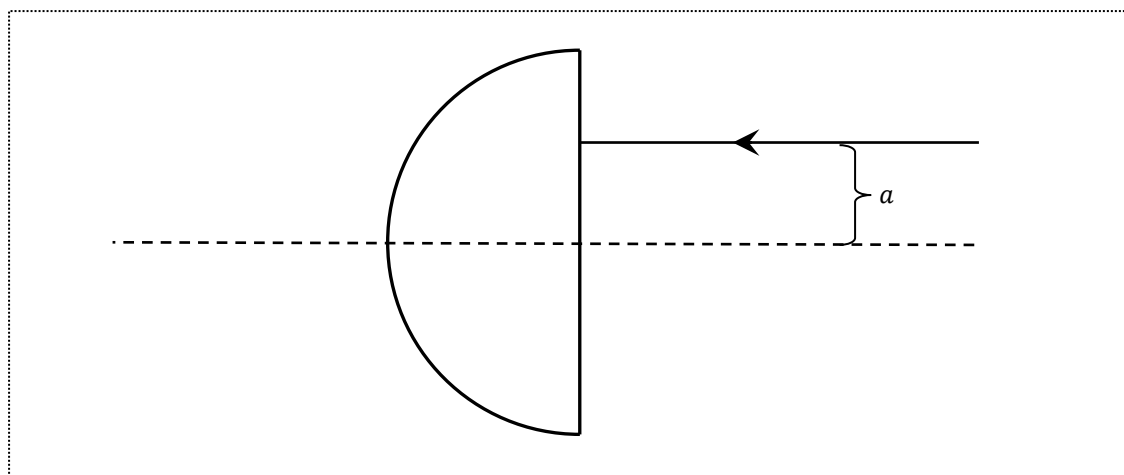
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΚ

$$\tan\theta_1 = \frac{x}{y}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω

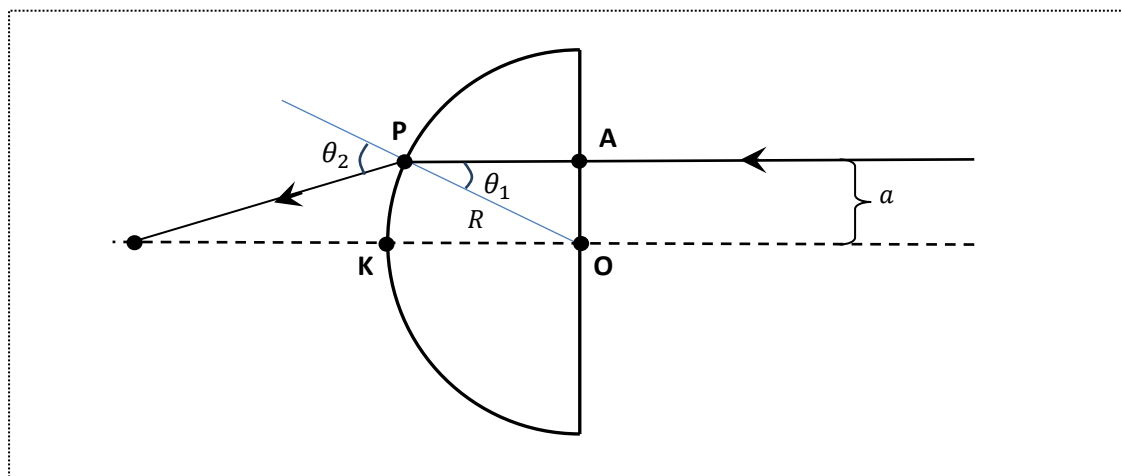
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{xn_1}{ct} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}ct}{2n_1} = \frac{\sqrt{3}ct}{3} = \frac{\sqrt{3} \times 10^8 \times \sqrt{3} \times 10^{-10}}{3} = 1 \text{ cm}$$

Πρόβλημα 13.21. Λεπτή φωτεινή δέσμη προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνεια ενός γυάλινου ημισφαιρίου με διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας του ημισφαιρίου και σε απόσταση $a = 2.5 \text{ mm}$ από αυτόν. Η γωνία διάθλασης επάνω στην σφαιρική επιφάνεια κατά την έξοδο της δέσμης είναι ίση με $\theta = 30^\circ$. Όταν η δέσμη κατευθύνεται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, απαιτείται χρόνος $t = 2/3 \times 10^{-10} \text{ s}$ για να διαπεράσει η δέσμη το ημισφαίριο. Να βρεθεί η εστιακή απόσταση του ημισφαιρίου.



Λύση.

Φέρουμε στο σημείο P την ακτίνα PK η οποία είναι και η τοπική κάθετος. Οι γωνίες πρόσπτωσης θ_1 και διάθλασης θ_2 ορίζονται ως προς αυτήν.



Στην επίπεδη επιφάνεια έχουμε κάθετη πρόσπτωση οπότε η δέσμη συνεχίζει ανενόχλητη.

Από τον νόμο του Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Για τον αέρα $n_2 = 1$ και η $\theta_2 = \theta$ δεδομένη. Θέτοντας $n_1 = n$ έχουμε

$$n \sin \theta_1 = \sin \theta$$

Από το τρίγωνο PAO

$$\sin \theta_1 = \frac{a}{R}$$

Η απόσταση OK που καλύπτει η δέσμη όταν κατευθύνεται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας είναι η ακτίνα R του ημισφαιρίου. Αφού απαιτείται χρόνος t για να καλύψει το φως αυτή την απόσταση, τότε η ταχύτητά του είναι ίση με

$$v = \frac{R}{t}$$

Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ct}{R} \Rightarrow R = \frac{ct}{n}$$

Επομένως

$$\sin \theta_1 = \frac{a}{R} = \frac{an}{ct}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω

$$n \sin \theta_1 = \sin \theta \Rightarrow \frac{an^2}{ct} = \sin \theta \Rightarrow n = \sqrt{\frac{ct \sin \theta}{a}}$$

Η εστιακή απόσταση δίνεται από την

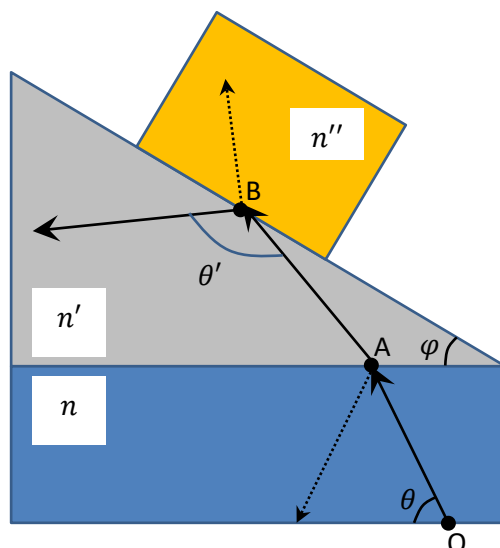
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Αφού η πίσω επιφάνεια είναι επίπεδη, έχει άπειρη ακτίνα καμπυλότητας $R_2 \rightarrow \infty$. Θέτοντας $R_1 = R$ έχουμε:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{1}{R} \Rightarrow f = \frac{R}{n - 1} = \frac{ct}{n(n - 1)} = \frac{ct}{\sqrt{\frac{ct \sin \theta}{a}} \left(\sqrt{\frac{ct \sin \theta}{a}} - 1 \right)}$$

$$f = \frac{2 \times 10^{-2}}{\sqrt{\frac{2 \times 10^{-2} \times 0.5}{2.5 \times 10^{-3}}} \left(\sqrt{\frac{2 \times 10^{-2} \times 0.5}{2.5 \times 10^{-3}}} - 1 \right)} = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Πρόβλημα 13.22. Στο παρακάτω σχήμα τα τρία διαφορετικά σχήματα, δυο ορθογώνια και ένα πρίσμα (κοινώς σφήνα), είναι από διαφορετικά υλικά με δείκτες διάθλασης n , n' και n'' όπως αναγράφονται. Ένας μέρους της προσπίπτουσας ακτίνας ΟΑ ανακλάται ενώ ένα μέρος της διαθλάται προς το σημείο Β. Παρατηρείται ότι όταν η γωνία θ ελαττωθεί αρκετά, τότε στο σημείο Β υπάρχει μόνο ανάκλαση, δηλαδή δεν εισέρχεται φως στο πάνω ορθογώνιο. Εάν η $\theta = 60^\circ$ είναι η οριακή γωνία που παρατηρείται αυτό το φαινόμενο και τότε $\theta' = 120^\circ$, να βρεθεί η τιμή του n εάν δίνονται το $n'' = \sqrt{3}$ και η γωνία $\varphi = 15^\circ$ του πρίσματος.



Λύση: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, φέρουμε μια κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο B, μια άλλη κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο A και μια τρίτη κάθετο στην κεκλιμένη επιφάνεια του πρίσματος η οποία διέρχεται από το σημείο A. Αφού οριακά δεν εμφανίζεται διαθλώμενη ακτίνα στο σημείο B, τότε η α' είναι εξ' ορισμού η κρίσιμη γωνία και θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$n' \sin \alpha' = n'' \sin 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha' = \frac{n''}{n'} = \frac{\sqrt{3}}{n'}$$

Από τον νόμο της ανάκλασης $\beta' = \alpha'$ και αφού το άθροισμά τους είναι ίσο με τη δεδομένη $\theta' = 120^\circ$ τότε $\alpha' = \beta' = 60^\circ$. Από τον ορισμό της κρίσιμης γωνίας παραπάνω έχουμε

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{n'} \Rightarrow n' = 2$$

Η γωνία α' είναι εντός-εναλλάξ με την γωνία $\theta'_A + \varphi'$ και άρα είναι ίσες μεταξύ τους δηλαδή

$$\alpha' = \theta'_A + \varphi'$$

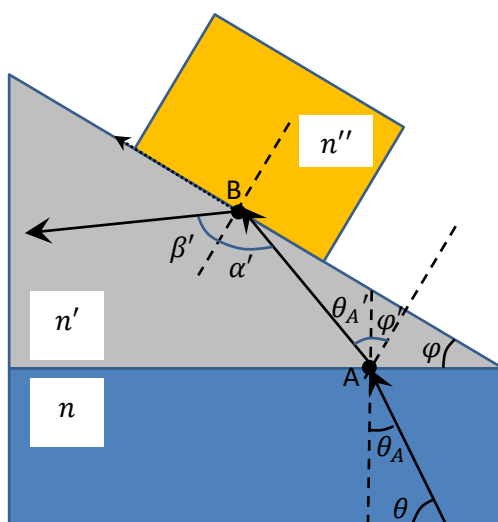
Η γωνία φ' είναι ίση με την γωνία $\varphi = 15^\circ$ του πρίσματος αφού οι πλευρές τους είναι κάθετες μεταξύ τους και είναι και οι δυο οξείες. Επομένως

$$\theta'_A = \alpha' - \varphi = 60 - 15 = 45^\circ$$

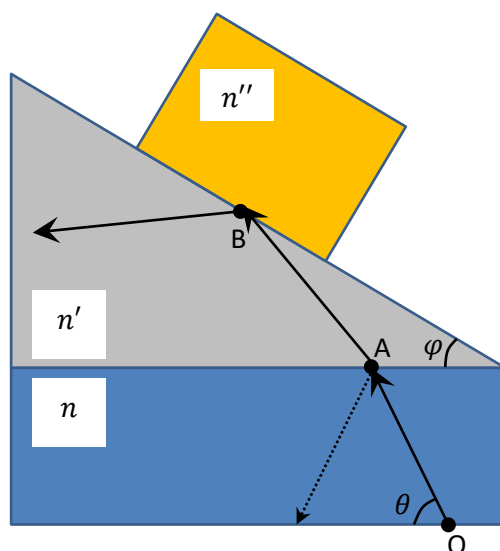
Η γωνία θ είναι η συμπληρωματική της θ_A οπότε $\theta_A = 30^\circ$. Από τον νόμο της διάθλασης στο σημείο A

$$n \sin \theta_A = n' \sin \theta'_A \Rightarrow n = n' \frac{\sin \theta'_A}{\sin \theta_A} = 2 \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

και άρα $n = 2\sqrt{2}$



Πρόβλημα 13.23. Στο παρακάτω σχήμα τα τρία διαφορετικά σχήματα, δυο ορθογώνια και ένα πρίσμα (κοινώς σφήνα), είναι από διαφορετικά υλικά με δείκτες διάθλασης n , n' και n'' όπως αναγράφονται. Ένας μέρος της προσπίπτουσας ακτίνας ΟΑ στο σημείο Α ανακλάται ενώ ένα μέρος της διαθλάται προς το σημείο Β. Παρατηρείται ότι όταν η γωνία θ ελαττωθεί αρκετά, τότε στο σημείο Β υπάρχει μόνο ανάκλαση, δηλαδή δεν εισέρχεται φως στο πάνω ορθογώνιο. Εάν η θ είναι η οριακή γωνία που παρατηρείται αυτό το φαινόμενο, τότε να βρεθεί η τιμή της εάν δίνονται τα $n = 2\sqrt{2}$, $n' = 2$ και $n'' = \sqrt{3}$ και η γωνία $\varphi = 15^\circ$ του πρίσματος.



Λύση: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, φέρουμε μια κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο Β, μια άλλη κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο Α και μια τρίτη κάθετο στην κεκλιμένη επιφάνεια του πρίσματος η οποία διέρχεται από το σημείο Α. Αφού οριακά δεν εμφανίζεται διαθλώμενη ακτίνα στο σημείο Β, τότε η θ_B' είναι εξ' ορισμού η κρίσιμη γωνία και θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$n' \sin \theta_B' = n'' \sin 90^\circ \Rightarrow \sin \theta_B' = \frac{n''}{n'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_B' = 60^\circ$$

Αυτή η γωνία είναι εντός-εναλλάξ με την γωνία $\theta_A' + \varphi'$ και άρα είναι ίσες μεταξύ τους δηλαδή

$$\theta_B' = \theta_A' + \varphi'$$

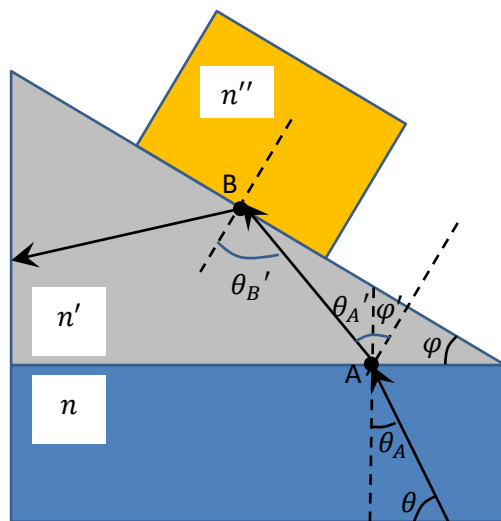
Η γωνία φ' είναι ίση με την γωνία $\varphi = 15^\circ$ του πρίσματος αφού οι πλευρές τους είναι κάθετες μεταξύ τους και είναι και οι δυο οξείες. Επομένως

$$\theta_A' = \theta_B' - \varphi = 60 - 15 = 45^\circ$$

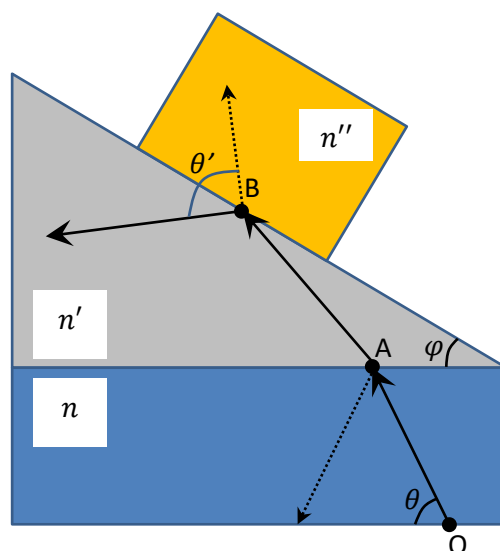
Από τον νόμο της διάθλασης στο σημείο Α

$$n \sin \theta_A = n' \sin \theta_A' \Rightarrow \sin \theta_A = \frac{n'}{n} \sin \theta_A' = \frac{2}{2\sqrt{2}} \sin 45^\circ = \frac{1}{2}$$

οπότε $\theta_A = 30^\circ$. Η ζητούμενη γωνία είναι η συμπληρωματική της θ_A οπότε $\theta = 60^\circ$.



Πρόβλημα 13.24. Στο παρακάτω σχήμα τα τρία διαφορετικά σχήματα, δυο ορθογώνια και ένα πρίσμα (κοινώς σφήνα), είναι από διαφορετικά υλικά με δείκτες διάθλασης n , n' και n'' όπως αναγράφονται. Ένας μέρος της προσπίπτουσας ακτίνας ΟΑ ανακλάται ενώ ένα μέρος της διαθλάται προς το σημείο Β. Να βρεθεί η τιμή της γωνίας θ' μεταξύ της ανακλώμενης και της διαθλώμενης ακτίνας στο σημείο Β εάν δίνονται οι τιμές $\theta = 60^\circ$, $n = 2\sqrt{2}$, $n' = 2$ και $n'' = 2\sqrt{3}$ και η γωνία $\varphi = 15^\circ$ του πρίσματος.



Λύση:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, φέρουμε μια κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο B, μια άλλη κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο A και μια τρίτη κάθετο στην κεκλιμένη επιφάνεια του πρίσματος η οποία διέρχεται από το σημείο A. Η γωνία θ είναι η συμπληρωματική της θ_A οπότε $\theta_A = 30^\circ$. Από τον νόμο της διάθλασης στο σημείο A

$$n \sin \theta_A = n' \sin \theta'_A \Rightarrow \sin \theta'_A = \frac{n \sin \theta_A}{n'} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ή

$$\theta'_A = 45^\circ$$

Η γωνία φ' είναι ίση με την γωνία $\varphi = 15^\circ$ του πρίσματος αφού οι πλευρές τους είναι κάθετες μεταξύ τους και είναι και οι δυο οξείες. Επίσης η γωνία πρόσπτωσης α' είναι εντός-εναλλάξ με την γωνία $\theta'_A + \varphi'$ και άρα είναι ίσες μεταξύ τους δηλαδή

$$\alpha' = \theta'_A + \varphi' = 45 + 15 = 60^\circ$$

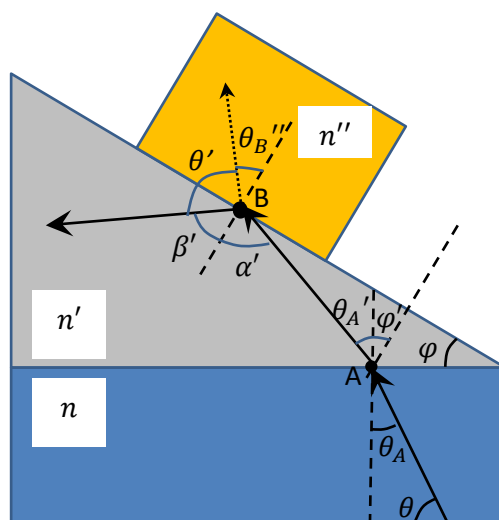
Από τον νόμο της ανάκλασης $\beta' = \alpha' = 60^\circ$. Από τον νόμο της διάθλασης στο σημείο B

$$n'' \sin \theta_B'' = n' \sin \alpha' \Rightarrow \sin \theta_B'' = \frac{n' \sin \alpha'}{n''} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

οπότε $\theta_B'' = 30^\circ$.

Στο σημείο B οι τρεις γωνίες από την μια μεριά της καθέτου ξεκινούν και τελειώνουν σε μια ευθεία οπότε πρέπει να δίνουν άθροισμα 180° δηλαδή:

$$\beta' + \theta' + \theta_B'' = 180^\circ \Rightarrow \theta'_B = 180 - 60 - 30 = 90^\circ$$



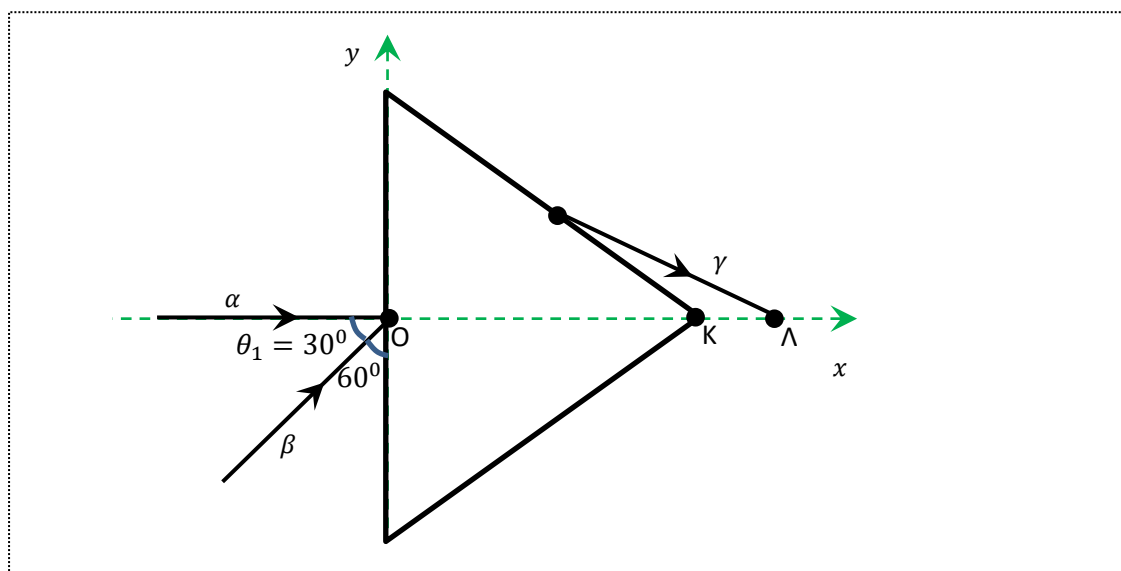
Πρόβλημα 13.25. Ένας φοιτητής κατευθύνει μια φωτεινή μονοχρωματική δέσμη α κάθετα σε μια επίπεδη επιφάνεια ενός λεπτού διαφανούς πρίσματος σε σχήμα ισόπλευρου τριγώνου με ύψος $h = 0.2 \text{ m}$ στο σημείο O κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του (άξονας- x). Το ηλεκτρικό πεδίο αυτής της δέσμης περιγράφεται από την εξίσωση

$$\vec{E} = 1.5 \times 10^4 \vec{e}_y \sin(1.2 \times 10^7 x - 3.6 \times 10^{15} t)$$

όπου το x είναι σε μέτρα, το t σε δευτερόλεπτα και το E σε N/C . Αφού η δέσμη εισέλθει στο πρίσμα, η αντίστοιχη εξίσωση αλλάζει σε

$$\vec{E}' = 1.2 \times 10^4 \vec{e}_y \sin(1.8 \times 10^7 x - 3.6 \times 10^{15} t)$$

Ακολούθως ο φοιτητής στέλνει μια νέα δέσμη β με τα ίδια χαρακτηριστικά ακριβώς όπως της α αλλά με διαφορετικό προσανατολισμό ώστε να προσπίπτει στο O με γωνία 60° ως προς την επίπεδη επιφάνεια. Παρατηρεί τότε ότι μια νέα δέσμη γ εξέρχεται από το σημείο P στην πίσω και επάνω επιφάνεια του πρίσματος με τυχαίο προσανατολισμό. Να βρεθεί σε ποιο σημείο τέμνει η δέσμη γ τον άξονα- x εάν το O είναι η αρχή των συντεταγμένων.



Λύση: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μόλις η δέσμη β εισέλθει στο πρίσμα, θα διαθλασθεί και θα ακολουθήσει τη διαδρομή OP . Στο σημείο P θα διαθλασθεί για δεύτερη φορά και θα τείνει προς τον άξονα- x . Για ευκολία στους γεωμετρικούς μας υπολογισμούς, φέρουμε την κάθετη ε στο P η οποία τέμνει τον άξονα- x στο σημείο Σ . Θα εφαρμόσουμε τον νόμο διάθλασης του *Snell* Εξ. 13.7 στα σημεία O και P αλλά χρειαζόμαστε τον δείκτη διάθλασης n του πρίσματος τον οποίο θα βρούμε από το πρώτο πείραμα του φοιτητή με την δέσμη α . Από την Εξ. 12.13

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \times 10^8}{v}$$

όπου την ταχύτητα v της δέσμης μέσα στο πρίσμα την υπολογίζουμε από την Εξ. 12.14

$$v = \lambda f = \omega/k$$

Λόγω της κάθετης πρόσπτωσης της δέσμης α , αυτή συνεχίζει ανενόχλητη την πορεία της κατά μήκος του άξονα- x μέσα στο πρίσμα και άρα το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι της μορφής:

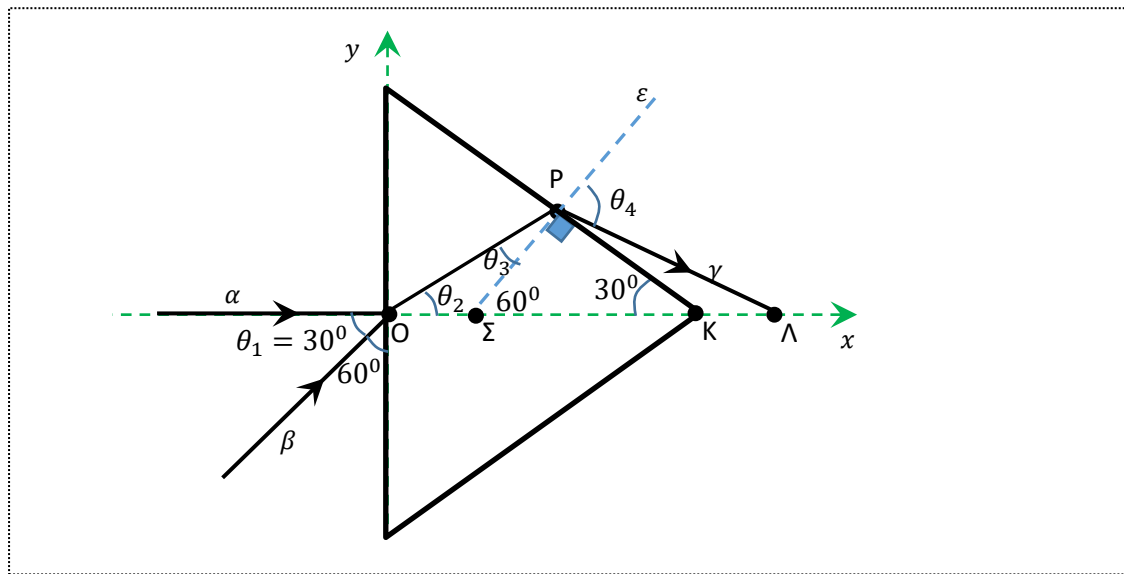
$$\vec{E}' = E_0 \vec{e}_y \sin(kx - \omega t)$$

Συγκρίνοντας με το δεδομένο πεδίο έχουμε $k = 1.8 \times 10^7$ και $\omega = 3.6 \times 10^{15}$ οπότε

$$v = \frac{3.6 \times 10^4}{1.8 \times 10^7} = 2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

και επομένως

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^8} = 1.5$$



Όλες οι γωνίες στον νόμο του Snell είναι σε σχέση με τις επιμέρους καθέτους. Έτσι στο O η γωνία πρόσπτωσης είναι η $\theta_1 = 30^\circ$ και η γωνία διάθλασης η θ_2 . Ο δείκτης διάθλασης του αέρα είναι $n_1 = 1$ και έτσι η Εξ. 13.7 οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{\sin 30^\circ}{1.5} = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}$$

οπότε $\theta_2 = 19.47^\circ$.

Ο άξονας- x διχοτομεί την κορυφή K του πρίσματος και άρα $\widehat{\Sigma K P} = 30^\circ$ που σημαίνει ότι στο τρίγωνο OPK η γωνία $\theta_3 + 90^\circ$ είναι ίση με

$$\theta_3 + 90^\circ = 180^\circ - \theta_2 - 30^\circ$$

Λύνοντας

$$\theta_3 = 40.53^\circ$$

Αυτή είναι και η γωνία πρόσπτωσης στο σημείο P οπότε ο νόμος του Snell Εξ. 13.7 εκεί γράφεται ως εξής:

$$n_4 \sin \theta_4 = n_3 \sin \theta_3 \Rightarrow \sin \theta_4 = 1.5 \sin(40.53^\circ)$$

Λύνοντας $\theta_4 = 77.1^\circ$.

Στο τρίγωνο OPK γνωρίζουμε όλες τις γωνίες

- $\theta_2 = 19.47^\circ$,
- $\widehat{OPK} = 90^\circ + \theta_3 = 130.53^\circ$ και
- $\widehat{SKP} = 30^\circ$

Επίσης γνωρίζουμε ένα μήκος, το ύψος OK ίσο με $h = 0.2 \text{ m}$ επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο των ημιτόνων για να βρούμε το μήκος PK

$$\frac{PK}{\sin \theta_2} = \frac{OK}{\sin(90^\circ + \theta_3)} \Rightarrow PK = 0.088 \text{ m}$$

Ομοίως στο τρίγωνο PKΛ έχουμε για τις τρεις γωνίες

- $\widehat{KPL} = 90^\circ - \theta_4 = 12.9^\circ$
- $\widehat{PKL} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ και άρα
- $\widehat{KLP} = 180^\circ - 12.9^\circ - 150^\circ = 17.1^\circ$

Επίσης γνωρίζουμε από το προηγούμενο βήμα το μήκος PK = 0.088 m επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο των ημιτόνων για να βρούμε το επιθυμητό μήκος ΚΛ

$$\frac{KL}{\sin 12.9^\circ} = \frac{PK}{\sin 17.1^\circ} \Rightarrow KL = 0.066 \text{ m}$$

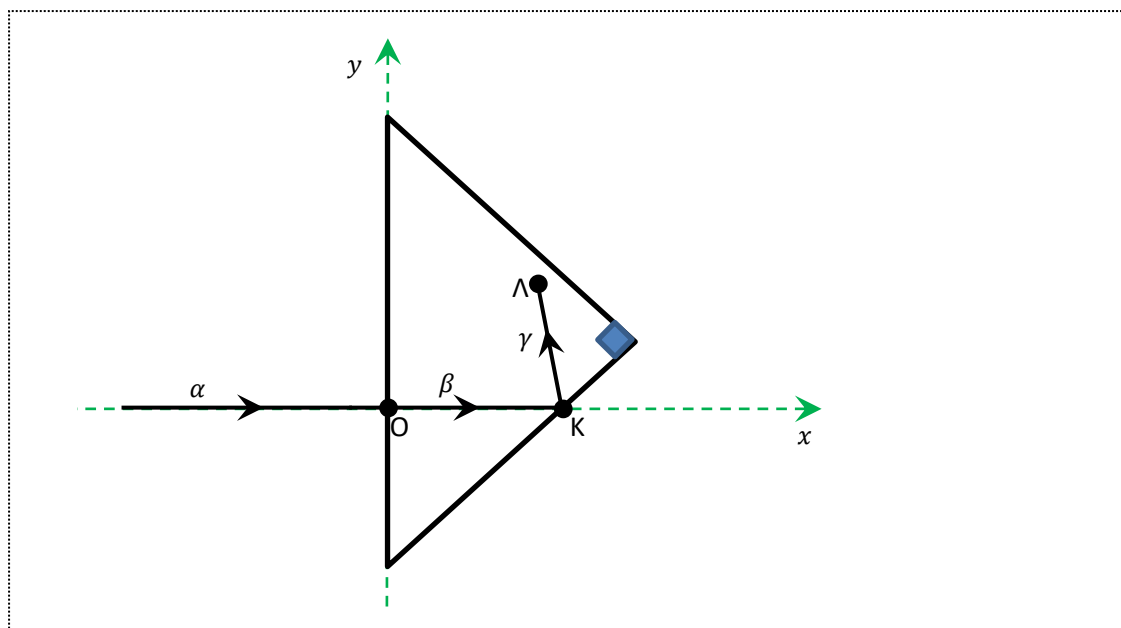
Επομένως από το σημείο O το σημείο Λ απέχει

$$OL = OK + KL = 0.200 + 0.066 = 0.266 \text{ m}$$

Πρόβλημα 13.26. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένας φοιτητής κατευθύνει μια φωτεινή μονοχρωματική δέσμη α κάθετα σε μια επίπεδη επιφάνεια ενός λεπτού διαφανούς πρίσματος σε σχήμα ισοσκελούς ορθογώνιου τριγώνου με δείκτη διάθλασης $3/2$, προς την αρχή των συντεταγμένων O κατά μήκος του άξονα x (δείτε παρακάτω σχήμα) ο οποίος είναι παράλληλος με τον άξονα συμμετρίας του πρίσματος. Το ηλεκτρικό πεδίο αυτής της δέσμης περιγράφεται από την εξίσωση $\vec{E} = 2.5 \times 10^4 \vec{e}_y \sin(1.1 \times 10^7 x - 3.3 \times 10^{15} t)$ όπου το x είναι σε μέτρα, το t σε δευτερόλεπτα και το E σε N/C . Στο εσωτερικό του πρίσματος, η δέσμη αλλάζει στην β με μειωμένη ένταση ακτινοβολίας κατά 64% σε σχέση με την α . Ακολουθώντας, μέρος της δέσμης ανακλάται στο σημείο K και το μαγνητικό πεδίο της ανακλώμενης δέσμης γ έχει μειωμένο πλάτος κατά 75% σε σχέση με την β . Κατά την διάθλαση στο O και κατά την ανάκλαση στο K δεν αλλάζει ούτε η πόλωση του μαγνητικού πεδίου αλλά ούτε και η συχνότητα της ακτινοβολίας. Εάν η φάση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο K την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι μηδέν, τότε

(α) να γραφτούν οι μαθηματικές εκφράσεις του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}''$ και του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}''$ παντού επάνω στη δέσμη γ

(β) να βρεθούν τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{E}'' \cdot \vec{e}_{xy}$ και $\vec{B}'' \cdot \vec{e}_{xy}$ κατά τη χρονική στιγμή $t = 10^{-15} \text{ s}$ στο σημείο Λ της διαδρομής γ το οποίο απέχει απόσταση $d = 0.25 \mu\text{m}$ (micrometers) από το K κατά μήκος της γ , όπου $\vec{e}_{xy}$ είναι το μοναδιαίο επάνω στην ευθεία $y = x$ (προς τα θετικά x και y)



Λύση:

(α) Το δεδομένο πεδίο ηλεκτρικό πεδίο (δέσμη α) είναι της μορφής:

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \sin(kx - \omega t)$$

με $E_0 = 2.5 \times 10^4$, $k = 1.1 \times 10^7$ και $\omega = 3.3 \times 10^{15}$ (μονάδες S.I.). Από την Εξ. 12.14 παίρνουμε για την ταχύτητα αυτού του κύματος

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k} = \frac{3.3 \times 10^{15}}{1.1 \times 10^7} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

όπως αναμένεται αφού αυτή είναι η ταχύτητα του φωτός c στον αέρα. Από την Εξ. 12.13, η ταχύτητα αυτή αλλάζει μέσα στο πρίσμα σε

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8}{3/2} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Αφού από την εκφώνηση, η συχνότητα $\omega = 3.3 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ δεν αλλάζει, τότε από την Εξ. 12.14 αναγκαστικά αλλάζει το k σε νέο k' ως εξής

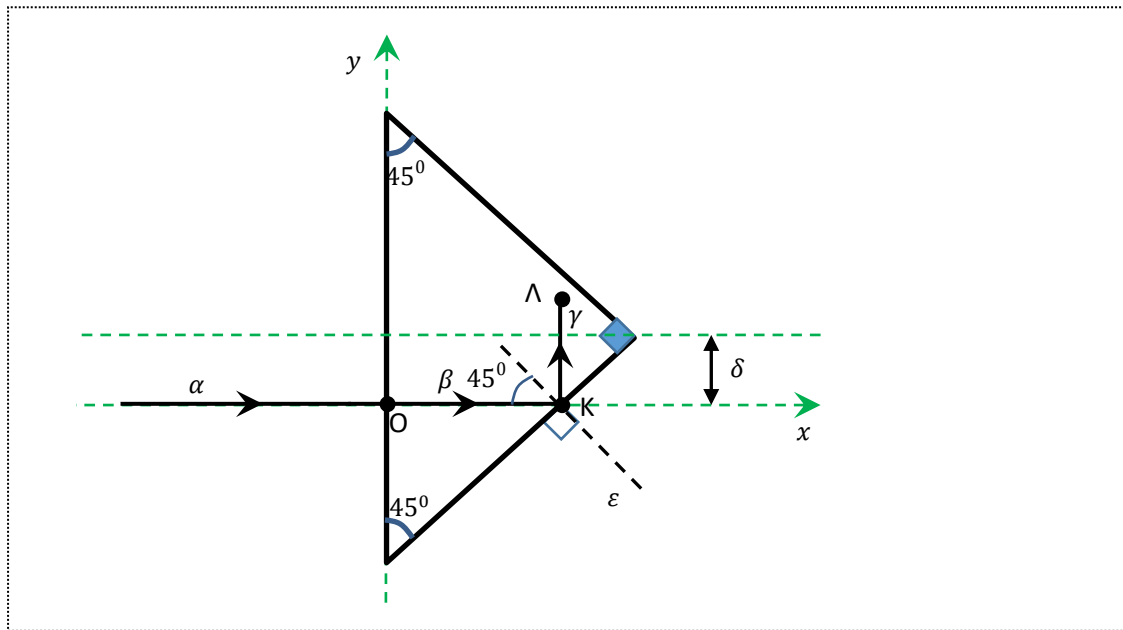
$$k' = \frac{\omega}{v} = \frac{3.3 \times 10^{15}}{2 \times 10^8} = 1.65 \times 10^7 \text{ rad/m}$$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της κάθετης πρόσπτωσης της δέσμης α, αυτή συνεχίζει ανενόχλητη την πορεία της κατά μήκος του άξονα- x μέσα στο πρίσμα και άρα το ηλεκτρικό πεδίο της β θα είναι της μορφής:

$$\vec{E}' = E_0' \vec{e}_y \sin(k'x - \omega t)$$

Από την Εξ. 12.10 η ένταση ακτινοβολίας εξαρτάται τετραγωνικά από το πλάτος E_0 και άρα η μείωσή της κατά 64% σε σχέση με την α συνεπάγεται την αντίστοιχη μείωση του E_0 κατά 80% δηλαδή

$$E'_0 = 0.8E_0 = 0.8 \times 2.5 \times 10^4 = 2.0 \times 10^4 \text{ N/C}$$



Επειδή το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές, οι δυο ίσες γωνίες του είναι 45° η κάθεμία. Φέρουμε την κάθετη ε στο Κ και παρατηρούμε ότι η γωνία πρόσπτωσης της β είναι και αυτή ίση με την κάτω γωνία 45° του πρίσματος (καθετότητα των πλευρών των δυο γωνιών). Επομένως από τον νόμο της ανάκλασης Εξ. 13.1 και η γωνία ανάκλασης θα είναι 45° και άρα η δέσμη εκτρέπεται συνολικά κατά 90° στο σημείο Κ και έτσι η γ ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα- y .

Από την Εξ. 12.6, τα E_0 και B_0 είναι ανάλογα και άρα μείωση του B_0 κατά 75%, συνεπάγεται και μείωση του E_0 κατά το ίδιο ποσοστό. Έτσι εάν E_0'' είναι το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου της γ , τότε θα ισχύει

$$E_0'' = 0.6E'_0 = 0.75 \times 2.0 \times 10^4 = 1.5 \times 10^4 \text{ N/C}$$

Όσον αφορά την πόλωση του $\vec{E}$, αυτή θα πρέπει να αλλάξει από $\vec{e}_y$ σε $-\vec{e}_x$ αφού αλλάζει η κατεύθυνση διάδοσης από $+x$ σε $+y$ χωρίς να αλλάζει η πόλωση του $\vec{B}$ η οποία είναι αναγκαστικά κατά μήκος του $\vec{e}_z$ ώστε τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και $\vec{k}$ να σχηματίζουν τρισορθογώνιο σύστημα. Από την Εξ. 12.6, το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο έχει πλάτος

$$B_0'' = \frac{E_0''}{c} = \frac{1.5 \times 10^4}{3 \times 10^8} = 0.5 \times 10^{-4} \text{ T}$$

Εφόσον οι δέσμες β και γ ταξιδεύουν στο ίδιο υλικό, τότε θα έχουν και τον ίδιο κυματάρημο δηλαδή $k'' = k' = 1.65 \times 10^7 \text{ rad/m}$ (σύμφωνα την εκφώνηση η συχνότητα δεν αλλάζει οπότε $\omega'' = \omega' = \omega = 3.3 \times 10^{15} \text{ rad/s}$). Μαζεύοντας όλες τις πληροφορίες μαζί, το Η/Μ πεδίο της γ θα είναι της μορφής:

$$\vec{E}'' = E_0''(-\vec{e}_x)\sin(k''y - \omega''t)$$

$$\vec{B}'' = B_0''(\vec{e}_z)\sin(k''y - \omega''t)$$

Παρατηρήστε τώρα ότι το όρισμα του ημιτόνου περιέχει το y ως χωρική μεταβλητή και όχι το x αφού τώρα η δέσμη ταξιδεύει κατακόρυφα. Μαζεύοντας όλες τις πληροφορίες μαζί:

$$\vec{E}'' = 1.5 \times 10^4 (-\vec{e}_x) \sin(1.65 \times 10^7 y - 3.3 \times 10^{15} t)$$

$$\vec{B}'' = 0.5 \times 10^{-4} (\vec{e}_z) \sin(1.65 \times 10^7 y - 3.3 \times 10^{15} t)$$

Προσέξτε ότι στις παραπάνω εκφράσεις μέσα στο όρισμα του ημιτόνου δεν χρειάζεται κάποια επιπλέον αρχική φάση αφού στο σημείο Κ που βρίσκεται στο $y = 0$, κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ η φάση είναι 0 όπως προβλέπουν οι παραπάνω εξισώσεις.

(β) Κατά τη χρονική στιγμή $t = 10^{-15} \text{ s}$ στο σημείο Λ της διαδρομής γ το οποίο απέχει απόσταση $y = 0.25 \text{ m}$ από το Κ, η φάση των δυο πεδίων είναι ίση με

$$k''y - \omega''t = 1.65 \times 10^7 \times 0.25 \times 10^{-6} - 3.3 \times 10^{15} \times 10^{-15} = 0.825 \text{ rad}$$

Έτσι τα παραπάνω δυο μεγέθη γίνονται

$$\vec{E}'' = 1.5 \times 10^4 (-\vec{e}_x) \sin(0.825) = -1.1 \times 10^4 \vec{e}_x \text{ N/C}$$

$$\vec{B}'' = 0.5 \times 10^{-4} (\vec{e}_z) \sin(0.825) = 0.37 \times 10^{-4} \vec{e}_z \text{ T}$$

Επειδή το $\vec{e}_{xy}$ είναι εξ' ολοκλήρου στο επίπεδο x - y τότε

$$\vec{B}'' \cdot \vec{e}_{xy} = 0$$

Για το άλλο εσωτερικό γινόμενο, πρέπει να εκφράσουμε το $\vec{e}_{xy}$ σε συνιστώσες. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\vec{e}_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

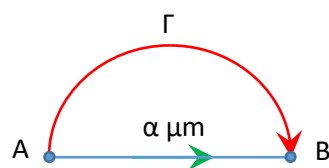
(η τετραγωνική ρίζα του δυο είναι απαραίτητη ώστε το μέτρο του διανύσματος να είναι ίσο με μονάδα). Τελικά

$$\vec{E}'' \cdot \vec{e}_{xy} = -\frac{1.1}{\sqrt{2}} \times 10^4 \vec{e}_x \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) = -\frac{1.1}{\sqrt{2}} \times 10^4 = 0.778 \times 10^4 \text{ S.I.}$$

14 ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

Πρόβλημα 14.1.

Στο παρακάτω σχήμα φως μήκους κύματος λ που παράγεται από ένα laser και ακολούθως χωρίζεται στο σημείο A σε δυο δέσμες. Η μια δέσμη ακολουθεί τη διαδρομή AB ενώ η άλλη δέσμη ακολουθεί τη μεγαλύτερη διαδρομή AΓB. Να υπολογισθεί η διαφορά φάσης σε ακτίνια των δυο δεσμών laser στο σημείο B. Δίνονται τα μήκη α και λ

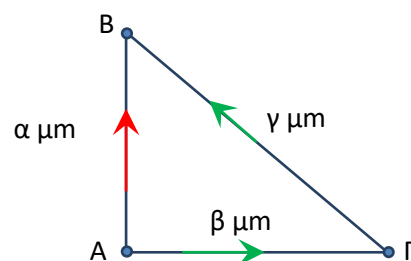


Πρόβλημα 14.2.

Έστω ότι στο προηγούμενο πρόβλημα, μπορεί κάποιος να μεταβάλλει την απόσταση α κατά συνεχή τρόπο. Για ποιες τιμές του α θα εξαλειφθεί τελείως το φως στο σημείο B;

Πρόβλημα 14.3.

Στο παραπάνω σχήμα φως μήκους κύματος λ που παράγεται από ένα laser και ακολούθως χωρίζεται στο σημείο A σε δυο δέσμες. Η μια δέσμη ακολουθεί τη διαδρομή AB ενώ η άλλη δέσμη ακολουθεί τη μεγαλύτερη διαδρομή AΓB. Να υπολογισθεί η διαφορά φάσης σε ακτίνια των δυο δεσμών στο σημείο B. Δίνονται τα μήκη α και β και λ :



Πρόβλημα 14.4.

Σε ένα πείραμα περίθλασης από απλή σχισμή με εύρος $b = 50 \mu m$ χρησιμοποιείται φως laser με μήκος κύματος $\lambda = 700 nm$. Εάν η απόσταση σχισμής-πετάσματος παρατήρησης είναι ίση με $D = 1.5 m$, να βρεθούν

α) Η απόσταση y_1 , y_2 και y_3 των πρώτων τριών σκοτεινών κροσσών από το κεντρικό μέγιστο

β) Το λόγο της έντασης I_2/I_1 του 2^{ου} προς του 1^{ου} μεγίστου (μετρώντας μετά το κεντρικό μέγιστο)

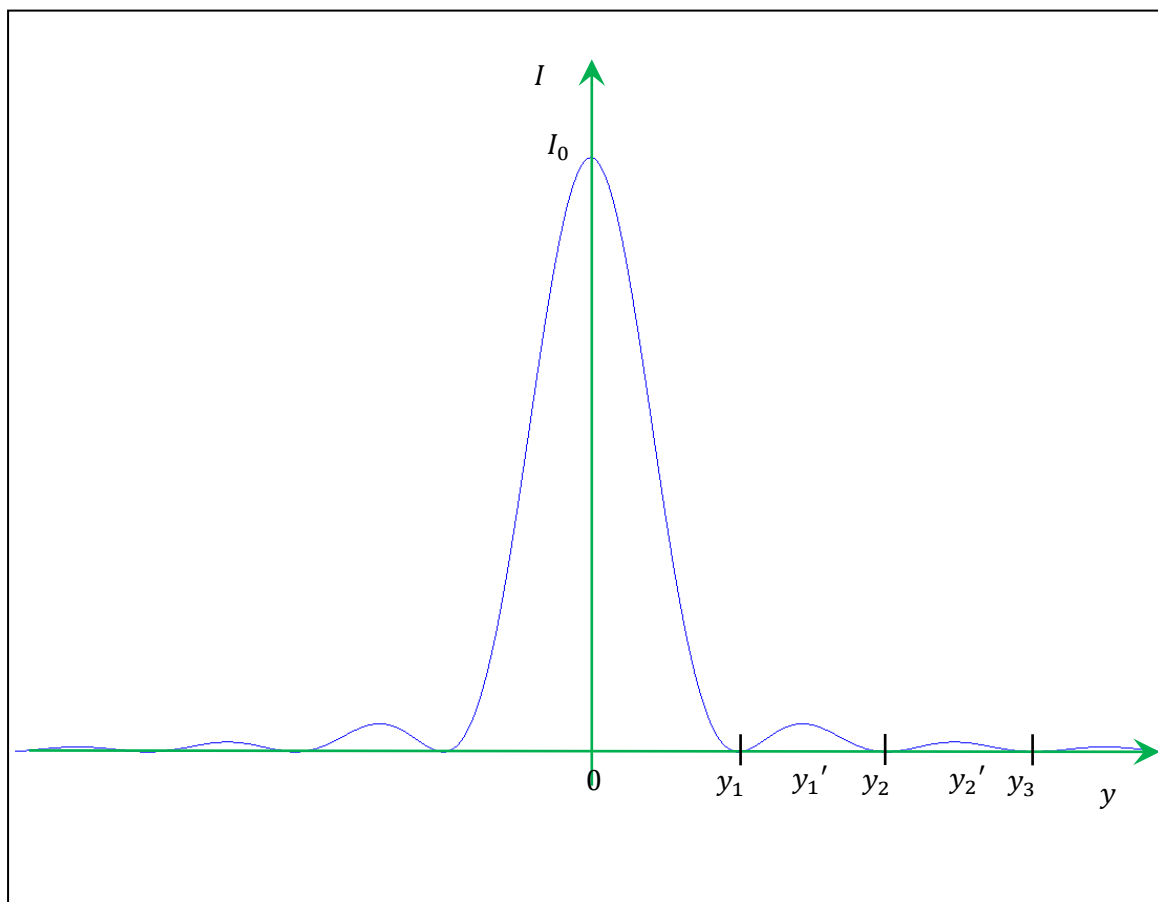
Λύση:

α) Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τα ελάχιστα στην κατανομή της έντασης I είναι τα μηδενικά της ενώ περίπου στο μέσο μεταξύ δυο ελαχίστων βρίσκονται κάποια τοπικά μέγιστα.

Από την Εξ. 14.22 έχουμε για τα ελάχιστα $y_m = m\lambda D/b$ οπότε

$$y_1 = \frac{\lambda D}{b} = \frac{0.70 \mu m}{50 \mu m} 1.5 m = 0.021 m = 2.1 cm$$

Ομοίως $y_2 = 2y_1 = 4.2 cm$ και $y_3 = 3y_1 = 6.3 cm$.



β) Τα δυο μέγιστα βρίσκονται περίπου στο μέσο μεταξύ δυο ελαχίστων και έτσι το πρώτο είναι στο

$$y'_1 = \frac{2.1 + 4.2}{2} = 3.15 \text{ cm}$$

ενώ το δεύτερο στο

$$y'_2 = \frac{4.2 + 6.3}{2} = 5.25 \text{ cm}$$

Από την Εξ. 14.17 η ένταση είναι ίση με

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2$$

όπου προσεγγιστικά από την Εξ. 14.21

$$\xi \approx \frac{\pi b}{\lambda D} y$$

Επομένως ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{\sin \xi_2}{\xi_2} \times \frac{\xi_1}{\sin \xi_1} \right)^2 = \left(\frac{y_1 \sin(\frac{\pi b}{\lambda D} y_2)}{y_2 \sin(\frac{\pi b}{\lambda D} y_1)} \right)^2$$

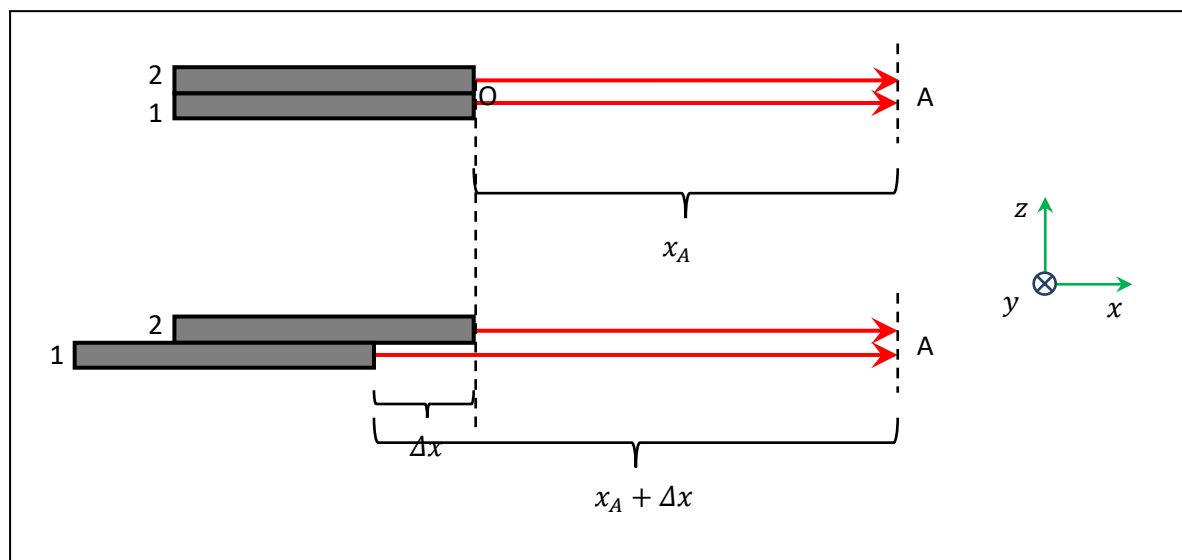
Αντικαθιστώντας τα δεδομένα

$$\frac{I_2}{I_1} = 0.36$$

Πρόβλημα 14.5.

Δυο οπτικές ίνες 1 και 2 παράλληλες στον άξονα x που εκπέμπουν δέσμες με φως ίδιας συχνότητας f , με ίσο πλάτος ηλεκτρικού πεδίου E_0 πολωμένο κάθετα και έξω από τη σελίδα (και για τις δυο συχνότητες), τοποθετούνται μέσα σε σκοτεινό θάλαμο, πλήρως ευθυγραμμισμένες και κολλητά η μια με την άλλη με τις άκρες τους στο σημείο O που εκπέμπουν φως να είναι στο $x = 0$ και να σημαδεύουν το σημείο A στο $x = x_A$. Στο σημείο O όπου εκπέμπουν οι δυο ίνες, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή των συντεταγμένων, το μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν την χρονική στιγμή $t = 0$. α) Να δοθεί η πλήρης μαθηματική έκφραση (διανυσματική μορφή) του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στο σημείο A της κάθε δέσμης για κάθε χρόνο t (επάνω σχήμα) β) Έστω ότι η ίνα 1 μετατοπίζεται κατά Δx προς τον αρνητικό άξονα x (κάτω σχήμα). Να υπολογίσετε σε ποια Δx θα εμφανιστεί ενισχυτική συμβολή.

Λύση:

Λύση:

α) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, αρχικά οι δυο ίνες είναι ευθυγραμμισμένες και εκπέμπουν κύματα που δίνονται από τα ηλεκτρικά πεδία

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y \sin(kx - \omega t)$$

(δεν υπάρχει αρχική φάση αφού στο $x = 0, t = 0$ μας δίνεται ότι $B = 0$ οπότε και $E = 0$ αφού τα δυο πεδία είναι συμφασικά) δηλαδή

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

οπότε αρχικά περιμένουμε να έχουμε ενισχυτική συμβολή. Η κυκλική συχνότητα είναι ίση με $\omega = 2\pi f$ το μήκος κύματος $\lambda = c/f$ και ο κυματάριμος $k = 2\pi/\lambda = 2\pi f/c$. Επομένως στο σημείο A με $x = x_A$ έχουμε:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y \sin(kx_A - \omega t)$$

Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι ίσο με

$$B_0 = E_0/c$$

Τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και η διεύθυνση διάδοσης (ο άξονας x) αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς επομένως το $\vec{B}$ είναι κατά μήκος του άξονα $-z$. Επίσης το $\vec{B}$ είναι σε πλήρη φάση με το $\vec{E}$ (έχουν το ίδιο ημίτονο) και έτσι:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c} \vec{e}_z \sin(kx_A - \omega t)$$

β)

Λόγω του επιπλέον Δx , τα ηλεκτρικά πεδία στο σημείο Α είναι ίσα με

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y \sin[k(x_A - ct)]$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y \sin k(x_A + \Delta x - ct)$$

Επομένως τώρα γενικά $\vec{E}_1 \neq \vec{E}_2$ επειδή υπάρχει διαφορά φάσης ίση με $k\Delta x$ όμως τα δυο πεδία ξαναγίνονται στις ειδικές περιπτώσεις όπου αυτή η διαφορά φάσης είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π δηλαδή εκεί όπου

$$k\Delta x = 2\pi m$$

με $m = 1, 2, 3 \dots$ Σε σχέση με το μήκος κύματος, η παραπάνω συνθήκη γράφεται και ως

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = 2\pi m$$

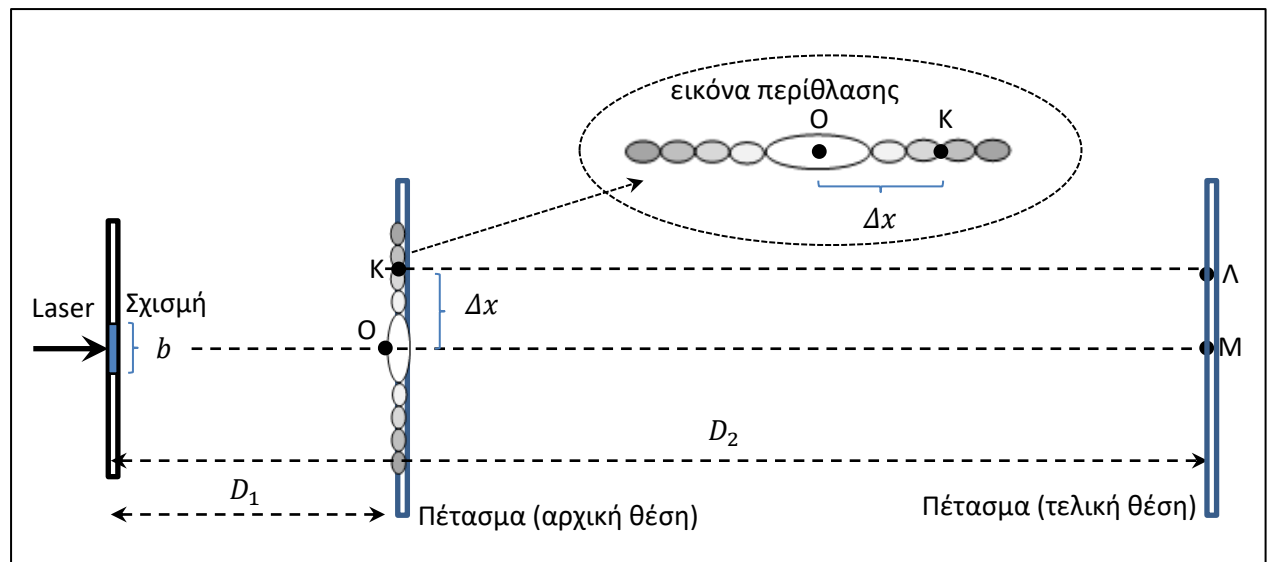
ή

$$\Delta x = m\lambda$$

Δηλαδή έχουμε ενισχυτική συμβολή κάθε φορά που το Δx είναι ίσο με ένα πολλαπλάσιο του μήκους κύματος.

Πρόβλημα 14.6.

Ένας φοιτητής εκτελεί ένα πείραμα περίθλασης με μια απλή ορθογώνια σχισμή μικροσκοπικού πλάτους b και μακροσκοπικού ύψους $a \gg b$ ρίχνοντάς της από την μια μεριά φως laser μήκους κύματος λ και παρατηρώντας από την άλλη μεριά την εικόνα της περίθλασης που σχηματίζεται σε ένα πέτασμα σε απόσταση D_1 από αυτή (θεωρούμε ότι τα b και λ είναι της ίδιας τάξης μεγέθους). Με τη βοήθεια ενός φωτοκυττάρου, ο φοιτητής μετράει την μέγιστη ένταση I_0 του φωτός επάνω στο πέτασμα στο σημείο Ο και μετά τοποθετεί το φωτοκύτταρο επάνω στο σημείο Κ (δείτε παρακάτω σχήμα) που βρίσκεται σε απόσταση Δx από το Ο κατά μήκος της εικόνας περίθλασης και παρατηρεί ότι η ένταση εκεί $I = 0$. Ακολουθώντας αλλάζει την απόσταση σχισμής πετάσματος σε $D_2 = 4D_1$ και παρατηρεί ότι στο νέο μέγιστο στο σημείο Μ το φωτοκύτταρο μετράει μικρότερη ένταση $I'_0 = 9I_0/16$. Πόση ένταση θα μετρήσει τώρα το φωτοκύτταρο εάν τοποθετηθεί στο σημείο Λ το οποίο απέχει την ίδια απόσταση Δx κατά μήκος της νέας εικόνας περίθλασης από το Μ; Θεωρήστε ότι $D_1 \gg \Delta x$



Λύση: Επειδή $D_1 \gg \Delta x$, η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας του αρχικού διαγράμματος περίθλασης δίνεται προσεγγιστικά από την σχέση:

$$I \approx I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda D_1} x\right)}{\frac{\pi b}{\lambda D_1} x} \right)^2$$

Τα ελάχιστα εμφανίζονται εκεί όπου

$$\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda D_1} x\right) = 0$$

δηλαδή εκεί όπου

$$\frac{\pi b}{\lambda D_1} x = n\pi$$

με το n να είναι ακέραιος με εξαίρεση το $n = 0$ επειδή λόγω του νόμου του De l'Hospital δίνει μέγιστο της μορφής $0/0 \rightarrow 1$. Έτσι τα ελάχιστα εμφανίζονται στις θέσεις

$$x_n = n \frac{\lambda D_1}{b}$$

με $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ Από τη δεδομένη εικόνα περίθλασης, το K φαίνεται να είναι στο τρίτο ελάχιστο, δηλαδή $n = 3$ και

$$\Delta x = x_3 = 3 \frac{\lambda D_1}{b}$$

Όταν η απόσταση σχισμής πετάσματος αλλάξει σε D_2 , τότε η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας αλλάζει σε:

$$I' \approx I_0' \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda D_2} x\right)}{\frac{\pi b}{\lambda D_2} x} \right)^2$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω Δx και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $I_0' = 9I_0/16$ και $D_2 = 4D_1$, οδηγεί στο αποτέλεσμα

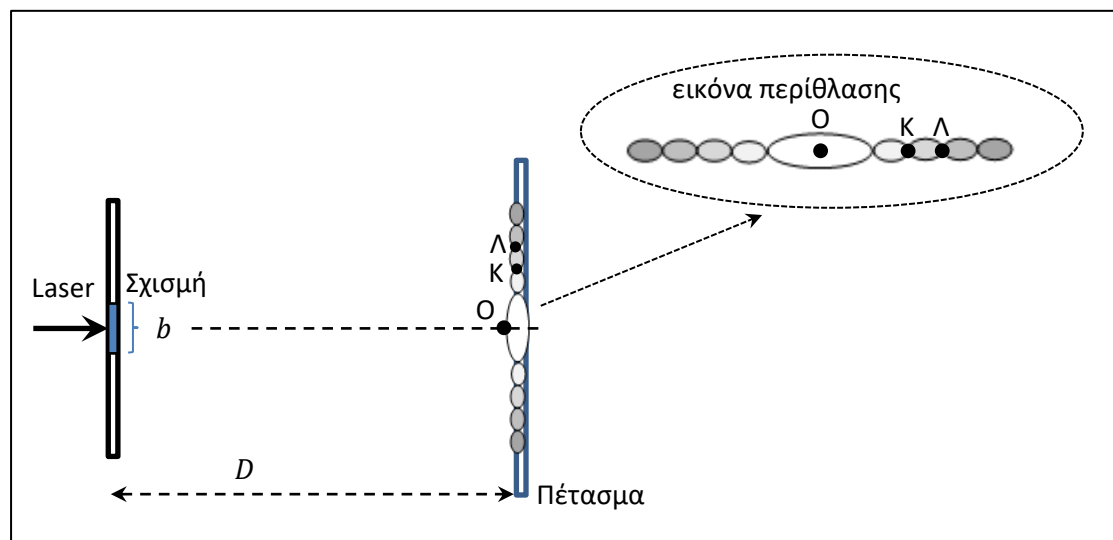
$$I' = \frac{9I_0}{16} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda D_2} 3 \frac{\lambda D_1}{b}\right)}{\frac{\pi b}{\lambda D_2} 3 \frac{\lambda D_1}{b}} \right)^2 = \frac{9I_0}{16} \left(\frac{\sin\left(3\pi \frac{D_1}{D_2}\right)}{3\pi \frac{D_1}{D_2}} \right)^2 = \frac{9I_0}{16} \left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\frac{3\pi}{4}} \right)^2$$

ή

$$I' = \frac{9I_0}{16} \frac{1/2}{\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2} = \frac{I_0}{2\pi^2}$$

Πρόβλημα 14.7.

Ένας φοιτητής εκτελεί ένα πείραμα περίθλασης με μια απλή ορθογώνια σχισμή μικροσκοπικού πλάτους b και μακροσκοπικού ύψους $a \gg b$ ρίχνοντάς της από την μια μεριά φως laser μήκους κύματος λ_1 και παρατηρώντας από την άλλη μεριά την εικόνα της περίθλασης που σχηματίζεται σε ένα πέτασμα σε απόσταση D από αυτή (θεωρούμε ότι τα b και λ_1 είναι της ίδιας τάξης μεγέθους). Με τη βοήθεια ενός φωτοκυττάρου, ο φοιτητής βρίσκει για την ένταση διαδοχικά $I = 0$ στα σημεία Κ και Λ (δείτε παρακάτω σχήμα). Ακολουθώς αντικαταστεί την πηγή laser με μια πιο ασθενή αλλά και με διαφορετικό μήκος κύματος $\lambda_2 = 1.2\lambda_1$. Ποιος θα είναι τώρα ο λόγος των εντάσεων $I(K)/I(\Lambda)$ στα σημεία Κ και Λ; Θεωρήστε ότι το D είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από οποιαδήποτε απόσταση μετράει ο φοιτητής επάνω στο πέτασμα. Χρήσιμα νούμερα: $\sin(\pi/0.2) = 0$, $\sin(\pi/0.4) = 1$, $\sin(\pi/0.6) = -\sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/0.8) = -\sqrt{2}/2$



Λύση: Επειδή το D είναι μεγάλο, η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας του αρχικού διαγράμματος περίθλασης δίνεται προσεγγιστικά από την σχέση:

$$I \approx I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_1 D} x\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_1 D} x} \right)^2$$

Τα ελάχιστα εμφανίζονται εκεί όπου

$$\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_1 D} x\right) = 0$$

δηλαδή εκεί όπου

$$\frac{\pi b}{\lambda_1 D} x = n\pi$$

με το n να είναι ακέραιος με εξαίρεση το $n = 0$ επειδή λόγω του νόμου του De l' Hospital δίνει μέγιστο της μορφής $0/0 \rightarrow 1$. Έτσι τα ελάχιστα εμφανίζονται στις θέσεις

$$x_n = n \frac{\lambda_1 D}{b}$$

με $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ Από τη δεδομένη εικόνα περίθλασης, τα Κ και Λ φαίνονται να είναι στο δεύτερο και τρίτο ελάχιστο αντίστοιχα, δηλαδή στα $n = 2$ και $n = 3$, οπότε έχουν συντεταγμένες

$$x_K = 2 \frac{\lambda_1 D}{b}$$

και

$$x_\Lambda = 3 \frac{\lambda_1 D}{b}$$

Ομοίως όταν το μήκος κύματος αλλάξει σε λ_2 , τότε η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας αλλάζει σε:

$$I' \approx I_0' \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_2 D} x\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_2 D} x} \right)^2$$

όπου πρέπει $I_0' < I_0$ αφού πρόκειται για ασθενέστερη πηγή. Μας ενδιαφέρει η ένταση στα σημεία Κ και Λ με συντεταγμένες x_K και x_Λ που είδαμε παραπάνω. Με αντικατάσταση:

$$I'(K) \approx I_0' \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_2 D} x_K\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_2 D} x_K} \right)^2 = I_0' \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_2 D} 2 \frac{\lambda_1 D}{b}\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_2 D} 2 \frac{\lambda_1 D}{b}} \right)^2 = I_0' \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda_2} 2\lambda_1\right)}{\frac{\pi}{\lambda_2} 2\lambda_1} \right)^2$$

$$I'(\Lambda) \approx I_0' \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_2 D} x_\Lambda\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_2 D} x_\Lambda} \right)^2 = I_0' \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_2 D} 3 \frac{\lambda_1 D}{b}\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_2 D} 3 \frac{\lambda_1 D}{b}} \right)^2 = I_0' \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda_2} 3\lambda_1\right)}{\frac{\pi}{\lambda_2} 3\lambda_1} \right)^2$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι ο

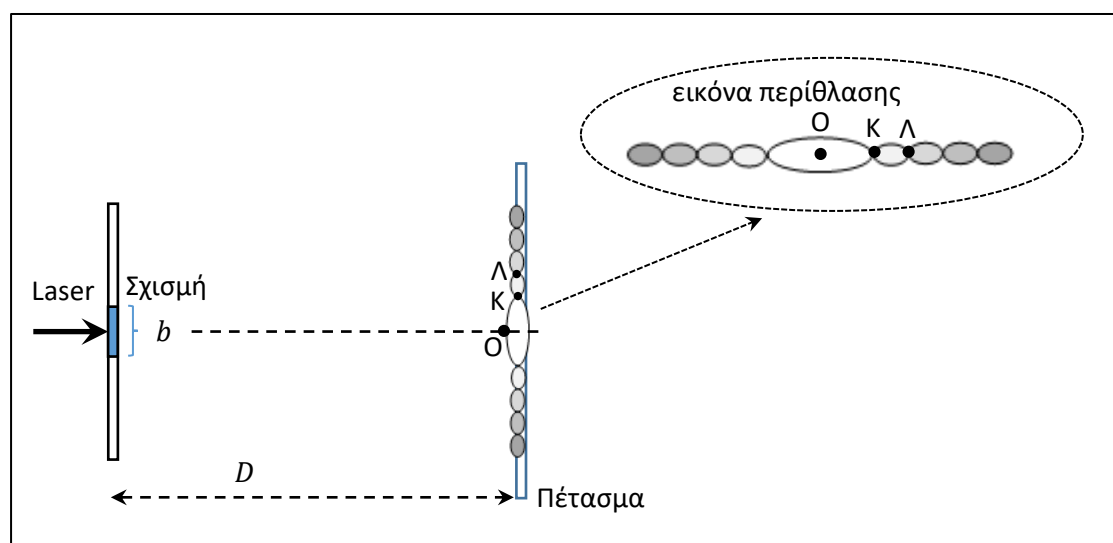
$$\frac{I'(K)}{I'(\Lambda)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda_2} 2\lambda_1\right)}{\frac{\pi}{\lambda_2} 2\lambda_1} \times \frac{\frac{\pi}{\lambda_2} 3\lambda_1}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda_2} 3\lambda_1\right)} \right)^2 = \left(\frac{3}{2} \times \frac{\sin\left(2\pi \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}{\sin\left(3\pi \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} \right)^2$$

Αντικαθιστώντας το $\lambda_2 = 1.2\lambda_1$, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{I'(K)}{I'(\Lambda)} = \left(\frac{3}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{0.6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{0.4}\right)} \right)^2 = \left(\frac{3}{2} \times \frac{-\sqrt{3}/2}{1} \right)^2 = \frac{27}{16}$$

Πρόβλημα 14.8.

Ένας φοιτητής εκτελεί ένα πείραμα περίθλασης με μια απλή ορθογώνια σχισμή μικροσκοπικού πλάτους b_1 και μακροσκοπικού ύψους $a \gg b_1$ ρίχνοντάς της από την μια μεριά φως laser μήκους κύματος λ και παρατηρώντας από την άλλη μεριά την εικόνα της περίθλασης που σχηματίζεται σε ένα πέτασμα σε απόσταση D από αυτή (θεωρούμε ότι τα b_1 και λ είναι της ίδιας τάξης μεγέθους). Με τη βοήθεια ενός φωτοκυττάρου, ο φοιτητής βρίσκει για την ένταση διαδοχικά $I = 0$ στα σημεία Κ και Λ (δείτε παρακάτω σχήμα). Ακολουθώντας αντικαταστεί την σχισμή με μια ίδιου ύψους a αλλά διαφορετικού πλάτους $b_2 = b_1/4$. Ποιος θα είναι τώρα ο λόγος των εντάσεων $I(K)/I(\Lambda)$ στα σημεία Κ και Λ; Θεωρήστε ότι το D είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από οποιαδήποτε απόσταση μετράει ο φοιτητής επάνω στο πέτασμα.



Λύση: Επειδή το D είναι μεγάλο, η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας του αρχικού διαγράμματος περίθλασης δίνεται προσεγγιστικά από την σχέση:

$$I \approx I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b_1}{\lambda D} x\right)}{\frac{\pi b_1}{\lambda D} x} \right)^2$$

Τα ελάχιστα εμφανίζονται εκεί όπου

$$\sin\left(\frac{\pi b_1}{\lambda D} x\right) = 0$$

δηλαδή εκεί όπου

$$\frac{\pi b_1}{\lambda D} x = n\pi$$

με το n να είναι ακέραιος με εξαίρεση το $n = 0$ επειδή λόγω του νόμου του De l'Hospital δίνει μέγιστο της μορφής $0/0 \rightarrow 1$. Έτσι τα ελάχιστα εμφανίζονται στις θέσεις

$$x_n = n \frac{\lambda D}{b_1}$$

με $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ Από τη δεδομένη εικόνα περίθλασης, τα Κ και Λ φαίνονται να είναι στο πρώτο και δεύτερο ελάχιστο αντίστοιχα, δηλαδή στα $n = 1$ και $n = 2$, οπότε έχουν συντεταγμένες

$$x_K = \frac{\lambda D}{b_1}$$

και

$$x_A = 2 \frac{\lambda D}{b_1}$$

Όταν το πλάτος της σχισμής αλλάξει σε b_2 , τότε η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας αλλάζει σε:

$$I' \approx I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi b_2}{\lambda D} x \right)}{\frac{\pi b_2}{\lambda D} x} \right)^2$$

όπου το I_0 παραμένει το ίδιο αφού πρόκειται για την ίδια πηγή. Μας ενδιαφέρει η ένταση στα σημεία Κ και Λ με συντεταγμένες x_1 και x_2 που είδαμε παραπάνω. Με αντικατάσταση:

$$I'(K) \approx I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi b_2}{\lambda D} x_K \right)}{\frac{\pi b_2}{\lambda D} x_K} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi b_2 \lambda D}{\lambda D b_1} \right)}{\frac{\pi b_2 \lambda D}{\lambda D b_1}} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi b_2}{b_1} \right)}{\frac{\pi b_2}{b_1}} \right)^2$$

$$I'(A) \approx I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi b_2}{\lambda D} x_A \right)}{\frac{\pi b_2}{\lambda D} x_A} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi b_2}{\lambda D} 2 \frac{\lambda D}{b_1} \right)}{\frac{\pi b_2}{\lambda D} 2 \frac{\lambda D}{b_1}} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin \left(2 \frac{\pi b_2}{b_1} \right)}{2 \frac{\pi b_2}{b_1}} \right)^2$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι ο

$$\frac{I'(K)}{I'(A)} = \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi b_2}{b_1} \right)}{\frac{\pi b_2}{b_1}} \times \frac{2 \frac{\pi b_2}{b_1}}{\sin \left(2 \frac{\pi b_2}{b_1} \right)} \right)^2 = \left(2 \times \frac{\sin \left(\frac{\pi b_2}{b_1} \right)}{\sin \left(2 \frac{\pi b_2}{b_1} \right)} \right)^2 = \left(\frac{1}{\cos \left(\frac{\pi b_2}{b_1} \right)} \right)^2$$

Αντικαθιστώντας το $b_2 = b_1/6$, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{I'(K)}{I'(A)} = \left(\frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{6} \right)} \right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{3}$$

ή

$$\frac{I'(K)}{I'(A)} = \left(\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{27}{16}$$