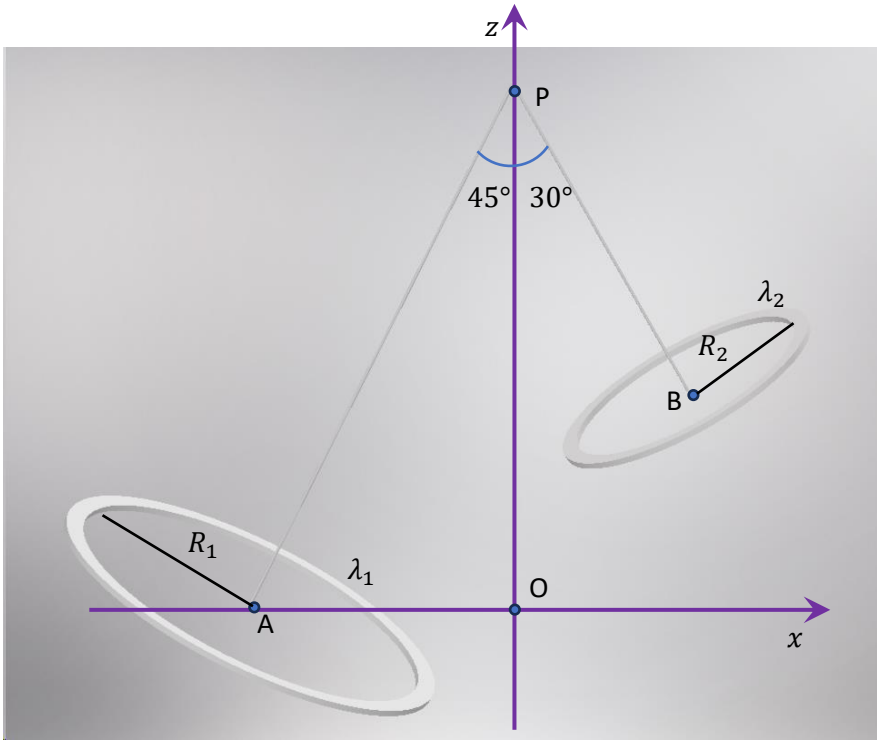
ΘΕΜΑ 1. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένας φοιτητής φορτίζει δυο λεπτούς δακτυλίους διαφορετικών ακτίνων $R_1 = 1\,m$ και $R_2 = \sqrt{2/3}\,m$, με διαφορετικές γραμμικές πυκνότητες φορτίου. Οι δυο μεσοκαθέτοι τους AP και BP βρίσκονται μέσα στη σελίδα, η οποία ταυτίζεται με το επίπεδο z-x, και τέμνονται στο σημείο P το οποίο βρίσκεται επάνω στον άξονα z. Κάθε μεσοκάθετος τέμνει τον άξονα z με διαφορετική γωνία $45°$ και $30°$ αντίστοιχα. Η απόσταση OP είναι $2\,m$ και η προβολή του BP επάνω στον άξονα z είναι ίση με $1\,m$. Ο φοιτητής φορτίζει με γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda_1 = 9\sqrt{3}\,nC/m$ τον δακτύλιο στα αριστερά και ρυθμίζει την λ_2 έτσι ώστε εάν τοποθετηθεί ένα μικρό υποθετικό φορτίο στο σημείο P, αυτό να μην επιταχυνθεί οριζόντια. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P εξαιτίας των δυο δακτυλίων.



Λύση:

Από τα δεδομένα, το μήκος της μεσοκαθέτου AP είναι ίσο με

$$\rho_1 = \frac{2}{cos45°} = 2\sqrt{2}\,m$$

ενώ το μήκος της μεσοκαθέτου BP είναι ίσο με

$$\rho_2 = \frac{1}{cos30°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,m$$

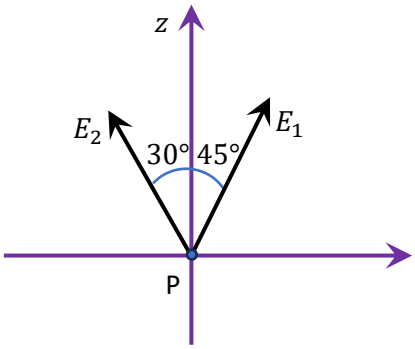
Το φορτίο του δακτυλίου στα αριστερά είναι ίσο με

$$Q_1 = 2\pi R_1 \lambda_1$$

και αντίστοιχα αυτού στα δεξιά

$$Q_2 = 2\pi R_2 \lambda_2$$

Το ηλεκτρικό πεδίο ενός φορτισμένου δακτυλίου είναι κατά μήκος της μεσοκαθέτου του και έτσι στο σημείο P θα εμφανιστούν δυο ηλεκτρικά πεδία όπως στο παρακάτω σχήμα



Τα δυο πεδία έχουν μέτρα

$$E_1 = kQ_1 \frac{\rho_1}{\left({\rho_1}^2 + {R_1}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2k\pi\lambda_1 R_1 \frac{\rho_1}{\left({\rho_1}^2 + {R_1}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_2 = kQ_2 \frac{\rho_2}{\left({\rho_2}^2 + {R_1}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2k\pi\lambda_2 R_2 \frac{\rho_2}{\left({\rho_2}^2 + {R_1}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα

$$E_1 = 12\sqrt{6}\pi 10^9$$

$$E_2 = 6\pi\lambda_2 10^9$$

Εφόσον στην εκφώνηση αναφέρεται ότι ένα σημειακό φορτίο δεν θα επιταχυνθεί οριζόντια, αυτό μεταφράζεται στο ότι οι x συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου αλληλοαναιρούνται, που σημαίνει ότι

$$E_1 cos45° = E_2 cos30°$$

$$12\sqrt{6}\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\lambda_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ή

$$\lambda_2 = 4\ nC/m$$

Έτσι παραμένουν μόνο οι z συνιστώσες του πεδίου οι οποίες αθροίζονται στο

$$E_z = E_{1z} + E_{2z} = E_1 sin45° + E_2 sin30°$$

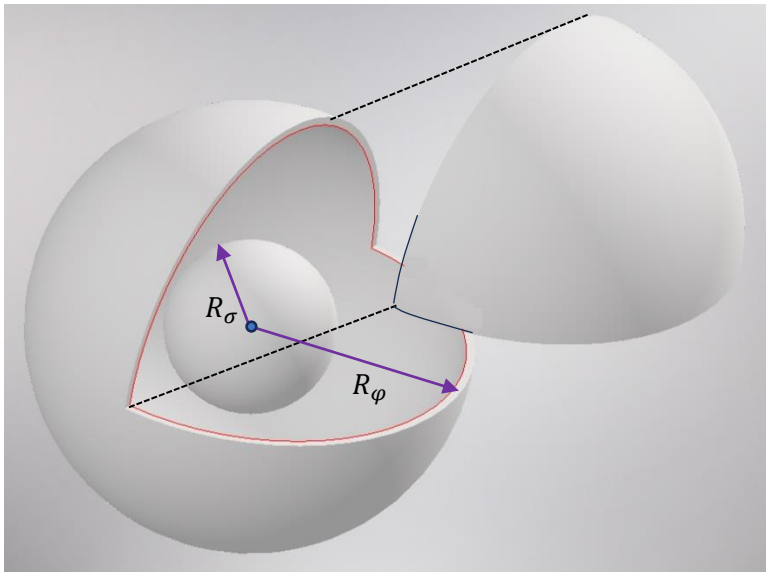
ή

$$E_z = E_{1z} + E_{2z} = 12\sqrt{6}\pi sin45° + 24\pi sin45°$$

(οι μονάδες νανο $= 10^{-9}$ έχουν αναιρεθεί από το πολλαπλάσιο 10^9). Έτσι

$$E_z = \left(\sqrt{3} + 1\right)12\pi \cong 103\ N/C$$

ΘΕΜΑ 2: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένας φοιτητής τοποθετεί μια μη αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R_σ στο εσωτερικό ενός σφαιρικού φλοιού ακτίνας R_φ και φορτίζει με θετικό φορτίο Q_σ την σφαίρα ομοιόμορφα σε όλο της τον όγκο και με αρνητικό φορτίο $-Q_\varphi$ τον σφαιρικό φλοιό. Παίρνοντας ως αναφορά το άπειρο, να βρεθεί η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού παντού στο χώρο. Να δοθεί η τιμή του στο κέντρο της σφαίρας αλλά και σε μέση απόσταση μεταξύ της επιφάνειας της σφαίρας και του σφαιρικού φλοιού



Λύση:

Ξεκινάμε με το ηλεκτρικό πεδίο λαμβάνοντας υπόψη τα εξής: (α) ο φλοιός στο εσωτερικό του δεν δημιουργεί πεδίο και άρα το ηλεκτρικό πεδίο παράγεται μόνο από τη σφαίρα, (β) το πεδίο της σφαίρας αυξάνει γραμμικά στο εσωτερικό της ενώ στο εξωτερικό της η σφαίρα συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο και (γ) ο φλοιός στο εξωτερικό του συμπεριφέρεται και αυτός ως σημειακό φορτίο. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τις εξής εκφράσεις:

Εσωτερικό, ομοιόμορφα χωρικά φορτισμένη σφαίρα $r < R_\sigma$,

$$E = k\,\frac{Q_\sigma}{{R_\sigma}^3}r$$

Χώρος ανάμεσα από σφαίρα και φλοιό, $R_\sigma < r < R_\varphi$

$$E = k\,\frac{Q_\sigma}{r^2}$$

Χώρος εξωτερικά του φλοιού, $r > R_\varphi$, συνεισφορά από δυο πεδία σφαίρας – φλοιού.

$$E = k\,\frac{Q_\sigma}{r^2} - k\,\frac{Q_\varphi}{r^2} = k\,\frac{Q_\sigma - Q_\varphi}{r^2}$$

Ολοκληρώνουμε τις παραπάνω για να βρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό σύμφωνα με την

$$V = -\int E dr$$

Έχουμε τρεις περιοχές και άρα τρεις σταθερές

Για $r < R_\sigma$

$$V = -k\,\frac{Q_\sigma}{2{R_\sigma}^3} r^2 + c_1$$

Για $R_\sigma < r < R_\varphi$

$$V = k\,\frac{Q_\sigma}{r} + c_2$$

Για $r > R_\varphi$

$$V = k\,\frac{Q_\sigma - Q_\varphi}{r} + c_3$$

Αφού για αναφορά είναι το άπειρο, δηλαδή $V \to 0$ στο $r \to \infty$, τότε από την τρίτη παίρνουμε $c_3 = 0$. Επάνω στο σφαιρικό φλοιό όπου $r = R_\varphi$, τα δυο δυναμικά από έξω και από μέσα πρέπει να έχουν την ίδια τιμή ώστε το δυναμικό να είναι συνεχές, δηλαδή

$$V\left({R_\varphi}^-\right) = V\left({R_\varphi}^+\right)$$

ή

$$k\,\frac{Q_\sigma}{R_\varphi} + c_2 = k\,\frac{Q_\sigma - Q_\varphi}{R_\varphi}$$

οπότε

$$c_2 = -k\,\frac{Q_\varphi}{R_\varphi}$$

Ομοίως επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας στο δυναμικό πρέπει να είναι συνεχές, δηλαδή

$$V({R_\sigma}^-) = V\left({R_\sigma}^+\right)$$

ή

$$-k\,\frac{Q_\sigma}{2{R_\sigma}^3}{R_\sigma}^2 + c_1 = k\,\frac{Q_\sigma}{R_\sigma} + c_2$$

ή

$$-k\,\frac{Q_\sigma}{2R_\sigma} + c_1 = k\,\frac{Q_\sigma}{R_\sigma} - k\,\frac{Q_\varphi}{R_\varphi}$$

ή

$$c_1 = \frac{3}{2}k\,\frac{Q_\sigma}{R_\sigma} - k\,\frac{Q_\varphi}{R_\varphi}$$

Συλλογικά έχουμε

Για $r < R_\sigma$

$$V = -k\,\frac{Q_\sigma}{2{R_\sigma}^3}r^2 + \frac{3}{2}k\,\frac{Q_\sigma}{R_\sigma} - k\,\frac{Q_\varphi}{R_\varphi}$$

Για $R_\sigma < r < R_\varphi$

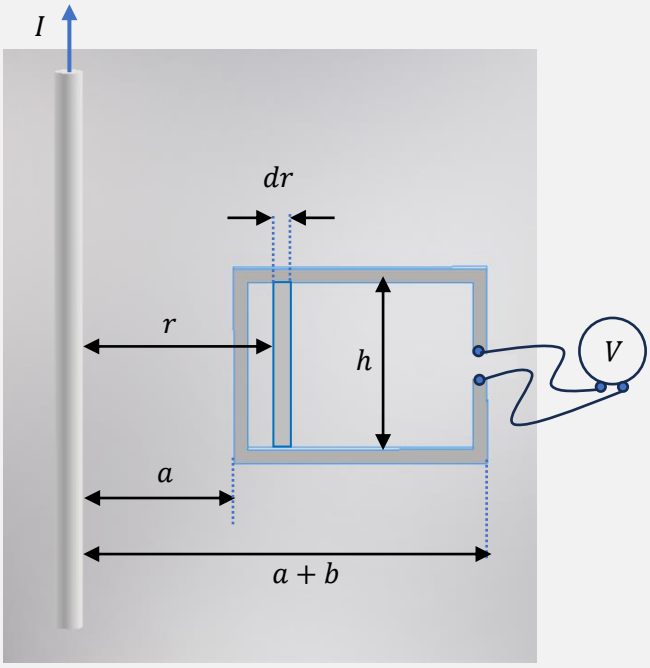
$$V = k\,\frac{Q_\sigma}{r} - k\,\frac{Q_\varphi}{R_\varphi}$$

Για $r > R_\varphi$

$$V = k\,\frac{Q_\sigma - Q_\varphi}{r}$$

Στο κέντρο της σφαίρας $r = 0$ και έτσι

<u>ΘΕΜΑ 3</u>: Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας λεπτός ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους ο οποίος φέρει ρεύμα I και βρίσκεται μέσα στο επίπεδο της σελίδας. Στο ίδιο επίπεδο υπάρχει κα ένα λεπτό ορθογώνιο μεταλλικό πλαίσιο διαστάσεων $b \times h$ με τη μία του πλευρά παράλληλα στον αγωγό και σε απόσταση a από αυτόν. Το πλαίσιο φέρει μικρή εγκοπή ώστε να είναι συνδεδεμένο ένα βολτόμετρο για την καταγραφή της ηλεκτρικής τάσης V. Το ρεύμα μεταβάλλεται με το χρόνο ως εξής $I = I_0 cos\varphi(t)$, όπου η $\varphi(t)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση του χρόνου t και η οποία κατά τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 1$ s λαμβάνει τις τιμές 0 και π αντίστοιχα. Να βρεθεί ηλεκτρική τάση που θα καταγράψει το βολτόμετρο κατά τη χρονική στιγμή $t = 1/6$ s. <u>Υπόδειξη</u>: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μια στοιχειώδη επιφάνεια του πλαισίου πάχους dr σε τυχαία απόσταση r από τον αγωγό, όπως φαίνεται στο σχήμα.



<u>Λύση</u>:

Το μαγνητικό πεδίο που παράγει ο αγωγός σε τυχαία απόσταση r από αυτόν, δίνεται από την έκφραση

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από το στοιχειώδες πλαίσιο είναι ίση με

$$d\Phi = BdA$$

όπου $dA = hdr$ είναι το στοιχειώδες εμβαδό του. Έτσι

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} hdr$$

Ολοκληρώνουμε για να βρούμε την συνολική μαγνητική ροή

$$\Phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} I \int_{r=a}^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} I \, ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

Η τάση ανά πάσα στιγμή δίνεται από τον νόμο του Faraday

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 h}{2\pi} ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\frac{dI}{dt}$$

Από τα δεδομένα, η συνάρτηση $\varphi(t)$ είναι η εξής

$$\varphi(t) = \pi t$$

και έτσι

$$I = I_0 cos\pi t$$

με παράγωγο

$$\frac{dI}{dt} = -\pi I_0 sin\pi t$$

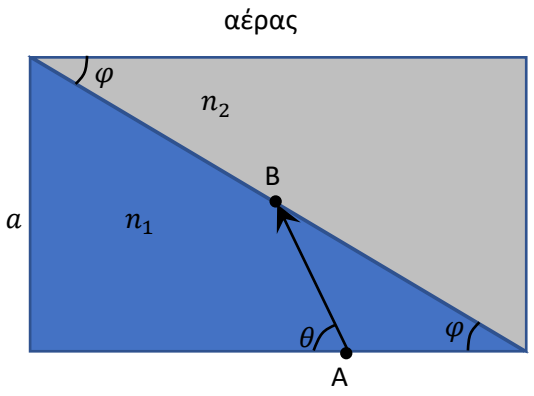
Έτσι η τάση γίνεται

$$V = \frac{\mu_0 h}{2} ln\left(\frac{a+b}{a}\right) I_0 sin\pi t$$

Κατά την χρονική στιγμή $t = 1/6$

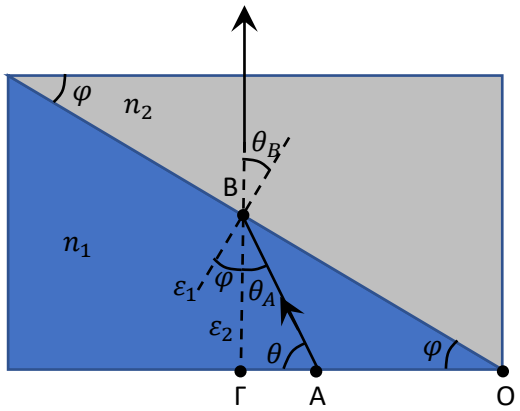
$$V = \frac{\mu_0 h}{4} ln\left(\frac{a+b}{a}\right) I_0$$

ΘΕΜΑ 4: Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής τοποθετεί δυο παρόμοια πρίσματα (κοινώς σφήνες) με την ίδια γωνία $\varphi = 20^0$ κατά μήκος των κεκλιμένων επιπέδων τους. Τα δυο πρίσματα είναι από διαφορετικά υλικά με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 όπως αναγράφονται. Στο κάτω μέρος του κάτω πρίσματος στο σημείο Α υπάρχει μικρό LASER που εκπέμπει μια φωτεινή ακτίνα ΑΒ με γωνία θ ως προς την βάση του πρίσματος. Ένας μέρος της ακτίνας ανακλάται στο σημείο Β ενώ ένα μέρος της διαθλάται προς το πάνω πρίσμα. Ο φοιτητής παρατηρεί ότι σε μια συγκεκριμένη τιμή της θ, η φωτεινή ακτίνα εξέρχεται από το πάνω πρίσμα στον αέρα, κάθετα ως προς την πάνω επιφάνεια. Να βρεθεί η γωνία θ. Δίνεται το μήκος $a = 6\ cm$ της μιας πλευράς του κάτω πρίσματος και οι δείκτες $n_1 = 1.8$ και $n_2 = 2.2$.



Λύση:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, φέρουμε την κάθετο ε_1 στη διεπιφάνεια στο σημείο Β και την κατακόρυφο ε_2 που διέρχεται από το ίδιο σημείο. Αφού η δέσμη εξέρχεται κάθετα στον αέρα, άρα προσπίπτει με γωνία 0 ως προς το κάθετο της πάνω επιφάνειας, που σημαίνει ότι ταξιδεύει κατακόρυφα μέσα στο πάνω πρίσμα.



Έτσι η γωνία διάθλασης θ_B στο Β είναι ίση με φ αφού οι πλευρές τους είναι κάθετες (π.χ. συγκρίνετε με την πάνω αριστερή φ) και επομένως $\theta_B = 20°$. Την γωνία πρόσπτωσης στο Β μπορούμε να την γράψουμε ως $\theta_A + \varphi = \theta_A + 20$ όπου η $\theta_A = 90 - \theta$ είναι η γωνία που σχηματίζει η ΑΒ με την κατακόρυφο ε_2. Από τον νόμο της διάθλασης του Snell έχουμε

$$n_1 sin(\theta_A + 20) = n_2 sin\theta_B => sin(\theta_A + 20) = \frac{n_2}{n_1} sin\varphi = \frac{2.2}{1.8} sin20° = 0.418$$

ή

$$\theta_A = -20 + arcsin(0.418) = 4.7°$$

και

$$\theta = 90 - \theta_A = 85.3°$$